Atmosferske oscilacije

Vježbe iz Dinamičke meteorologije II

Metoda linearnih perturbacija

- Rastav polja na osnovno (srednje) stanje i perturbacije

- Zonalni vjetar

$$u(x,t) = \bar{u} + u'(x,t)$$

gdje je $\bar{u}$ je prostorno-vremenski srednjak, u' je perturbacija

Pretpostavke metode:

1. Varijable osnovnog stanja moraju zadovoljavati osnovne jednadžbe
2. Perturbacije su male i njihovi umnošci su zanemarivi

- metoda linearnih perturbacija svodi jednadžbe gibanja na linearne diferencijalne jednadžbe
  → rješenje sinusnog tj. eksponencijalnog oblika

Helmholtzov teorem

- Rastav polja brzine na bezdivergentni i irotacioni dio, tj. rastav brzine na vrtložnu i divergentnu komponentu

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{v}_{\text{vrtložno}}}_{\text{bezdivergentno } \vec{v}_\psi} + \underbrace{\vec{v}_{\text{divergentno}}}_{\text{irotaciono } \vec{v}_\chi} = \vec{v}_\psi + \vec{v}_\chi,$$

gdje je ψ strujna funkcija, tj. potencijal vrtloženja, a χ je potencijal brzine, tj. potencijal divergencije. Prema tome, vektor brzine vjetra je:

$$\vec{v} = \vec{k} \times \nabla\psi + \nabla\chi$$

Hamiltonov operator ili nabla:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla U = gradU$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = div\vec{v}$$

Laplaceov operator:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \quad \rightarrow \quad \Delta U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Rossbyjevi valovi

- Valoviti poremećaji u horizontalnoj zračnoj struji koji nastaju zbog rotacije Zemlje
- Posljedica očuvanja potencijalne vrtložnosti → mogu nastati u atmosferi i oceanu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta + f}{h}\right) = 0$$

- Okidač su veliki planinski lanci (npr. Himalaja ili Stjenjak)

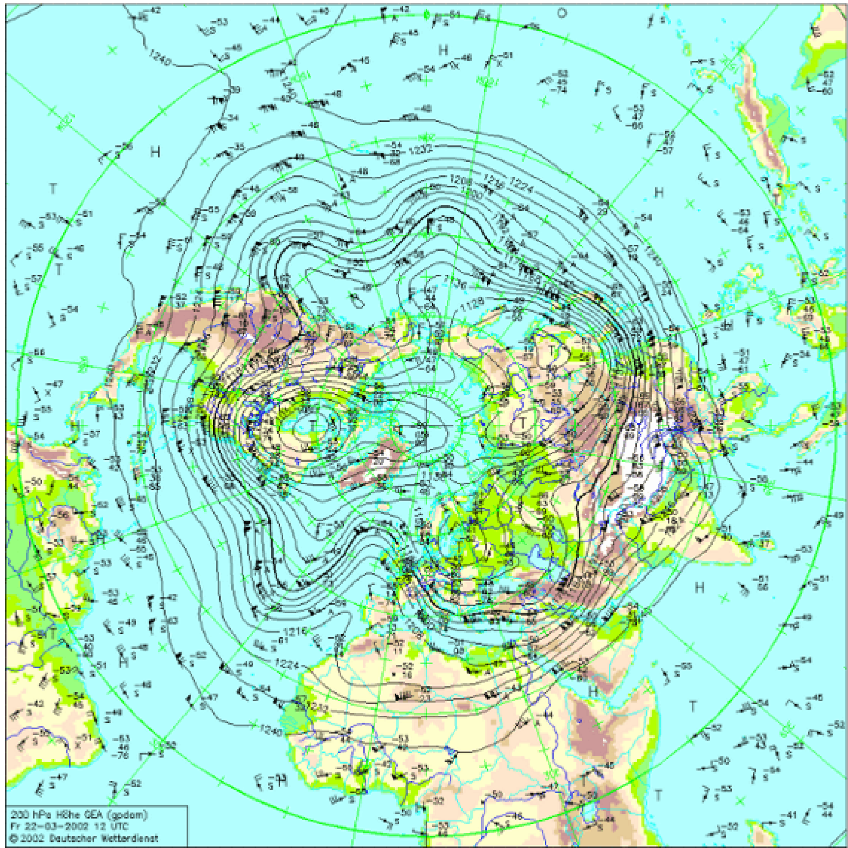
→ meandriranje zapadne zonalne struje

- Srednja i gornja troposfera
- Planetarni valovi → valna duljina ~ 5000 - 10000 km
- Rossbyjev parametar → mjera promjene Coriolisovog
- parametra duž meridijana

