LINEARNA ALGEBRA I PRIMJENE - ZADACI

DAMIR BAKIĆ

Sadržaj

1. Vektorski prostori

1. Neka je G neprazan skup i $* : G \times G \to G$ binarna operacija na G. Uređen par $(G, *)$ se zove grupa ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

(1) $a * (b * c) = (a * b) * c$, $\forall a, b, c \in G$
(2) postoji $e \in G$ takav da je $a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$
(3) za svaki $a \in G$ postoji $a^{-1} \in G$ takav da vrijedi $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Ako još vrijedi i $a * b = b * a$, $\forall a, b \in G$, kažemo da je $(G, *)$ komutativna ili Abelova grupa. Pokažite da su $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ Abelove grupe.

Napomena. Uočimo da je grupa matematička struktura koja je implicitno prisutna u definicijama polja i vektorskog prostora. Na primjer, svojstva operacija zbrajanja i množenja realnih brojeva navedena u *napomeni* **??** (koja čine definiciju polja) sada se mogu konciznije izreći na sljedeći način:

(1) $(\mathbb{R}, +)$ je Abelova grupa
(2) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa
(3) $a(b + c) = ab + ac$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Identična svojstva imaju i operacije zbrajanja i množenja u $\mathbb{C}$ i u bilo kojem polju $\mathbb{F}$. Uočimo također da prva četiri uvjeta iz definicije vektorskog prostora zapravo znače da je $(V, +)$ Abelova grupa. Često se zato i kaže da je $(V, +)$ aditivna Abelova grupa vektorskog prostora $(V, +, \cdot)$.

2. Neka je S neprazan skup. Označimo s $B(S)$ skup svih bijektivnih preslikavanja sa S u S. Dokažite da je skup $B(S)$ uz kompoziciju preslikavanja kao binarnu operaciju grupa. Uočite da grupa $(B(S), \circ)$ nije komutativna čim skup S ima više od dva elementa.

3. Upotpunite dokaz *propozicije* **??**.

4. Za koje je vrijednosti parametra t skup $\{(1, 2, 1, -1), (1, 1, 4, 0), (1, t, 7, 1)\}$ linearno nezavisan u prostoru $\mathbb{R}^4$?

5. Je li skup $\{(1, i, 1 + i), (i, 0, i), (1, 1, 1)\}$ baza prostora $\mathbb{C}^3$?

6. Neka je t_0 realan broj. Pokažite da je skup $\{(t - t_0)^i : i = 0, 1, \ldots, n\}$ baza prostora P_n.

7. U $\mathbb{R}^n$ zadani su vektori

$$a_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), a_2 = (2, 2, 0, \ldots, 0), \ldots, a_n = (n, n, n, \ldots, n).$$

Pokažite da je skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ baza za $\mathbb{R}^n$.

8. Neka je zadan realan broj $a \neq 0$. Dokažite da je skup

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{-a, a\}\}$$

sustav izvodnica za $\mathbb{R}^n$.

9. Pokažite da je skup $\{(1, 1, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 7), (6, 2, 13)\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^3$ pa ga reducirajte do baze prostora $\mathbb{R}^3$.

10. Nadopunite skup $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ do neke baze prostora M_2.

11. Nadopunite skup $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}$ do neke baze prostora $M_2(\mathbb{C})$.

12. Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, baza za vektorski prostor V. Odredite nužan i dovoljan uvjet na vektor $b \in V$ da bi i skup $\{b, a_2, \ldots, a_n\}$ bio baza za V.

13. Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, baza za vektorski prostor V. Odredite nužan i dovoljan uvjet na $b \in V$ da bi i skup $\{a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ bio baza za V.

14. Neka je $\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ baza vektorskog prostora V te neka je $b_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} b_i$. Uočite da je $\{b_1, b_2, \ldots b_n, b_{n+1}\}$ linearno zavisan sustav izvodnica za V. Pokažite da svaki vektor x iz V dopušta jedinstven prikaz u obliku $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i b_i$ pri čemu je $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$.

15. Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ baza prostora V te neka je $v \in V$. Odredite nužan i dovoljan uvjet na vektor v da bi i skup $\{a_1 + v, a_2 + v, \ldots, a_n + v\}$ bio baza za V.

16. Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, baza za vektorski prostor $\mathbb{R}^n$. Uočite da vektori a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, leže i u prostoru $\mathbb{C}^n$. Pokažite da je skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ baza i za $\mathbb{C}^n$.

17. Pokažite da prostor $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nije konačnodimenzionalan.

18. Pokažite da je skup aritmetičkih nizova $X = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_{k+1} - x_k = x_2 - x_1, \forall k \in \mathbb{N}\}$ potprostor prostora $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dokažite da je X konačnodimenzionalan i odredite mu neku bazu i dimenziju.

19. Dokažite da je $\mathbb{C}^n$ i realan vektorski prostor uz uobičajene operacije zbrajanja i množenja (isključivo) realnim skalarima. Pokažite da dimenzija tako shvaćenog vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$ iznosi $2n$.

20. Neka su u vektorskom prostoru V dani konačni skupovi $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$. Dokažite da je $[A] = [B]$ ako i samo ako vrijedi

$$a_i \in [B],\ \forall i = 1, \ldots, r \text{ i } b_j \in [A],\ \forall j = 1, \ldots, s.$$

21. U prostoru $\mathbb{R}^3$ dani su vektori $a_1 = (1, 3, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, $b_1 = (-1, 0, -1)$ i $b_2 = (-1, -1, -1)$. Pokažite da vrijedi $[\{a_1, a_2\}] = [\{b_1, b_2\}]$.

22. Neka je L potprostor od V, pri čemu je $0 < \dim L = k < n = \dim V$. Pokažite da postoji baza prostora V čiji niti jedan element ne leži u L.

23. Dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^3$ i odredite mu neku bazu i dimenziju.

24. Pokažite da je skup $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 : 2a - b - c = 0, a - b + 2c - d = 0 \right\}$ potprostor od M_2 i odredite mu neku bazu i dimenziju.

25. Dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^n$ i odredite mu neku bazu i dimenziju.

26. Dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = x_1 - x_n\}$ potprostor od $\mathbb{R}^n$ i odredite mu neku bazu i dimenziju.

27. Odredite po jedan direktan komplement svakom od potprostora iz prethodna četiri zadatka.

28. Neka su L i M međusobno različiti potprostori prostora V, te neka vrijedi $\dim L = \dim M = 3$, $\dim V = 4$. Dokažite da je tada $\dim (L \cap M) = 2$.

29. U realnom vektorskom prostoru P_4 polinoma čiji stupanj nije veći od 4 promotrimo podskupove

$$L = \{f \in P_4 : f(2) = 0\}, \quad \text{i} \quad M = \{g \in P_4 : g(-2) = 0\}.$$

Pokažite da su to potprostori i odredite im po jednu bazu. Nadalje, pokažite da se svaki polinom $p \in P_4$ može prikazati u obliku $p = f + g$, pri čemu je $f \in L$ i $g \in M$.

30. U vektorskom prostoru P_3 polinoma s realnim koeficijentima čiji stupanj je manji ili jednak 3 zadani su potprostori

$$L = \{p \in P_3 : p(1) = 0\}, \quad M = \{p \in P_3 : p(2) = 0\}.$$

Odredite $\dim L$, $\dim M$ i $\dim (L \cap M)$.

Riješite isti zadatak u prostoru P_n, $n \in \mathbb{N}$.

31. Neka je $X = \left\{ T \in M_2 : T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} T \right\}$. Pokažite da je X potprostor od M_2 i odredite mu neki direktni komplement.

