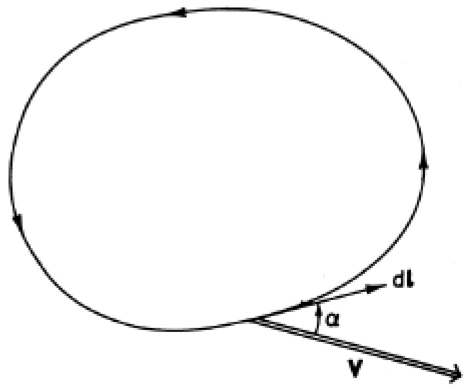
Cirkulacija

Vježbe iz Dinamičke meteorologije II

Cirkulacija

Definicija: Cirkulacija je krivuljni integral tangencijalne komponente brzine oko zatvorene putanje l.

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint |\vec{v}| \cos \alpha dl$$



- makro mjera rotacije fluida
- čest koja miruje ima cirkulaciju zbog rotacije Zemlje

Cirkulacija

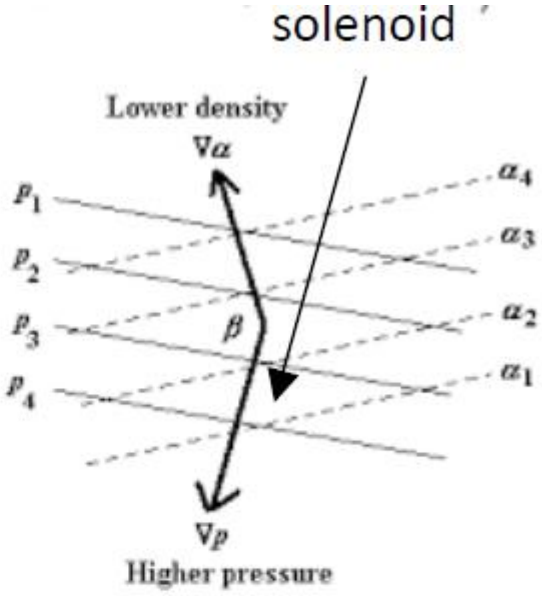
- dogovor za NH:

  $C < 0$ → anticiklonalna cirkulacija

  $C > 0$ → ciklonalna cirkulacija

- Bjerknessov cirkulacijski teorem

$$\frac{dC}{dt} = \oint \alpha(-\nabla p) \cdot d\vec{l} - 2\oint (\vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}$$



- promjena cirkulacije zbog prvog člana (uz primjenu Stokesovog teorema):

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_I = \oint \alpha(-\nabla p) \cdot d\vec{l} = \iint_A \nabla\alpha \times (-\nabla p) \cdot d\vec{A}$$

1. Promjena cirkulacije je veća što je više solenoida $\vec{S} = \nabla\alpha \times (-\nabla p)$ koji opisuju baroklinost atmosfere, tj. što je kut između izobarnih i izosternih ploha veći
2. Promjena cirkulacije je veća što je veća površina A
3. ∇p je najveći u vertikalnom smjeru → promjena cirkulacije je veća u vertikalnim ravninama

Cirkulacija

- Bjerknessov cirkulacijski teorem

$$\frac{dC}{dt} = \oint \alpha(-\nabla p) \cdot d\vec{l} - 2\oint (\vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}$$

- promjena cirkulacije zbog drugog člana:

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{II} = -\frac{d}{dt}(fA) = -A\frac{df}{dt} - f\frac{dA}{dt}$$

→ član $-A\frac{df}{dt}$ uključuje promjene Coriolisovog parametra zbog promjene geografske širine