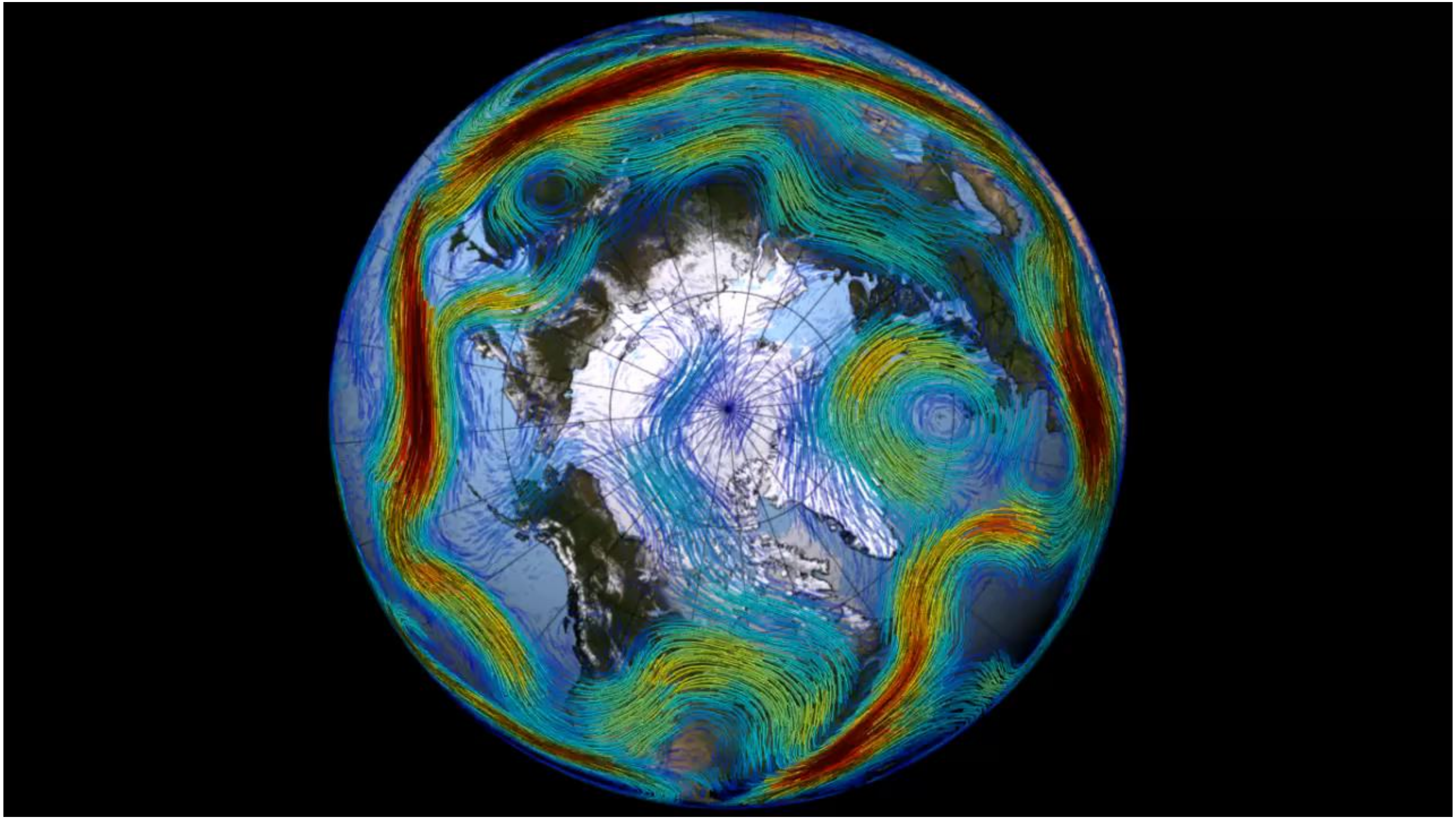
$$\beta = \frac{df}{dy} = \frac{2\Omega\cos\phi}{R_z}$$

- https://earth.nullschool.net

Izvor: https://jadran.gfz.hr/pojmovnik_r.html#rossby_v



Rossbyjevi valovi



Izvor: https://oceanservice.noaa.gov/facts/Rossby-wave.html

Primjeri i zadatci

1. Ako je ψ strujna funkcija, a χ potencijal brzine $\vec{v} = \vec{k} \times \nabla\psi + \nabla\chi$ pokažite da je vertikalna komponenta vrtložnosti $\zeta = \nabla^2\psi$, a divergencija brzine $D = \nabla^2\chi$.

2. Pokažite da se kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti za bezdivergentni dio brzine može prikazati pomoću strujne funkcije ψ kao $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi + f) - (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial\omega}{\partial p} = 0$. Pretpostavite da je fluid nestlačiv. Izvedite i geostrofičku jednadžbu vrtložnosti.

3. Gibanje pratimo u Kartezijevom koordinatnom sustavu u kojem je x-os u smjeru azimuta, a y-os je orijentirana prema osi rotacije. Ako sustav rotira kutnom brzinom Ω, a dubina fluida je linearna funkcija od y oblika
$\overline{H}(y) = H_0 - \gamma y$, pokažite da je:
(a) perturbirana jednadžba kontinuiteta za nestlačivi fluid $H_0\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) - \gamma v' = 0$

(b) perturbirana kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti $\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0$ gdje je $\beta = 2\Omega\gamma/H_0$.

Pretpostavite da je polje strujanja geostrofičko osim u članu divergencije.

(c) Kolika je fazna brzina Rossbyjevih valova ako je valna duljina 100 cm u x te y smjeru, $\Omega = 1\ s^{-1}$, $H_0 = 20$ cm, $\gamma = 0.05$?

