Strujnice i trajektorije u prirodnom koordinatnom sustavu

Vježbe iz Dinamičke meteorologije II

Strujnice i trajektorije

- Funkcija s(x, y, t) označava udaljenost uzduž krivulje koja odgovara putanji česti fluida u horizontalnoj ravnini

- **trajektorija** – putanja individualnih česti fluida u konačnom vremenskom intervalu
(engl. *trajectory, pathline*)

- horizontalne trajektorije se određuju integracijom jednadžbe

$$\frac{ds}{dt} = \mathrm{v}(x, y, t)$$

u konačnom vremenskom intervalu za svaku čest koja se prati

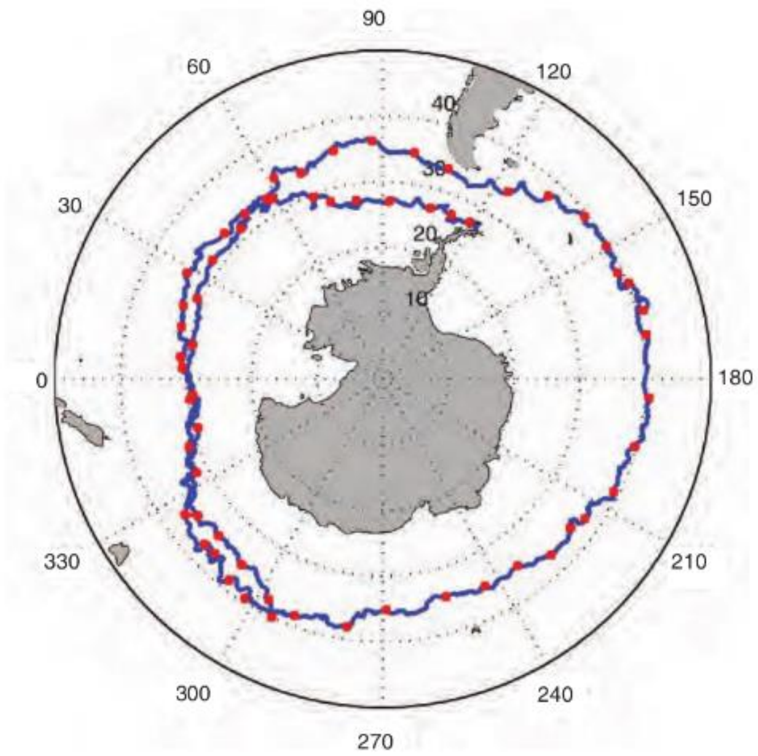
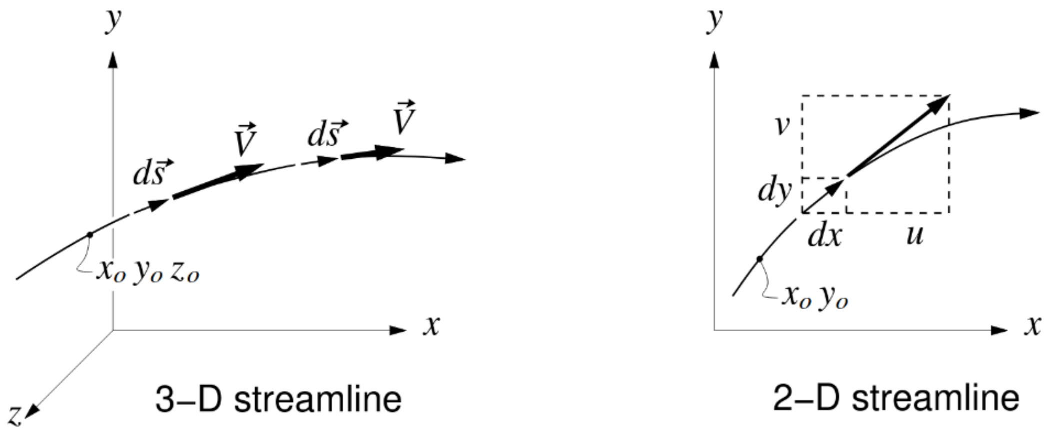


FIGURE 9.27. The trajectory of a surface drifter which made one and a half loops around Antarctica between March, 1995, and March, 2000 (courtesy of Nikolai Maximenko): Red dots mark the position of the float at 30-day intervals. The float is moving in a clockwise direction.

izvor: Marshall, J., & Plumb, R. A. (1989). *Atmosphere, ocean and climate dynamics: an introductory text*. Academic Press.