→ član $-f\frac{dA}{dt}$ označava doprinos zbog promjena površine uslijed konvergencije ili divergencije

gibanje prema sjeveru	gibanje prema jugu	konvergencija (čest se skuplja)	divergencija (čest se širi)
$d\phi > 0, \quad df/dt > 0$	$d\phi < 0, \quad df/dt < 0$	$dA/dt < 0$	$dA/dt > 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$-A(df/dt) < 0$	$-A(df/dt) > 0$	$-f(dA/dt) > 0$	$-f(dA/dt) < 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{II} < 0$	$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{II} > 0$	$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{II} > 0$	$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{II} < 0$
razvija se anticiklonalna cirkulacija	ciklonalna cirkulacija	ciklonalna cirkulacija	anticiklonalna cirkulacija
$\Downarrow$		$\Downarrow$	$\Downarrow$
Coriolisova sila je veća na sjevernoj strani čestí pa se javlja anticiklonalni zakretni moment		npr. hlađenje podloge	npr. zagrijavanje podloge

Primjeri i zadatci

1. Čest zraka kružne baze čiji je radijus $r = 100\ km$ u početku miruje u odnosu na Zemlju tako da se središte baze nalazi na ekvatoru. Nađite srednju tangencijalnu brzinu zraka na udaljenosti r od središta baze česti ako se ona prenese na Sjeverni pol duž izobarne plohe tako da joj se površina ne mijenja.

2. Cilindrični stupac zraka radijusa 100 km počinje se gibati po izobarnoj plohi od $\phi_1 = 40°$ N do $\phi_2 = 80°$ N tako da se površina stupca ne mijenja. Izračunajte srednju obodnu brzinu česti kada stupac dođe do ϕ_2.

3. Izračunajte promjenu cirkulacije u jedinici vremena oko kvadrata čija je stranica duljine 1000 km. Temperatura raste prema istoku za 1 °C/200 km, a tlak raste prema sjeveru za 1 hPa/200 km. Tlak u središtu kvadrata iznosi $p_0 = 1000$ hPa.

4. Cilindrični stupac zraka u početnom trenutku miruje na $\phi = 30°$ N. Radijus stupca je $r = 100$ km. Kolika će biti srednja obodna brzina česti na rubu stupca ako on ekspandira tako da mu se radijus udvostruči?

5. Kružni disk radijusa r rotira kutnom brzinom Ω oko z-osi. Kolika je cirkulacija na rubu diska?

6. Koliku će srednju brzinu imati zrak jedan sat nakon uspostavljanja dnevne cirkulacije zbog postojanja izobarno-izosternih solenoida ako je zadano: $p_0 = 1000\ hPa, p_1 = 900\ hPa, \bar{T}_2 - \bar{T}_1 = 10℃, L = 20\ km$ i $h = 1\ km$.

7. Temperatura raste prema jugozapadu za 1.5 °C/100 km, a tlak raste prema sjeveru za 1 mb/100 km. Kolika je promjena cirkulacije u jedinici vremena oko kvadrata čija su stranice na pravcima sjever-jug, odnosno istok zapad, a duljina stranica je 1000 km. Tlak u središtu kvadrata iznosi $p_0 = 1000$ hPa.

8. Kolika je promjena cirkulacije u jedinici vremena oko kvadrata čija je stranica duljine 150 km, ako temperatura raste prema zapadu za 1 °C/100 km, a tlak raste prema sjeveru za 1 mb/100 km. Tlak u središtu kvadrata iznosi $p_0 = 1005$ hPa.

Rješenja

1. Čest zraka kružne baze čiji je radijus $r = 100\ km$ u početku miruje u odnosu na Zemlju tako da se središte baze nalazi na ekvatoru. Nađite srednju tangencijalnu brzinu zraka na udaljenosti r od središta baze česti ako se ona prenese na Sjeverni pol duž izobarne plohe tako da joj se površina ne mijenja.