4. Nađite fazne brzinu Rossbyjevih valova za homogeni nestlačivi ocean dubine h. Pretpostavite da ocean miruje i da su pertrubacije funkcije od x i t: $\mathrm{u} = \mathrm{u}'(x,t), \mathrm{v} = \mathrm{v}'(\mathrm{x},\mathrm{t}), \quad h = \overline{H} + h'(x,t)$, gdje je H srednja dubina oceana. Zadano je $\overline{H} = 4\ km, L = 10000\ km, \phi = 45°$ N. Pokažite da je perturbirana jednadžba vrtložnosti:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{f^2}{g\overline{H}}\right)h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0.$$

5. Nađite faznu i grupnu brzinu Rossbyjevih valova za geostrofičku atmosferu čija je brzina 20° geografske duljine u 24 h, a valna duljina je 60° geografske duljine. Valovi se nalaze na 45° N.

Rješenja

1. Ako je ψ strujna funkcija, a χ potencijal brzine $\vec{v} = \vec{k} \times \nabla\psi + \nabla\chi$ pokažite da je vertikalna komponenta vrtložnosti $\zeta = \nabla^2\psi$, a divergencija brzine $D = \nabla^2\chi$.

Rješenje:

Definicija relativne vrtložnosti:

$$\zeta = \vec{k} \cdot \nabla \times \vec{v}$$

Uvrstimo zadanu brzinu:

$$\zeta = \vec{k} \cdot \left[\nabla \times \left(\vec{k} \times \nabla\psi + \nabla\chi\right)\right] = \vec{k} \cdot \left[\nabla \times \left(\vec{k} \times \nabla\psi\right) + \underbrace{\nabla \times \nabla\chi}_{=0}\right]$$

$$\zeta = \vec{k} \cdot \left[\nabla \times \left(\vec{k} \times \nabla\psi\right)\right]$$

Podsjetimo se diferencijalnih pravila vektorskog množenja:

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$$

$$\nabla \times \left(\vec{k} \times \nabla\psi\right) = \vec{k}\underbrace{(\nabla \cdot \nabla\psi)}_{=\nabla^2\psi} - \underbrace{\nabla\psi(\nabla \cdot \vec{k})}_{=0} - (\vec{k} \cdot \nabla)\nabla\psi + \underbrace{(\nabla\psi \cdot \nabla)\vec{k}}_{=0}$$

1. Ako je ψ strujna funkcija, a χ potencijal brzine $\vec{v} = \vec{k} \times \nabla\psi + \nabla\chi$ pokažite da je vertikalna komponenta vrtložnosti $\zeta = \nabla^2\psi$, a divergencija brzine $D = \nabla^2\chi$.

$$\nabla \times \left(\vec{k} \times \nabla\psi\right) = \vec{k}(\nabla^2\psi) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j}\right)}_{=0\ (z=\text{const.})} = \vec{k}(\nabla\cdot\nabla\psi)$$

Slijedi da je relativna vrtložnost (vertikalna komponenta vrtložnosti):

$$\zeta = \vec{k}\cdot\vec{k}(\nabla^2\psi) = \nabla^2\psi$$

Definicija divergencije:

$$D = \nabla\cdot\vec{v}$$

Uvrstimo zadanu brzinu:

$$D = \nabla\cdot\left(\vec{k} \times \nabla\psi + \nabla\chi\right) = \nabla\cdot(\vec{k}\times\nabla\psi) + \nabla\cdot(\nabla\chi)$$

$\rightarrow$ $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

$$D = \nabla\psi\cdot(\nabla\times\vec{k}) - \vec{k}\cdot(\nabla\times\nabla\psi) + \nabla^2\chi$$

$$D = \nabla^2\chi$$

2. Pokažite da se kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti za bezdivergentni dio brzine može prikazati pomoću strujne funkcije ψ kao $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi + f) - (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial\omega}{\partial p} = 0$. Pretpostavite da je fluid nestlačiv. Izvedite i geostrofičku jednadžbu vrtložnosti.

Rješenje:

Kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti:

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f)\nabla_H \cdot \vec{v}$$

Pretpostavka da je fluid nestlačiv:

$$\nabla_H \cdot \vec{v} = -\frac{\partial\omega}{\partial p}$$ jednadžba kontinuiteta u (x,y,p) sustavu

Vektor brzine je kao i u prošlom zadatku

$$\vec{v} = \vec{k} \times \nabla\psi + \underbrace{\nabla\chi}_{=0},$$

$\nabla\chi = 0$ jer gledamo samo bezdivergentni dio brzine
U prošlom zadatku smo pokazali $\zeta = \nabla^2\psi$

2. Pokažite da se kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti za bezdivergentni dio brzine može prikazati pomoću strujne funkcije ψ kao $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi + f) - (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial\omega}{\partial p} = 0$. Pretpostavite da je fluid nestlačiv. Izvedite i geostrofičku jednadžbu vrtložnosti.

Uvrstimo izraz za ζ u kvazigeostrofičku jednadžbu vrtložnosti: $\zeta = \nabla^2\psi \rightarrow \frac{d}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f)\nabla_H \cdot \vec{v}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi + f) + \vec{v}\cdot\nabla(\nabla^2\psi + f) = -(\nabla^2\psi + f)(-\frac{\partial\omega}{\partial p})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{k}\times\nabla\psi)\cdot\nabla(\nabla^2\psi + f) = (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial\omega}{\partial p}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \left(-\vec{i}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \vec{j}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\cdot\left[\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi + f) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi + f) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\psi + f)\right] = (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial\omega}{\partial p}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi + f) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi + f) - (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial\omega}{\partial p} = 0$$

2. Pokažite da se kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti za bezdivergentni dio brzine može prikazati pomoću strujne funkcije ψ kao $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi + f) - (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$. Pretpostavite da je fluid nestlačiv. Izvedite i geostrofičku jednadžbu vrtložnosti.