32. Neka su L i M potprostori prostora V i neka vrijedi $\dim L = 4$, $\dim M = 2$, $\dim V = 5$. Dokažite: ili je $M \subseteq L$, ili je $L + M = V$.

33. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka su L i M njegovi potprostori. Dokažite da je $\dim L = \dim M$ ako i samo ako postoji potprostor K od V koji je direktan komplement i za L i za M.

34. Neka je V vektorski prostor dimenzije 3. Pokažite da u V postoji beskonačno mnogo potprostora dimenzije 2.

35. Neka je V vektorski prostor dimenzije $n \geq 2$. Pokažite da u V postoji beskonačno mnogo potprostora dimenzije k, gdje je $0 < k < n$.

36. Neka su L i M potprostori prostora V i neka su $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ i $\{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ baze od L, odnosno M. Neka je baza $\{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ numerirana tako da je skup $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ baza za $L + M$. Uočimo da je $k \leq s$ i, prema *teoremu* **??**, $\dim (L \cap M) = s - k$. Nadalje, vektori $b_{k+1}, \ldots, b_s$ leže u $L + M$, pa se svaki od njih može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze B. Neka je

$$b_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} a_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ij} b_i, \ \forall j = k+1, k+2, \ldots, s.$$

Označimo $c_j := \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} a_i$, $j = k+1, k+2, \ldots, s$. Dokažite da je tada skup $\{c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_s\}$ baza za $L \cap M$.

37. U prostoru $\mathbb{R}^3$ zadani su potprostori L i M svojim bazama $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, odnosno $b_1 = (1, 0, 2)$, $b_2 = (1, -1, 2)$. Odredite bazu potprostora $L \cap M$.

38. U prostoru realnih polinoma P_3 zadani su potprostori

$$M = \{p \in P_3 : p(1) = p(2) = 0\}, \ L = \{p(t) = c_0 + c_1 t + c_3 t^3 : c_0, c_1, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Odredite po jednu bazu za $M + L$ i $M \cap L$.

39. Provjerite da je množenje skalarom u kvocijentnom prostoru dobro definirano (tj. da definicija ne ovisi o izboru predstavnika klasa/linearnih mnogostrukosti).

40. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Na Kartezijevom produktu $V \times W$ definiramo zbrajanje s $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ i množenje skalarima iz $\mathbb{F}$ formulom $\alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w)$. Dokažite da je uz ove operacije i $V \times$W vektorski prostor. Nadalje, ako su V i W konačnodimenzionalni, dokažite da je $\dim V \times W = \dim V + \dim W$.

41. Nađite polinom p najnižeg mogućeg stupnja takav da vrijedi $p(-1) = p(1) = 5$ i $p(-2) = p(2) = 10$.

2. Matrice

1. Dokažite tvrdnje (1), (2) i (3) iz *teorema* **??**.

2. Za $A \in M_n$ definiramo $A^0 = I$, $A^1 = A$ i, induktivno, $A^{k+1} = A \cdot A^k$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi $A^k A^l = A^{k+l}$ i $(A^k)^l = A^{kl}$, za sve $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Dokažite da je $M = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : AB = BA\}$ potprostor od $M_2(\mathbb{R})$ i odredite mu jednu bazu i dimenziju.

4. Odredite sve matrice iz M_n koje komutiraju sa svakom matricom $A \in M_n$. (Skup koji se traži se može zapisati kao $\{T \in M_n : AT = TA, \forall A \in M_n\}$, a zove se centar algebre M_n.)

5. Pokažite da je produkt dviju gornjetrokutastih matrica također gornjetrokutasta matrica.

6. Pokažite da je inverz regularne gornjtrokutaste (donjotrokutaste) matrice također gornjotrokutasta (donjotrokutasta) matrica.