Rješenje:

Bjerknessov cirkulacijski teorem:

$$\frac{dC}{dt} = \underbrace{\oint \alpha(-\nabla p) \cdot d\vec{l}}_{=0 \text{ jer je gibanje duž izobarne plohe}} \quad -\frac{d}{dt}(fA) = -A\frac{df}{dt}$$

$$\frac{dC}{dt} = -A\frac{df}{dt} \qquad \int_{t_1,ekvator}^{t_2,pol}$$

$$C_{pol} - C_{ekvator} = -A(f_{pol} - f_{ekvator}), \quad A = r^2\pi, \quad f = 2\Omega \sin\phi$$

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} \rightarrow v_{ekvator} = 0 \rightarrow C_{ekvator} = 0$$

$$C_{pol} = -A\left[2\Omega(\sin 90^\circ - \sin 0^\circ)\right] = -r^2\pi 2\Omega \quad \rightarrow C < 0 \rightarrow \text{anticiklonalna cirkulacija}$$

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2\pi r v_{obodna} \quad \Rightarrow$$

$$-2\pi r^2\Omega = 2\pi r v_{obodna} \quad \rightarrow |v_{obodna}| = |-\Omega r| = 7.29\ m\ s^{-1}$$

2. Cilindrični stupac zraka radijusa 100 km počinje se gibati po izobarnoj plohi od $\phi_1 = 40°$ N do $\phi_2 = 80°$ N tako da se površina stupca ne mijenja. Izračunajte srednju obodnu brzinu česti kada stupac dođe do ϕ_2.

Rješenje:

$$\frac{dC}{dt} = \underbrace{\oint \alpha(-\nabla p) \cdot d\vec{l}}_{=0} - \frac{d}{dt}(fA)$$

$$\frac{dC}{dt} = -A\frac{df}{dt} \qquad \Big/ \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$C_2 - C_1 = -A(f_2 - f_1) = -2A\Omega(\sin\phi_2 - \sin\phi_1)$$

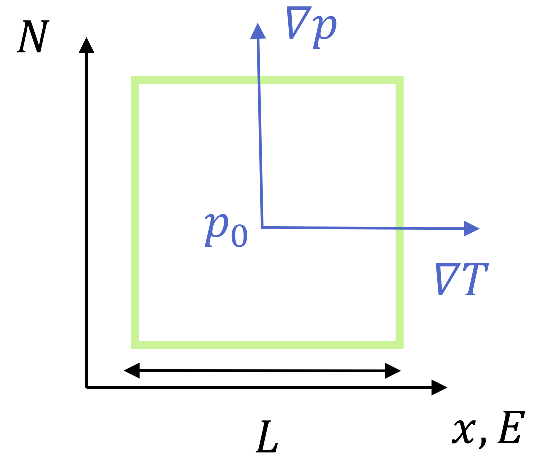
$$C_2 - C_1 = -A(f_2 - f_1) = -2r^2\pi\Omega(\sin\phi_2 - \sin\phi_1)$$ → $C < 0$ → anticiklonalna cirkulacija

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2\pi r v_{obodna} = C_2 \quad \Rightarrow$$

$$v_{obodna} = \frac{C_2}{2r\pi} = \frac{-2r^2\pi(\sin\phi_2 - \sin\phi_1)}{2r\pi} = -r\Omega(\sin\phi_2 - \sin\phi_1)$$

$$|v_{obodna}| = 2.49\ m\ s^{-1}$$

3. Izračunajte promjenu cirkulacije u jedinici vremena oko kvadrata čija je stranica duljine 1000 km. Temperatura raste prema istoku za 1 °C/200 km, a tlak raste prema sjeveru za 1 hPa/200 km. Tlak u središtu kvadrata iznosi $p_0 = 1000$ hPa.



Rješenje:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{\imath} = \frac{1\,^\circ\mathrm{C}}{200\ \mathrm{km}}\vec{\imath}$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} = \frac{1\ \mathrm{hPa}}{200\ \mathrm{km}}\vec{\jmath}$$

$$\frac{dC}{dt} = \oint \alpha(-\nabla p)\cdot d\vec{l} - \underbrace{\frac{d}{dt}(fA)}_{=0}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A \nabla\times(\alpha\nabla p)\cdot d\vec{A} = -\iint_A (\nabla\alpha\times\nabla p)\cdot d\vec{A}$$

$$\alpha(\nabla\times\nabla p) = \alpha\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\right] = \alpha\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}\vec{k} - \frac{\partial^2 p}{\partial x\partial z}\vec{\jmath} - \frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}\vec{k} + \frac{\partial^2 p}{\partial y\partial z}\vec{\imath} + \frac{\partial^2 p}{\partial x\partial z}\vec{\jmath} - \frac{\partial^2 p}{\partial y\partial z}\vec{\imath}\right) = 0$$