Definicija Jacobiana:

$$J(A,B) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}$$

Sada jednadžbu vrložnosti možemo napisati:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi + f) - (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

Pokazali smo da se kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti za bezdivergentni dio brzine može prikazati pomoću strujne funkcije ψ.

2. Pokažite da se kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti za bezdivergentni dio brzine može prikazati pomoću strujne funkcije ψ kao $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi + f) - (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$. Pretpostavite da je fluid nestlačiv. Izvedite i geostrofičku jednadžbu vrtložnosti.

Izvod izraza za geostrofičku jednadžbu vrtložnosti: $\frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0$

$$\zeta = \nabla^2\psi, \qquad \vec{v} = \vec{k} \times \nabla\psi$$

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = \frac{\partial}{\partial t}(\zeta + f) + \vec{v} \cdot \nabla(\zeta + f) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\vec{k} \times \nabla\psi\right) \cdot \nabla(\nabla^2\psi + f) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \left(-\vec{\imath}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \vec{\jmath}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \cdot \left[\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi + f) + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi + f) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\psi + f)\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi + f) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\psi + f) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi + f) = 0$$

2. Pokažite da se kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti za bezdivergentni dio brzine može prikazati pomoću strujne funkcije ψ kao $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi + f) - (\nabla^2\psi + f)\frac{\partial\omega}{\partial p} = 0$. Pretpostavite da je fluid nestlačiv. Izvedite i geostrofičku jednadžbu vrtložnosti.

Veza između strujne funkcije i geopotencijala:

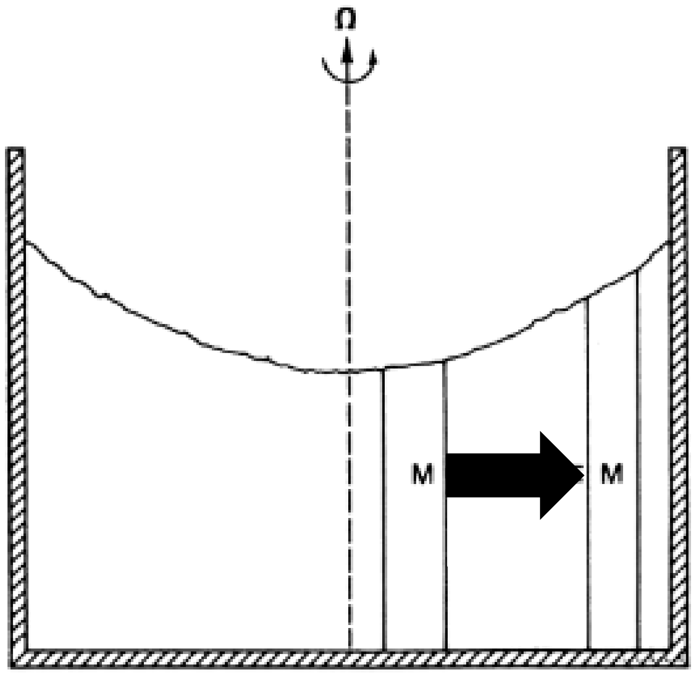
$$\vec{v}_g = \vec{k} \times \nabla\psi, \qquad \vec{v}_g = \frac{1}{f_0}\vec{k} \times \nabla\Phi$$

$$\psi = \frac{\Phi}{f_0} \qquad \rightarrow \qquad \nabla^2\psi = \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi) + \frac{1}{f_0}J(\Phi, \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f) = 0 \qquad / \cdot f_0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\Phi) + J\left(\Phi, \frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) = 0$$

3. Očuvanje potencijalne vrtložnosti (Rossby) $\frac{\zeta+f}{h} = const.$ pokazuje kako je u barotropnom fluidu promjena dubine fluida dinamički analogna promjeni Coriolisovog parametra. Uzmimo za primjer rotirajući cilindar pun vode. Ravnotežni oblik slobodne površine vode pri rotaciji je parabola, a određuje je ravnoteža između radijalnog gradijenta tlaka i centrifugalne sile. Ako se stupac vode kreće radijalno (slika) mora se rastezati. Pritom se zbog očuvanja potencijalne vrtložnosti povećava vertikalna komponenta relativne vrtložnosti kako bi omjer $\frac{\zeta+f}{h}$ ostao konstantan. Isto vrijedi za stupac fluida na rotirajućoj sferi koji se giba prema ekvatoru, a da mu se pritom ne mijenja dubina. U tom slučaju bi se ζ trebala povećavati kako bi se „nadoknadilo" smanjenje Coriolisovog parametara.



izvor: Holton (v. literaturu)

Dakle, dinamički ekvivalent Rossbyjevih valova može se proizvesti u rotirajućem cilindru ako dubina fluida ovisi o radijalnoj koordinati. Kako bi izračunali faznu brzinu valova za ovaj ekvivalentni *β-efekt*, pretpostavimo da se promatrani tok fluida nalazi između čvrstih stijenki kružnog oblika dovoljno udaljenih od osi rotacije kako bi mogli zanemariti članove zakrivljenosti strujanja (*curvature terms*).