7. Neka su A i B ulančane matrice. Dokažite da je $(AB)^t = B^t A^t$.

8. Neka je $A \in M_n$ regularna matrica. Dokažite da je tada i A^t regularna matrica i da vrijedi $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

9. Neka je $A \in M_n$ simetrična regularna matrica. Dokažite da je i matrica A^{-1} simetrična.

10. Neka je $A \in M_n$ antisimetrična regularna matrica. Je li i matrica A^{-1} antisimetrična?

11. Trag kvadratne matrice je preslikavanje $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ definirano s $\mathrm{tr}([a_{ij}]) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Pokažite da vrijedi $\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{tr}(A) + \beta \mathrm{tr}(B)$ za sve skalare α i β i sve kvadratne matrice A i B.

12. Dokažite da za sve $A, B \in M_n$ vrijedi $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

13. Neka je $X = \{A \in M_n : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Pokažite da je X potprostor od M_n i odredite mu jednu bazu i dimenziju.

14. Pokažite da ne postoje matrice $A, B \in M_n$ sa svojstvom $AB - BA = I$.

15. Neka je $U \in M_n$ gornjotrokutasta matrica. Pokažite da postoje dijagonalna matrica $D \in M_n$ i gornjotrokutasta matrica U' čiji su svi dijagonalni koeficijenti jednaki 1, takve da vrijedi $U = DU'$.

16. Za $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{C})$ definira se hermitski adjungirana matrica $A^* = [b_{ij}] \in M_{nm}$ s $b_{ij} = \overline{a_{ji}}, \forall i, j$ (gdje je $\overline{a_{ji}}$ kompleksno konjugiran broj broju a_{ji}). Dokažite da za ulančane kompleksne matrice A i B vrijedi $(AB)^* = B^* A^*$.

17. Pokažite da za svaki n iz $\mathbb{N}$ skup A_n svih parnih permutacija od n elemenata uz kompoziciju kao binarnu operaciju, čini grupu. (Grupa A_n se zove alternirajuća podgrupa od S_n.) Nadalje, dokažite da A_n ima $\frac{1}{2}n!$ elemenata.

18. Kompletirajte dokaz *propozicije* **??**.

19. Kompletirajte dokaz *korolara* **??**.

20. Izračunajte $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

21. Neka je $A \in M_3$ regularna matrica i neka je $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte $A(\widetilde{ABA})A$.

22. Pokažite da je adjunkta gornjetrokutaste matrice također gornjetrokutasta.

23. Pokažite da je adjunkta dijagonalne matrice također dijagonalna.

24. Neka je $A \in M_n$ singularna matrica. Dokažite da je tada i $\widetilde{A}$ singularna.

25. Neka je $A \in M_n$. Izračunajte $\det \widetilde{A}$ u ovisnosti o $\det A$.

26. Neka je $A \in M_n$ regularna matrica. Izračunajte $\widetilde{\widetilde{A}}$.

27. Neka je $SL(n, \mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : \det A = 1\}$. Pokažite da je množenje binarna operacija na skupu $SL(n, \mathbb{F})$ i da je $(SL(n, \mathbb{F}), \cdot)$ grupa (koja se zove specijalna linearna grupa reda n nad poljem $\mathbb{F}$).

28. Pokažite pomoću determinante da je matrica $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ regularna i odredite joj inverz koristeći formulu iz *teorema* **??**.

29. Za $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$ vrijedi $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$. Provjerite! (Ovo je Vandermondeova determinanta reda n.)

30. Izračunajte inverz matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

31. Izračunajte inverz matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \ldots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

32. Izračunajte $\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_n \\ 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

33. Odredite $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

34. Izračunajte $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$.

35. Odredite inverz matrice $I - J \in M_n$ gdje je $J \in M_n$ matrica koja na svim mjestima ima jedinice.

36. Neka su $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, D \in M_n$. Dokažite da je tada

$$\det \begin{pmatrix} DA_{11} & DA_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det D \cdot \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

37. Provjerite eksplicitno sve tvrdnje iz dokaza *teorema* **??**.

38. Odredite rang matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

39. Ovisno o parametru t, odredite rang matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & t & 1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 & -8 \\ -2 & 1 & 5 & 2t \\ 1 & -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$.