$p\alpha = RT$ →

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A \left[\nabla\left(\frac{RT}{p}\right)\times\nabla p\right]\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A \left[\underbrace{\frac{R}{p}}_{pretp.\,p=p_0}\nabla T\times\nabla p\right]\cdot d\vec{A} - \iint_A \left[RT\left(-\frac{1}{p^2}\right)\nabla p\times\nabla p\right]\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{p_0}\iint_A (\nabla T\times\nabla p)\cdot d\vec{A} = -\frac{R}{p_0}\iint_A \left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{\imath}\times\frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath}\right)\cdot dx\,dy\,\vec{k}$$

3. Izračunajte promjenu cirkulacije u jedinici vremena oko kvadrata čija je stranica duljine 1000 km. Temperatura raste prema istoku za 1 °C/200 km, a tlak raste prema sjeveru za 1 hPa/200 km. Tlak u središtu kvadrata iznosi $p_0 = 1000$ hPa.

Rješenje:

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{p_0}\iint_A (\nabla T \times \nabla p) \cdot d\vec{A} = -\frac{R}{p_0}\iint_A \left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} \times \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}\right) \cdot dxdy\vec{k}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{p_0}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\iint_A dxdy = -\frac{R}{p_0}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}A$$

$$\boxed{\frac{dC}{dt} = -7.2\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}}$$

$$\left[\frac{dC}{dt}\right] = J\,kg^{-1}K^{-1}Pa^{-1} \cdot K\,m^{-1} \cdot Pa\,m^{-1} \cdot m^2 = J\,kg^{-1} = kg\,m^2\,s^{-2}kg^{-1} = m^2\,s^{-2}$$

4. Cilindrični stupac zraka u početnom trenutku miruje na $\phi = 30°$ N. Radijus stupca je $r = 100$ km. Kolika će biti srednja obodna brzina čestí na rubu stupca ako on ekspandira tako da mu se radijus udvostruči?

Rješenje:

$$\frac{dC}{dt} = \oint \underbrace{\alpha(-\nabla p)}_{=0} \cdot d\vec{l} - \frac{d}{dt}(fA)$$

$$\frac{dC}{dt} = -2\Omega\frac{d}{dt}(A\sin\phi) = -2\Omega\sin\phi\frac{dA}{dt} \qquad / \int_{t_1}^{t_2}$$

$$C_2 - C_1 = -2\Omega\sin\phi(A_2 - A_1) = -2\Omega\sin\phi\left[r_2^2 - r_1^2\right]\pi$$

$$C_2 = -2\Omega\sin\phi\left[(2r)^2\pi - r^2\pi\right] = -2\Omega\sin\phi\left[4r^2\pi - r^2\pi\right]$$

$$C_2 = -6r^2\pi\Omega\sin\phi$$ → anticiklonalna cirkulacija

$$C = \oint \vec{v}\cdot d\vec{s} = 2\pi r v_{obodna}$$

$$C_2 = 2r_2\pi v_{obodna} = 4r\pi v_{obodna}$$

$$4r\pi v_{obodna} = -6r^2\pi\Omega\sin\phi$$

$$|v_{obodna}| = 5.5\ m\ s^{-1}$$

5. Kružni disk radijusa r rotira kutnom brzinom Ω oko z-osi. Kolika je cirkulacija na rubu diska?

Rješenje:

Brzina na rubu diska:

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

Cirkulacija:

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Za male promjene pomaka $d\vec{s}$ vrijedi: $d\vec{s} \parallel \vec{v}$

Magnituda brzine na rubu diska je:

$$|\vec{v}| = \Omega r$$

$$C = \oint (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot d\vec{s} = \oint \Omega r \, ds = 2\pi r \Omega r = 2r^2 \pi \Omega$$