3. Gibanje pratimo u Kartezijevom koordinatnom sustavu u kojem je x-os u smjeru azimuta, a y-os je orijentirana prema osi rotacije. Ako sustav rotira kutnom brzinom Ω, a dubina fluida je linearna funkcija od y: $\overline{H}(y) = H_0 - \gamma y$, pokažite da je:

(a) perturbirana jednadžba kontinuiteta za nestlačivi fluid $H_0\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) - \gamma v' = 0$

Rješenje:

(a) Jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0$$

Nestlačivi homogeni fluid: $\rho = const.$, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$$u = u'(x, y, t), \qquad v = v'(x, y, t), \qquad h = \overline{H} + h'(x, y, t) = H_0 - \gamma y + h'(x, y, t)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{\partial w'}{\partial z} \quad \backslash \int_0^{\overline{H}} \partial z$$

$$\overline{H}\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) = -w(\overline{H}) + w(0)$$

$$\overline{H} = H_0 - \gamma y \approx H_0 \ \text{(jer } \gamma y \ll H_0\text{)}$$

$$H_0\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) = -\frac{d\overline{H}}{dt}$$

3. Gibanje pratimo u Kartezijevom koordinatnom sustavu u kojem je x-os u smjeru azimuta, a y-os je orijentirana prema osi rotacije. Ako sustav rotira kutnom brzinom Ω, a dubina fluida je linearna funkcija od y: $\overline{H}(y) = H_0 - \gamma y$, pokažite da je:

(a) perturbirana jednadžba kontinuiteta za nestlačivi fluid $H_0\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) - \gamma v' = 0$

$$H_0\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) = -\frac{d\overline{H}}{dt}$$

$$H_0\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} + u'\frac{\partial \overline{H}}{\partial x} + v'\frac{\partial \overline{H}}{\partial y} + w'\frac{\partial \overline{H}}{\partial z}\right)$$

$$\overline{H}(y) = H_0 - \gamma y$$

$$H_0\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) = \gamma v'$$

$$H_0\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) - \gamma v' = 0$$

3. Gibanje pratimo u Kartezijevom koordinatnom sustavu u kojem je x-os u smjeru azimuta, a y-os je orijentirana prema osi rotacije. Ako sustav rotira kutnom brzinom Ω, a dubina fluida je linearna funkcija od y: $\overline{H}(y) = H_0 - \gamma y$, pokažite da je:

(b) perturbirana kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti $\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \beta \frac{\partial h'}{\partial x} = 0$ gdje je $\beta = 2\Omega\gamma/H_0$.

Pretpostavite da je polje strujanja geostrofičko osim u članu divergencije.

(b) Za plitki fluid očuvanje potencijalne vrtložnosti u kvazigeostrofičkoj atmosferi:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\zeta + f}{\overline{H}}\Big) = 0$$

$$\frac{1}{\overline{H}}\frac{d}{dt}(\zeta + f) - (\zeta + f)\frac{1}{\overline{H}^2}\frac{d\overline{H}}{dt} = 0 \qquad \Big/ \cdot \overline{H}^2$$

$$\overline{H}\frac{d}{dt}(\zeta + f) - \underbrace{(\zeta + f)}_{\zeta << f}\frac{d\overline{H}}{dt} = 0$$

$$\overline{H}(\frac{d\zeta}{dt} + \frac{df}{dt}) - f\frac{d\overline{H}}{dt} = 0 \qquad (*)$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \zeta'$$

3. Gibanje pratimo u Kartezijevom koordinatnom sustavu u kojem je x-os u smjeru azimuta, a y-os je orijentirana prema osi rotacije. Ako sustav rotira kutnom brzinom Ω, a dubina fluida je linearna funkcija od y: $\overline{H}(y) = H_0 - \gamma y$, pokažite da je:

(b) perturbirana kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti $\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0$ gdje je $\beta = 2\Omega\gamma/H_0$. Pretpostavite da je polje strujanja geostrofičko osim u članu divergencije.

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\zeta = \frac{\partial\zeta'}{\partial t} + \underbrace{u'\frac{\partial\zeta'}{\partial x} + v'\frac{\partial\zeta'}{\partial y}}_{=0 \text{ produkt perturbacija}}$$

Sada uvrštavamo u jedn. (*) izraz za $\overline{H}$ i ζ':

$$\overline{H}\left(\frac{d\zeta}{dt} + \frac{df}{dt}\right) - f\frac{d\overline{H}}{dt} = 0 \quad (*)$$

$$(H_0 - \gamma y)\frac{\partial\zeta'}{\partial t} - f\left(\frac{d(H_0 - \gamma y)}{dt}\right) = 0$$

$$\gamma y << H_0 \qquad \frac{d(H_0 - \gamma y)}{dt} = v'\frac{\partial(H_0 - \gamma y)}{\partial y} = -v'\gamma$$

Pa slijedi da je:

$$H_0\left(\frac{\partial\zeta'}{\partial t}\right) + f\gamma v' = 0 \qquad \Big/ : H_0$$

$$\frac{\partial\zeta'}{\partial t} + \frac{f\gamma}{H_0}v' = 0 \qquad (**)$$

3. Gibanje pratimo u Kartezijevom koordinatnom sustavu u kojem je x-os u smjeru azimuta, a y-os je orijentirana prema osi rotacije. Ako sustav rotira kutnom brzinom Ω, a dubina fluida je linearna funkcija od y: $\bar{H}(y) = H_0 - \gamma y$, pokažite da je:

(b) perturbirana kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti $\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0$ gdje je $\beta = 2\Omega\gamma/H_0$. Pretpostavite da je polje strujanja geostrofičko osim u članu divergencije.