Strujnice i trajektorije



https://web.mit.edu/16.unified/www/FALL/fluids/Lectures/f08.pdf

- **strujnica** – krivulja čija je tangenta paralelna s trenutnom brzinom fluida u toj točki

- geostrofičko strujanje → strujnice paralelne s izobarama
- strujnice se određuju integracijom jednadžbe u trenutku t_0

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x,y,t_0)}{u(x,y,t_o)}$$

- uvjet tangencijalnosti u 3D slučaju: $\frac{dx}{u(t,x,y,z)} = \frac{dy}{v(t,x,y,z)} = \frac{dz}{w(t,x,y,z)}$ gdje je t oznaka za vrijeme, dok u, v, w označavaju komponente brzine u x, y, z smjeru

- 2D slučaj: $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$ pri čemu je dy/dx nagib strujnice, a v/u nagib vektora brzine

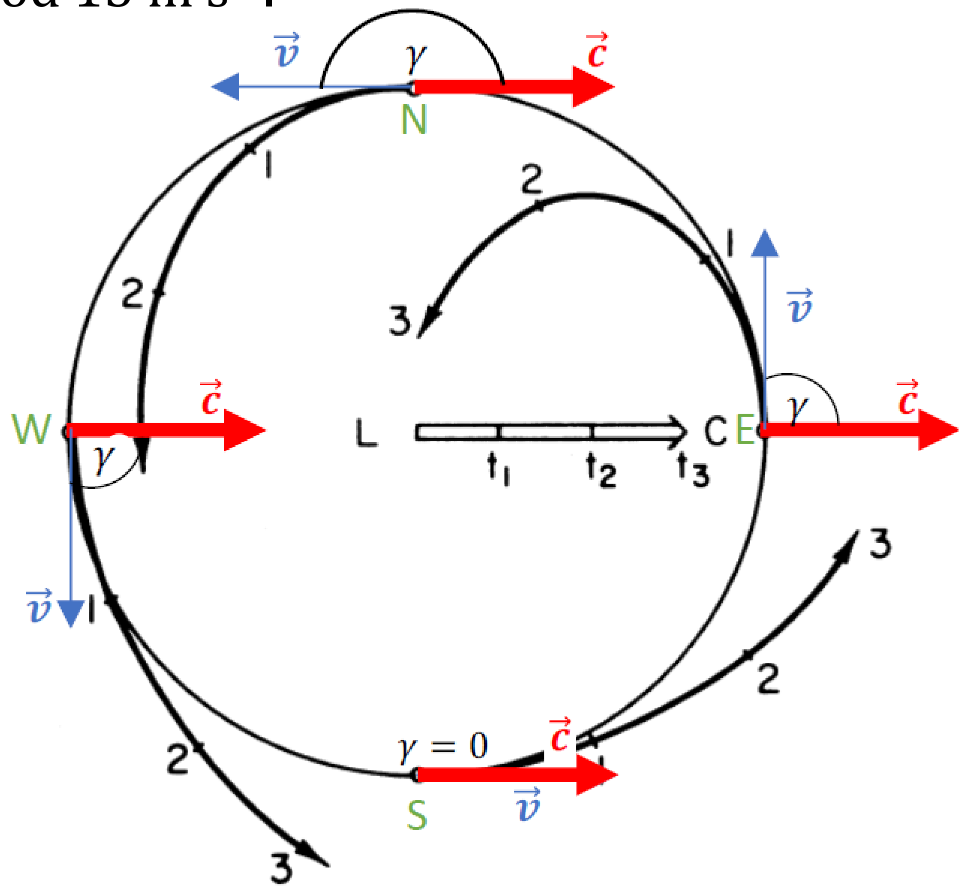
- polje strujnica se određuje za svaki trenutak posebno, te općenito $strujnice(t_1) \neq strujnice(t_2)$

Primjeri i zadatci

1. Brzina je zadana izrazom $\vec{v} = (1 + At + Bt^2)\vec{i} + x\vec{j}$.
(a) Nađite jednadžbu strujnice koja u $t = t_0$ prolazi kroz točku (x_0, y_0).
(b) Nađite trajektoriju elementa fluida koji prolazi kroz točku (x_0, y_0) u $t = t_0$.
(c) Pokažite da je za $A = 0, B = 0$ (tj. stacionarno strujanje) strujnica jednaka trajektoriji.

2. Dvodimenzionalno strujanje zadano je sa $\vec{v} = y\vec{i} - x\vec{j}$. Nađite jednadžbu strujnice koja prolazi kroz točku (1,0).