Slijedi da je za rotaciju čvrstog tijela:

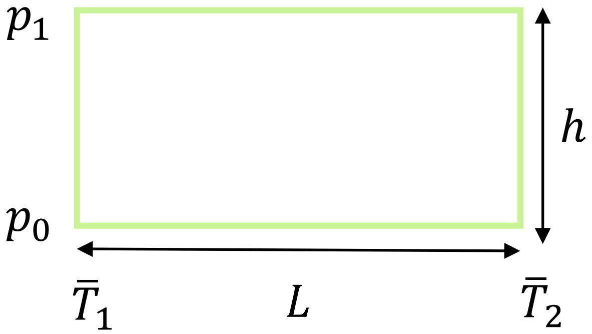
$$\frac{C}{r^2 \pi} = 2\Omega$$

gdje je $r^2\pi$ površina koju zatvara krivulja koju točka opisuje rotacijom.

6. Koliku će srednju brzinu imati zrak jedan sat nakon uspostavljanja dnevne cirkulacije zbog postojanja izobarno-izosternih solenoida ako je: $p_0 = 1000\ hPa, p_1 = 900\ hPa, \bar{T}_2 - \bar{T}_1 = 10°\text{C}, L = 20\ km$ i $h = 1\ km$.

Rješenje:

$$\frac{dC}{dt} = \oint \alpha(-\nabla p) \cdot d\vec{l} - \underbrace{\frac{d}{dt}(fA)}_{=0} = -\oint \alpha\, dp$$



$$\frac{dC}{dt} = -\oint \frac{RT}{p} dp = -R \oint T\, d(\ln p) \qquad \leftarrow \quad p\alpha = RT$$

$$\frac{dC}{dt} = -R\left[\overline{T}_2 \ln \frac{p_1}{p_0} + \overline{T}_1 \ln \frac{p_0}{p_1}\right] = R \ln \frac{p_0}{p_1}(\overline{T}_2 - \overline{T}_1)$$

$$dC = R(\overline{T}_2 - \overline{T}_1) \ln \frac{p_0}{p_1} dt \qquad \Big/ \int_0^C, \int_{t_1}^{t_2}$$

$$C = R(\overline{T}_2 - \overline{T}_1) \ln \frac{p_0}{p_1} \Delta t$$

Iz definicije cirkulacije:

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \overline{v}(2h + 2L) = 2\overline{v}(h + L)$$

Dobivamo velike brzine jer smo zanemarili trenje. U stvarnosti, kako brzina vjetra raste, trenje usporava njegovu stopu ubrzanja, a temperaturna advekcija smanjuje temperaturni kontrast.

$$\overline{v} = \frac{C}{2(L+h)} = \frac{R(\overline{T}_2 - \overline{T}_1) \ln \frac{p_0}{p_1} \Delta t}{2(L+h)} = 25.9 \text{ m s}^{-1}$$

7. Temperatura raste prema jugozapadu za 1.5 °C/100 km, a tlak raste prema sjeveru za 1 mb/100 km. Kolika je promjena cirkulacije u jedinici vremena oko kvadrata čija su stranice na pravcima sjever-jug, odnosno istok zapad, a duljina stranica je 1000 km. Tlak u središtu kvadrata iznosi $p_0 = 1000$ hPa.

Rješenje:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}$$

$$\nabla T = -\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial T}{\partial x}\vec{j}$$

$$|\nabla T| = \frac{1.5\ \mathrm{K}}{100\ \mathrm{km}};\ |\nabla p| = \frac{1\ \mathrm{mb}}{100\ \mathrm{km}}$$

$$L = 1000\ \mathrm{km};\ p_0 = 1000\ \mathrm{hPa}$$

$$\frac{dC}{dt} = \oint \alpha(-\nabla p)\cdot d\vec{l} - \underbrace{\frac{d}{dt}(fA)}_{=0} =$$