Relacije za komponente geostrofičkog vjetra $\vec{v}_g = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla_p(gz)$ → $u' = -\frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial y}, \qquad v' = \frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial x}$

Izraz za perturbaciju relativne vrtložnosti: $\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{g}{f}\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{g}{f}\frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} = \frac{g}{f}\nabla^2 h'$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \frac{f\gamma}{H_0}v' = 0 \quad (**)$$

$$\frac{g}{f}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \frac{f\gamma}{H_0}\frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \qquad / \cdot \frac{f}{g}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \frac{f\gamma}{H_0}\frac{\partial h'}{\partial x} = 0$$

$$f = 2\Omega, \qquad \frac{2\Omega\gamma}{H_0} = \beta$$

Slijedi da je perturbirana kvazigeostrofička jednadžba vrtložnosti:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0$$

3. Gibanje pratimo u Kartezijevom koordinatnom sustavu u kojem je x-os u smjeru azimuta, a y-os je orijentirana prema osi rotacije. Ako sustav rotira kutnom brzinom Ω, a dubina fluida je linearna funkcija od y: $\bar{H}(y) = H_0 - \gamma y$, pokažite da je:
(c) Kolika je fazna brzina Rossbyjevih valova ako je valna duljina 100 cm u x te y smjeru, $\Omega = 1\ s^{-1}$, $H_0 = 20$ cm, $\gamma = 0.05$.

(c) Da bismo našli faznu brzinu Rossbyjevih valova, pretpostavimo da je perturbacija h' oblika:

$$h' = h_0 e^{i(kx+my-\omega t)}$$

pri čemu je k valni broj u x smjeru, m valni broj u y smjeru, a ω je frekvencija $\omega = k_c \cdot c$, a $k_c = \sqrt{k^2 + m^2}$ za 2-dim slučaj.

Članovi u jedn.

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \beta \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \qquad (***)$$

su sljedeći:

$$\frac{\partial h'}{\partial x} = ikh', \quad \frac{\partial h'}{\partial y} = imh', \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = -k^2 h', \quad \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} = -m^2 h'$$

$$\nabla^2 h' = -h'(k^2 + m^2) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' = -(k^2 + m^2)(-i\omega)h' = i\omega(k^2 + m^2)h'$$

3. Gibanje pratimo u Kartezijevom koordinatnom sustavu u kojem je x-os u smjeru azimuta, a y-os je orijentirana prema osi rotacije. Ako sustav rotira kutnom brzinom Ω, a dubina fluida je linearna funkcija od y: $\overline{H}(y) = H_0 - \gamma y$, pokažite da je:
(c) Kolika je fazna brzina Rossbyjevih valova ako je valna duljina 100 cm u x te y smjeru, $\Omega = 1\ s^{-1}$, $H_0 = 20$ cm, $\gamma = 0.05$?

Uvrštavamo u jedn. $(***)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \qquad (***)$$

$$i\omega(k^2+m^2)h' + \beta i k h' = 0$$

$$\omega(k^2+m^2) + \beta k = 0$$

$\omega = ck_c,\ k_c = \sqrt{k^2+m^2}$ → $$k_c c(k^2+m^2) + \beta k = 0$$

$$(\sqrt{k^2+m^2})c(k^2+m^2) + \beta k = 0 \quad \Rightarrow c = -\frac{\beta k}{(k^2+m^2)^{3/2}}$$

Za naš slučaj: $\lambda_x = \lambda_y = 1$ m, $k = m = 2\pi/\lambda = 2\pi$ m^{-1}

$$c = -\frac{\beta k}{(2k^2)^{3/2}} = -\frac{\beta}{2^{3/2}k^2} = -\frac{2\Omega\gamma}{H_0}\frac{1}{2^{3/2}k^2}$$

$$c = -0.45 \text{ cm s}^{-1}$$

4. Nađite fazne brzinu Rossbyjevih valova za homogeni nestlačivi ocean dubine h. Pretpostavite da ocean miruje i da su pertrubacije funkcije od x i t: $\mathrm{u} = \mathrm{u}'(x,t), \mathrm{v} = \mathrm{v}'(\mathrm{x},\mathrm{t})$, $h = \overline{H} + h'(x,t)$, gdje je $\overline{H}$ srednja dubina oceana. Pokažite da je perturbirana jednadžba vrtložnosti: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{f^2}{g\overline{H}}\right)h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0$.

Zadano je $\overline{H} = 4\ km, L = 10000\ km, \varphi = 45°$ N.

Rješenje:

Za plitki fluid vrijedi očuvanje potencijalne vrtložnosti:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta + f}{h}\right) = 0$$

$$\frac{1}{h}\frac{d}{dt}(\zeta + f) - \frac{\zeta + f}{h^2}\frac{dh}{dt} = 0 \qquad \Big/ \cdot h^2$$

$$h\frac{d}{dt}(\zeta + f) - (\zeta + f)\frac{dh}{dt} = 0$$

$$h\left(\frac{d\zeta}{dt} + \frac{df}{dt}\right) - (\zeta + f)\frac{dh}{dt} = 0 \qquad (*)$$

Promjena Coriolisovog parametra u vremenu:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = \beta v = \beta v' \text{ jer je } v = v'$$

4. Nađite fazne brzinu Rossbyjevih valova za homogeni nestlačivi ocean dubine h. Pretpostavite da ocean miruje i da su pertrubacije funkcije od x i t: $u = u'(x,t), v = v'(x,t)$, $h = \overline{H} + h'(x,t)$, gdje je H srednja dubina oceana. Pokažite da je perturbirana jednadžba vrtložnosti: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{f^2}{gH}\right)h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0.$

Zadano je $\overline{H} = 4\ km, L = 10000\ km, \phi = 45°$ N.