40. U prostoru $\mathbb{R}^4$ zadani su vektori $a_1 = (1,2,1,2)$, $a_2 = (1,1,-1,2)$, $a_3 = (0,-2,1,1)$ i $a_4 = (4,-3,1,-1)$. Računajući rang matrice čiji su stupci (ili retci) vektori a_1, a_2, a_3, a_4 odredite je li skup $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ linearno nezavisan.

41. Odredite, ako postoji, inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

42. Odredite, ako postoji, inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

43. Za zadane matrice $B \in M_{n1}$ i $C \in M_{1n}$, $B, C \neq 0$, pokažite da je rang matrice $A = BC$ jednak 1. Obratno, pokažite da za svaku matricu $A \in M_n$ ranga 1 postoje $B \in M_{n1}$ i $C \in M_{1n}$, $B, C \neq 0$, takve da je $A = BC$.

44. Dokažite da za $A, B \in M_n$ vrijedi

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = n \Longrightarrow \mathrm{r}(AB) = n.$$

Nadalje, pokažite (može i protuprimjerom) da za $1 \leq k < n$ ne vrijedi implikacija
$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = k \Longrightarrow \mathrm{r}(AB) = k.$$

45. Neka su A i B proizvoljne ulančane matrice. Pokažite da vrijedi $\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(B)$ i $\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(A)$.

46. Neka je $A \in M_{mn}$. Pod minorom matrice A reda k podrazumijevamo determinantu bilo koje kvadratne $k \times k$ podmatrice od A. (Drugim riječima, minora reda k je determinanta bilo koje matrice koja nastaje uklanjanjem $m-k$ redaka i $n-k$ stupaca iz matrice A.) Dokažite: $r(A) = k$ ako i samo ako postoji bar jedna minora od A reda k različita od 0, a sve minore od A reda većeg od k su jednake 0.

47. Neka je $A \in M_n$ regularna matrica. Dokažite da postoji matrica $B \in M_{n+1}$ takva da vrijedi $\det B = (\det A)^2$ i $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A) + 1$.

48. Odredite LU faktorizaciju matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

49. Neka je $A \in M_n$ matrica koja dopušta prelazak na gornjotrokutasti oblik primjenom elementarnih transformacija redaka, ali bez zamjene redaka. Neka je $A = L_1D_1U_1 = L_2D_2U_2$, pri čemu su D_1, D_2 dijagonalne, L_1, L_2 donjotrokutaste, U_1, U_2 gornjotrokutaste, te neka su svi dijagonalni elementi u L_1, L_2, U_1, U_2 jednaki 1. Dokažite da je tada $L_1 = L_2$, $D_1 = D_2$ i $U_1 = U_2$.

(Uputa: u jednakosti $L_2^{-1}L_1D_1 = D_2U_2U_1^{-1}$ usporedite posebno dijagonalne, posebno izvandijagonalne elemente.)

50. Neka je A simetrična matrica koja dopušta LDU dekompoziciju. Pokažite da tada jedinstvena (u smislu prethodnog zadatka) LDU dekompozicija matrice A glasi $A = LDL^t$.

51. Neka je graf s 5 vrhova dan matricom susjedstva
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Na koliko načina se u 4 koraka može doći iz vrha v_2 u vrh v_4?

3. Sustavi linearnih jednadžbi

1. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$.

2. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 11 \end{array}$.

3. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$.

4. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 6 \end{array}$.

5. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \end{array}$.

6. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \end{array}$.