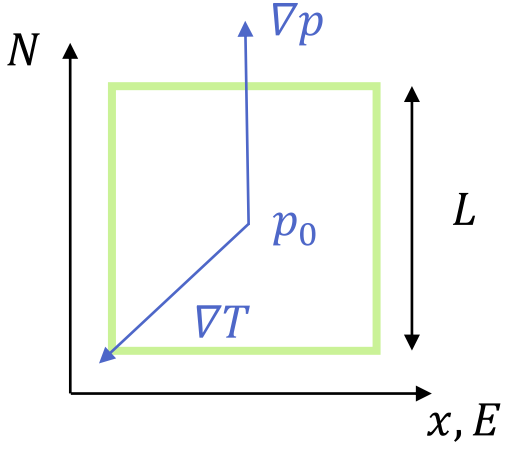
$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A \nabla \times (\alpha \nabla p)\cdot d\vec{A} = -\iint_A (\nabla\alpha \times \nabla p)\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A \frac{R}{p_0}(\nabla T \times \nabla p)\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{p_0}\iint_A \left[\left(-|\nabla T|\cos 45^\circ\vec{i} - |\nabla T|\sin 45^\circ\vec{j}\right) \times \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}\right]\cdot dxdy\vec{k}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{p_0}\left(-|\nabla T|\cos 45^\circ\frac{\partial p}{\partial y}\right)L^2$$

$$\boxed{\frac{dC}{dt} = 30.4\ \mathrm{m^2\ s^{-2}}}$$



8. Kolika je promjena cirkulacije u jedinici vremena oko kvadrata čija je stranica duljine 150 km, ako temperatura raste prema zapadu za 1 °C/100 km, a tlak raste prema sjeveru za 1 mb/100 km. Tlak u središtu kvadrata iznosi $p_0 = 1005$ hPa.

Rješenje:

$$\nabla T = -\frac{\partial T}{\partial x}\vec{\imath} = -\frac{1°\mathrm{C}}{100\ \mathrm{km}}\vec{\imath}$$

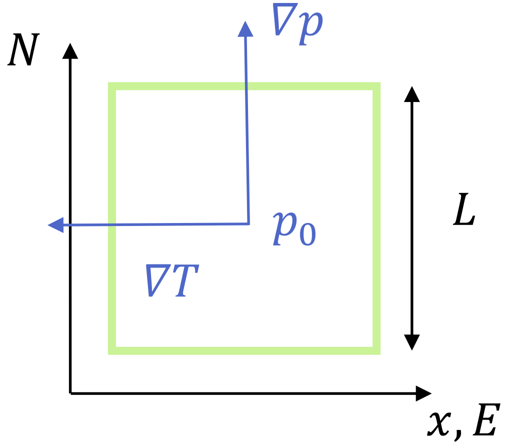
$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} = \frac{1\ \mathrm{mb}}{100\ \mathrm{km}}j$$

$$\frac{dC}{dt} = \oint \alpha(-\nabla p)\cdot d\vec{l} - \underbrace{\frac{d}{dt}(fA)}_{=0} =$$

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A (\nabla\alpha \times \nabla p)\cdot d\vec{A} = -\iint_A \left[\nabla(\frac{RT}{p}) \times \nabla p\right]\cdot d\vec{A}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\iint_A \left[\frac{R}{p}\nabla T \times \nabla p - \frac{RT}{p^2}\nabla p \times \nabla p\right]\cdot d\vec{A}$$

Uz pretpostavku: $p = p_0$:



$$\frac{dC}{dt} = -\frac{R}{p_0}\iint_A (\nabla T \times \nabla p)\cdot d\vec{A} = -\frac{R}{p_0}\iint_A \left(-\frac{\partial T}{\partial x}\vec{\imath} \times \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath}\right)\cdot dxdy\vec{k}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{R}{p_0}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\iint_A dxdy = -\frac{R}{p_0}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}L^2$$

$$\boxed{\frac{dC}{dt} = 64.25\ \mathrm{m^2\ s^{-2}}}$$