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x} = \zeta'$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta'}{dt} = \frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\zeta' = \frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \underbrace{u'\frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v'\frac{\partial \zeta'}{\partial y}}_{=0 \text{ produkt perturbacija}} = \frac{\partial \zeta'}{\partial t}$$

Promjena dubine oceana u vremenu:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} + w\frac{\partial h}{\partial z}, \qquad h = \overline{H} + h'(x,t)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h'}{\partial t} + u'\frac{\partial h'}{\partial x} = \frac{\partial h'}{\partial t}$$

4. Nađite fazne brzinu Rossbyjevih valova za homogeni nestlačivi ocean dubine h. Pretpostavite da ocean miruje i da su pertrubacije funkcije od x i t: $u = u'(x,t), v = v'(x,t), \quad h = \overline{H} + h'(x,t)$, gdje je H srednja dubina oceana. Pokažite da je perturbirana jednadžba vrtložnosti: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{f^2}{g\overline{H}}\right)h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0.$

Zadano je $\overline{H} = 4\ km, L = 10000\ km, \phi = 45°$ N.

$$h\left(\frac{d\zeta}{dt} + \frac{df}{dt}\right) - (\zeta + f)\frac{dh}{dt} = 0 \qquad (*)$$

Uvrštavamo u jedn. (*):

$$(\overline{H} + h')\left(\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \beta v'\right) - (\zeta' + f)\frac{\partial h'}{\partial t} = 0$$

Produkte perturbacija zanemarujemo pa slijedi:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \beta v' - \frac{f}{\overline{H}}\frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \qquad (**)$$

Ako pretpostavimo da vrijedi geostrofička aproksimacija, imamo:

$$u' = -\frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial y} = 0, \qquad v' = \frac{g}{f}\frac{\partial h'}{\partial x}$$

$$\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{g}{f}\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{g}{f}\frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} = \frac{g}{f}\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}$$

4. Nađite fazne brzinu Rossbyjevih valova za homogeni nestlačivi ocean dubine h. Pretpostavite da ocean miruje i da su pertrubacije funkcije od x i t: $u = u'(x,t), v = v(x,t), \quad h = \overline{H} + h'(x,t)$, gdje je H srednja dubina oceana. Pokažite da je perturbirana jednadžba vrtložnosti: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{f^2}{g\overline{H}}\right)h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0.$

Zadano je $\overline{H} = 4\ km, L = 10000\ km, \phi = 45°$ N.

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \beta v' - \frac{f}{\overline{H}}\frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \qquad (**)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g}{f}\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}\right) + \frac{\beta g}{f}\frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{f}{\overline{H}}\frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \quad /\cdot\frac{f}{g}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{f^2}{g\overline{H}}\right)h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (***)$$

Pretpostavimo da su odstupanja od srednje dubine mora valnog oblika:

$$h' = Ae^{ik(x-ct)}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial x} = ikh', \qquad \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = -k^2 h', \qquad \frac{\partial h'}{\partial t} = -ikch'$$

$$\nabla^2 h' = -k^2 h' \;\rightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 h') = ick^3 h'$$

4. Nađite fazne brzinu Rossbyjevih valova za homogeni nestlačivi ocean dubine h. Pretpostavite da ocean miruje i da su pertrubacije funkcije od x i t: $\mathrm{u} = \mathrm{u}'(x,t), \mathrm{v} = \mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{t}), \quad h = \overline{H} + h'(x,t)$, gdje je H srednja dubina oceana. Pokažite da je perturbirana jednadžba vrtložnosti: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{f^2}{g\overline{H}}\right)h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0$.

Zadano je $\overline{H} = 4\ km, L = 10000\ km, \phi = 45°$ N.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{f^2}{g\overline{H}}\right)h' + \beta\frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (***)$$

$$ick^3h' + \frac{f^2}{g\overline{H}}ickh' + \beta ikh' = 0 \quad /\cdot\frac{1}{ikh'}$$

Izraz za faznu brzinu

$$c\left(k^2 + \frac{f^2}{g\overline{H}}\right) + \beta = 0 \quad \rightarrow c = -\frac{\beta}{k^2 + \frac{f^2}{g\overline{H}}}$$

Promjena Coriolisovog parametra s geografskom širinom:

$$\beta = \frac{df}{dy} = \frac{d(2\Omega\sin\varphi)}{Rd\varphi} = \frac{2\Omega\cos\varphi}{R}$$

gdje je $\Omega = 7.29\cdot 10^{-5}\ s^{-1}$, a $R = 6371$ km.