3. Odredite radijus zakrivljenosti trajektorija česti zraka smještenih na udaljenosti od 500 km (a) istočno, (b) sjeverno, (c) južno i (d) zapadno od centra kružne ciklone. Ciklona se giba prema istoku brzinom 15 m s^{-1}. Pretpostavite da je strujanje unutar ciklone geostrofičko s jednolikom tangencijalnom brzinom vjetra od 15 m s^{-1}.



4. Nađite brzine gradijentskog vjetra za česti zraka iz prethodnog zadatka koristeći izračunate vrijednosti za R_t. Usporedite dobivene iznose brzina s brzinama geostrofičkog vjetra, uzimajući vrijednost Coriolisovog parametra $f = 10^{-4}\ s^{-1}$.

Rješenja

1. Brzina je zadana izrazom $\vec{v} = (1 + At + Bt^2)\vec{i} + x\vec{j}$.
(a) Nađite jednadžbu strujnice koja u $t = t_0$ prolazi kroz točku (x_0, y_0).
(b) Nađite trajektoriju elementa fluida koji prolazi kroz točku (x_0, y_0) u $t = t_0$.
(c) Pokažite da je za $A = 0, B = 0$ (tj. stacionarno strujanje) strujnica jednaka trajektoriji.

Rješenje:

(a) Komponente vektora brzine su:

$$u = 1 + At + Bt^2, \qquad v = x$$

Nagib strujnice dy/dx jednak je nagibu vektora brzine v/u:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{x}{1 + At + Bt^2}$$

$$t = t_0 : \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 + At_0 + Bt_0^2}$$

$$dy = \frac{x\,dx}{1 + At_0 + Bt_0^2} \qquad \Big/ \int_{x_0, y_0}^{x, y}$$

$$y - y_0 = \frac{1}{1 + At_0 + Bt_0^2}\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)$$

$$(y - y_0)(1 + At_0 + Bt_0^2) = \frac{x^2 - x_0^2}{2} \qquad \boxed{\text{strujnice}}$$

1. Brzina je zadana izrazom $\vec{v} = (1 + At + Bt^2)\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$.
(a) Nađite jednadžbu strujnice koja u $t = t_0$ prolazi kroz točku (x_0, y_0).
(b) Nađite trajektoriju elementa fluida koji dolazi u točku (x_0, y_0) u $t = t_0$.
(c) Pokažite da je za $A = 0, B = 0$ (tj. stacionarno strujanje) strujnica jednaka trajektoriji.

(b) Element fluida prolazi kroz točku (x_0, y_0) u $t = t_0$, a u nekom trenutku t vrijedi:

$$x = x(x_0, y_0, t); \qquad y = y(x_0, y_0, t)$$

$$\frac{dx}{dt} = u = 1 + At + Bt^2; \qquad \frac{dy}{dt} = v = x$$

$$dx = (1 + At + Bt^2)dt \qquad \Big/ \int_{x_0,t_0}^{x,t}$$

$$\boxed{x - x_0 = (t - t_0) + A\frac{t^2 - t_0^2}{2} + B\frac{t^3 - t_0^3}{3}}$$

Iz izraza za komponentu brzine v, nađemo jednadžbu za y:

$$\frac{dy}{dt} = v = x$$

$$\frac{dy}{dt} = x_0 + (t - t_0) + A\frac{t^2 - t_0^2}{2} + B\frac{t^3 - t_0^3}{3}$$

$$dy = \left[x_0 + (t - t_0) + A\frac{t^2 - t_0^2}{2} + B\frac{t^3 - t_0^3}{3}\right]dt \qquad \Big/ \int_{y_0,t_0}^{y,t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y - y_0 = x_0(t - t_0) + \frac{t^2 - t_0^2}{2} - t_0(t - t_0) + \\ + \frac{A}{2}\left[\frac{t^3 - t_0^3}{3} - t_0^2(t - t_0)\right] + \frac{B}{3}\left[\frac{t^4 - t_0^4}{4} - t_0^3(t - t_0)\right] \end{aligned}}$$

Jednadžbe za x i y su parametarske jednadžbe trajektorije.