Fazna brzina

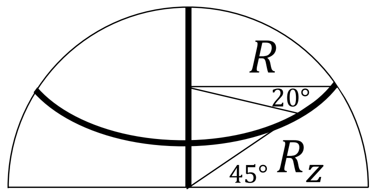
$$c = -\frac{2\Omega\cos\varphi}{R\left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 + \frac{(2\Omega\sin\varphi)^2}{g\overline{H}}\right]} = -24.3\ m\ s^{-1}$$

5. Nađite faznu i grupnu brzinu Rossbyjevih valova za geostrofičku atmosferu čija je brzina 20° geografske duljine u 24 h, a valna duljina je 60° geografske duljine. Valovi se nalaze na 45° N.

Rješenje:

Geostrofička atmosfera:

$$u = \bar{u} + u'(x,t), \qquad v = v'(x,t), \qquad \Phi = \bar{\Phi} + \Phi'(x,t)$$



Brzina osnovnog vjetra:

$$\overline{u} = -\frac{1}{f}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial y}, \quad \text{uz} \quad \frac{\partial\overline{u}}{\partial y} = 0,$$

tj. zonalna struja se ne mijenja u y smjeru (s geografiskom širinom). Perturbacije polja brzine:

$$u' = -\frac{1}{f}\frac{\partial\Phi'}{\partial y}, \qquad v' = \frac{1}{f}\frac{\partial\Phi'}{\partial x}$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} = \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{1}{f}\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x^2} = \zeta'$$

5. Nađite faznu i grupnu brzinu Rossbyjevih valova za geostrofičku atmosferu čija je brzina 20° geografske duljine u 24 h, a valna duljina je 60° geografske duljine. Valovi se nalaze na 45° N.

Jednadžba apsolutne vrtložnosti za geostrofičku atmosferu:

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\zeta}{dt} + \frac{df}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + (\overline{u} + u')\frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v'\frac{\partial \zeta'}{\partial y} + w'\frac{\partial \zeta'}{\partial z} + u'\frac{\partial f}{\partial x} + v'\frac{\partial f}{\partial y} + w'\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \zeta'}{\partial x} + \beta v' = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2}\right) + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2}\right) + \beta\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0 \qquad \Big/ \cdot f$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2}\right) + \beta\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0 \qquad (*)$$

5. Nađite faznu i grupnu brzinu Rossbyjevih valova za geostrofičku atmosferu čija je brzina 20° geografske duljine u 24 h, a valna duljina je 60° geografske duljine. Valovi se nalaze na 45° N.

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2}\right) + \beta\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0 \qquad (*)$$

Pretpostavimo da su perturbacije geopotencijala valnog oblika i da se gibaju u x smjeru:

$$\Phi' = \Phi_0 e^{ik(x-ct)}$$

Pa imamo:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = ik\Phi', \quad \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} = -k^2\Phi', \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -ikc\Phi'$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} = ick^3\Phi', \quad \frac{\partial^3 \Phi'}{\partial x^3} = -ik^3\Phi'$$

Uvrstimo derivacije u jedn. $(*)$:

$$ik^3 c\Phi' + \overline{u}(-ik^3)\Phi' + \beta ik\Phi' = 0 \qquad \Big/ \frac{1}{ik\Phi'}$$

$$k^2(c-\overline{u}) + \beta = 0 \qquad \rightarrow \qquad c = \overline{u} - \frac{\beta}{k^2} \quad \text{fazna brzina}$$

5. Nađite faznu i grupnu brzinu Rossbyjevih valova za geostrofičku atmosferu čija je brzina 20° geografske duljine u 24 h, a valna duljina je 60° geografske duljine. Valovi se nalaze na 45° N.

$$k^2(c - \overline{u}) + \beta = 0 \qquad \rightarrow \qquad c = \overline{u} - \frac{\beta}{k^2} \quad \text{fazna brzina}$$

Grupna brzina:

$$c_g = \frac{\partial \nu}{\partial k} = \frac{\partial (kc)}{\partial k} = \frac{\partial (k\overline{u} - \beta/k)}{\partial k}$$

$$c_g = \overline{u} + \frac{\beta}{k^2}$$

Uvjeti zadatka su:

$$\overline{u} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{R\Delta\alpha}{\delta t} = \frac{20^\circ}{24\ \text{h}} = \frac{20 \cdot 6371 \cdot 10^3\ \text{m} \cdot \cos 45^\circ}{24 \cdot 3600\ \text{s}} \frac{\pi}{180}$$

$$\frac{\beta}{k^2} = \frac{1}{k^2}\frac{df}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2}\frac{2\Omega\cos\varphi}{R} = \frac{L^2\Omega\cos\varphi}{2\pi^2 R}$$

5. Nađite faznu i grupnu brzinu Rossbyjevih valova za geostrofičku atmosferu čija je brzina 20° geografske duljine u 24 h, a valna duljina je 60° geografske duljine. Valovi se nalaze na 45° N.

- Valna duljina: $L = 60° = 60 \cdot \frac{\pi}{180} R \cos\varphi = \frac{\pi}{3} R \cos\varphi \quad \rightarrow \quad \frac{\beta}{k^2} = 9.12\ m\ s^{-1}$

- Fazna brzina:

$$\mathrm{c} = 9.08\ m\ s^{-1} = \frac{9.97°}{24\ h}$$

- Grupna brzina:

$$\mathrm{c_g} = 27.32\ m\ s^{-1} = \frac{30.02°}{24\ h}$$

Literatura

- James R. Holton, *An introduction to dynamic meteorology,* Elsevier Academic Press, Burlington, MA, pp. 213-227, 2004.