1. Brzina je zadana izrazom $\vec{v} = (1 + At + Bt^2)\vec{i} + x\vec{j}$.
(a) Nađite jednadžbu strujnice koja u $t = t_0$ prolazi kroz točku (x_0, y_0).
(b) Nađite trajektoriju elementa fluida koji dolazi u točku (x_0, y_0) u $t = t_0$.
(c) Pokažite da je za $A = 0, B = 0$ (tj. stacionarno strujanje) strujnica jednaka trajektoriji.

$$(y - y_0)(1 + At_0 + Bt_0^2) = \frac{x^2 - x_0^2}{2} \qquad \underline{\text{strujnice}}$$

(c) Za $A = B = 0$ vrijedi:

- Strujnica:

$$\boxed{y - y_0 = \frac{x^2 - x_0^2}{2}}$$

1. Brzina je zadana izrazom $\vec{v} = (1 + At + Bt^2)\vec{i} + x\vec{j}$.
(a) Nađite jednadžbu strujnice koja u $t = t_0$ prolazi kroz točku (x_0, y_0).
(b) Nađite trajektoriju elementa fluida koji dolazi u točku (x_0, y_0) u $t = t_0$.
(c) Pokažite da je za $A = 0, B = 0$ (tj. stacionarno strujanje) strujnica jednaka trajektoriji.

$$x - x_0 = (t - t_0) + A\frac{t^2 - t_0^2}{2} + B\frac{t^3 - t_0^3}{3}$$

$$y - y_0 = x_0(t - t_0) + \frac{t^2 - t_0^2}{2} - t_0(t - t_0) + \\ + \frac{A}{2}\left[\frac{t^3 - t_0^3}{3} - t_0^2(t - t_0)\right] + \frac{B}{3}\left[\frac{t^4 - t_0^4}{4} - t_0^3(t - t_0)\right]$$

<u>trajektorije</u>

Trajektorija za $A = B = 0$:

$$x - x_0 = t - t_0$$

$$y - y_0 = x_0(t - t_0) + \frac{t^2 - t_0^2}{2} - t_0(t - t_0)$$

$$y - y_0 = x_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)(t + t_0) - t_0(t - t_0)$$

$$y - y_0 = \mathrm{x}_0(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)(\mathrm{t} + \mathrm{t}_0) - \mathrm{t}_0(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{1}{2}(x - x_0)(2x_0 + t + t_0 - 2t_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)(2x_0 + x - x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)(x + x_0)$$

$$\boxed{y - y_0 = \frac{x^2 - x_0^2}{2}}$$

2. Dvodimenzionalno strujanje zadano je sa $\vec{v} = y\vec{i} - x\vec{j}$. Nađite jednadžbu strujnice koja prolazi kroz točku (1,0).

Rješenje:

Jednadžba strujnice: $\vec{v} \times d\vec{s} = 0$

$$udy - vdx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{x}{y}$$

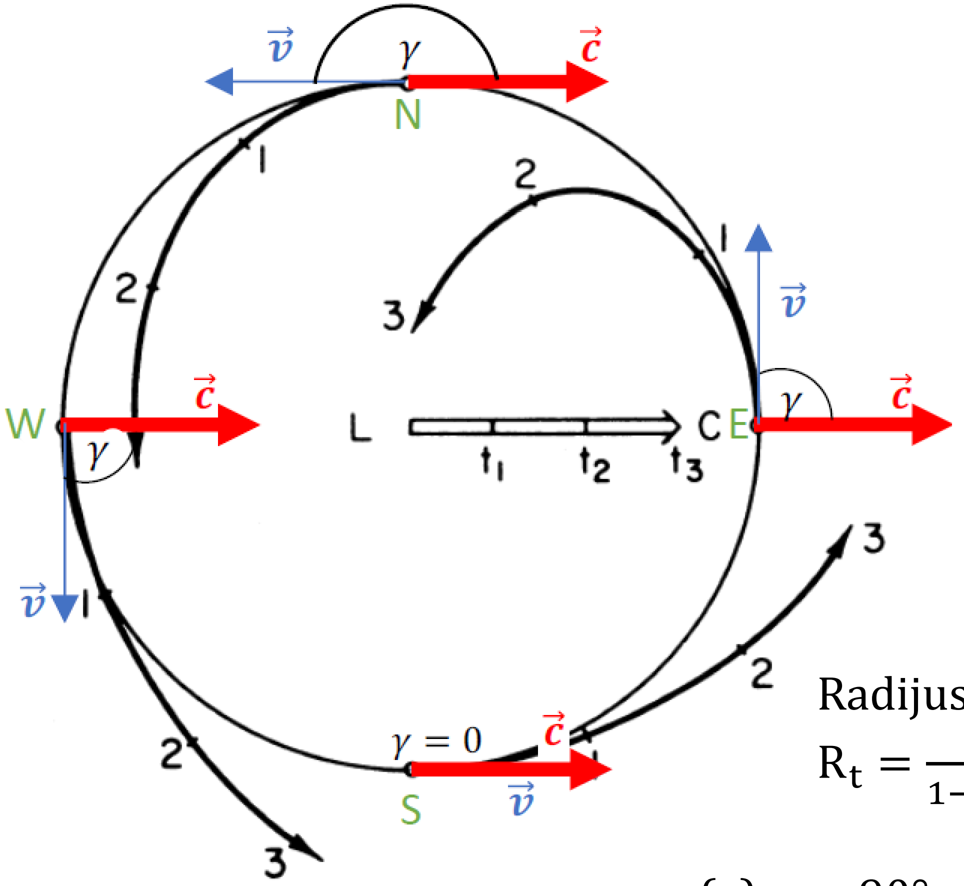
$$ydy = -xdx \qquad / \int$$

$$x^2 + y^2 = K, \qquad K = const.$$

Za točku $(1,0)$ slijedi da je $K = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$

3. Odredite radijus zakrivljenosti trajektorija česti zraka smještenih 500 km (a) istočno, (b) sjeverno, (c) južno i (d) zapadno od centra kružne ciklone. Ciklona se giba prema istoku brzinom 15 m s^{-1}. Pretpostavite da je strujanje unutar ciklone geostrofičko s jednolikom tangencijalnom brzinom vjetra od 15 m s^{-1}.

Rješenje:



$R = 500$ km

$c = 15$ m s^{-1} brzina gibanja sustava

$v_g = V = 15$ m s^{-1} brzina vjetra

$R_t = ?$

Budući da je geostrofičko strujanje stacionarno, strujnice=izobare.

Stoga je, $R_s = R = 500$ km. $\frac{V}{c} = 1$

Radijus zakrivljenosti trajektorije:

$$R_t = \frac{R_s}{1 - \frac{c}{V}\cos\gamma}$$

(a) $\gamma = 90° \rightarrow \cos\gamma = 0 \rightarrow R_t = 500$ km
(b) $\gamma = 180° \rightarrow \cos\gamma = -1 \rightarrow R_t = 250$ km
(c) $\gamma = 0° \rightarrow \cos\gamma = 1 \rightarrow R_t = \infty$
(d) $\gamma = 90° \rightarrow \cos\gamma = 0 \rightarrow R_t = 500$ km

4. Nađite brzine gradijentskog vjetra za česti zraka iz prethodnog zadatka koristeći dobivene vrijednosti za R_t. Usporedite te brzine s brzinama geostrofičkog vjetra, a vrijednost Coriolisovog parametra je $10^{-4}\ s^{-1}$.

Rješenje:

Izraz za gradijentski vjetar je:

u slučaju ciklone $+\sqrt{\ }$, $\frac{\partial p}{\partial n} < 0$

$$V_{grad} = -\frac{fR_t}{2} + \sqrt{\frac{f^2R_t^2}{4} - \frac{R_t}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$$

Izraz za geostrofički vjetar u PKS-u:

$$v_g = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \longrightarrow \frac{R_t}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = -fR_t v_g$$

Slijedi da je:

$$V_{grad} = -\frac{fR_t}{2} + \sqrt{\frac{f^2R_t^2}{4} + fR_t v_g},$$

pri čemu je $v_g = 15\ \mathrm{m\ s^{-1}}$.

(a) Za čest istočno od centra ciklone:

$R_t = 500\ \mathrm{km} \rightarrow V_{grad} = 12.1\ m\ s^{-1}$

(b) Za čest sjeverno od centra ciklone:

$R_t = 250\ \mathrm{km} \rightarrow V_{grad} = 10.5\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

(c) Za čest južno od centra ciklone:

$R_t = \infty \rightarrow V_{grad} = v_g$

(veza između gradijentskog i geostrofičkog vjetra u istoj točki: $v_g = \frac{V_{grad}^2}{fR_t} + V_{grad}$)

(d) Za čest zapadno od centra ciklone:

$R_t = 500\ \mathrm{km} \rightarrow V_{grad} = 12.1\ m\ s^{-1}$

Dodatni materijali

National Committe for Fluid Mechanics - vizualizacija strujanja:
https://youtu.be/nuQyKGuXJOs

Bilješke MIT (*Flow Visualization*):
https://web.mit.edu/hml/notes.html