7. U ovisnosti o realnom parametru α, riješite sustav

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & \alpha x_2 & - & 13x_3 & = & -32 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & \alpha \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & \alpha x_3 & = & 8 \end{array}.$$

8. U ovisnosti o realnom parametru λ, riješite sustav

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \lambda x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & \lambda x_4 & = & 3 \\ & & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \end{array}.$$

9. U ovisnosti o realnom parametru λ, riješite sustav

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 7 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 9 \\ \lambda x_1 & - & 4x_2 & + & 9x_3 & + & 10x_4 & = & 11 \end{array}.$$

10. Neka je $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pri čemu je navedena ekvivalencija realizirana isključivo elementarnim transformacijama redaka. Nađite sva rješenja sustava $AX = B$ ako je

(i) B razlika prvog i četvrtog stupca matrice A.
(ii) B razlika prvog i drugog stupca matrice A.

11. Pokažite da je sustav

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 13 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & & & = & -1 \end{array}$$

Cramerov pa ga riješite pomoću Cramerovih formula (iz *korolara* **??**).

12. Riješite sustav $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

13. Riješite sustav $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = 0$.

14. Odredite LU dekompoziciju matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ i pomoću te dekompozicije riješite sustav $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

15. Neka je $\{(1,1,0,-1),(1,0,1,2)\}$ baza potprostora M prostora $\mathbb{R}^4$. Pokažite da je M skup svih rješenja nekog homogenog sustava jednadžbi.

16. Neka je M potprostor prostora $\mathbb{R}^n$. Pokažite da postoji homogeni sustav linearnih jednadžbi čiji prostor rješenja je M.

17. Neka je dan proizvoljan homogen sustav linearnih jednadžbi $AX = B$, $A \in M_{mn}$. Za regularnu matricu $S \in M_n$ promotrimo i sustav $ASX = B$. Dokažite da su dimenzije prostora rješenja sustava $AX = B$ i $ASX = B$ jednake. Nadalje, ako je $\mathrm{r}(A) < \frac{n}{2}$, pokažite da ova dva sustava imaju bar jedno netrivijalno zajedničko rješenje.

18. Dokažite *lemu* **??**.

19. Dokažite *propoziciju* **??**.

20. Upotpunite dokaz propozicije **??** tako da provjerite jednakost $R_{2n} = (R_1 + \ldots + R_n) - (R_{n+1} + \ldots + R_{2n-1})$ i pokažete: (1) $\{R_1, R_2, \ldots, R_{2n-1}\}$ je linearno nezavisan, (2) R_{2n+1} ne može biti prikazan kao linearna kombinacija redaka $R_1, R_2, \ldots, R_{2n-1}$, i (3) R_{2n+2} ne može biti prikazan kao linearna kombinacija redaka $R_1, R_2, \ldots, R_{2n-1}, R_{2n+1}$.

21. Pokažite da je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

22. Neka je $S \in M_n$ proizvoljna regularna matrica i $\varphi : M_n \to M_n$ preslikavanje definirano formulom $\varphi(A) = S^{-1}AS$. Dokažite da je φ bijekcija te da vrijedi $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$, $\varphi(\lambda A) = \lambda\varphi(A)$ i $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ za sve $A, B \in M_n$ i sve skalare λ.

23. Pokažite da za matrice A_{ij} i T uvedene jednakostima (**??**), odnosno (**??**) za sve $i, j = 2, \dots, n$ vrijedi

$$T^{-1}A_{ij}T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n-1} E_{i-1,k} + E_{i-1,j-1}.$$

24. Pokažite da za preslikavanja f i g definirana relacijama (**??**) vrijedi $f(A+B) = f(A) + f(B)$, $f(\alpha A) = \alpha f(A)$ i $g(A+B) = g(A) + g(B)$, $g(\alpha A) = \alpha g(A)$ za sve $A, B \in M_n$ i sve $\alpha \in \mathbb{F}$.

25. Neka je $f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. Pokažite da je u matrici $A \in M_n$ zbroj elemenata u svakom retku jednak i iznosi s ako i samo ako vrijedi $Af = sf$.

26. Neka je $g = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{F}^n$. Pokažite da je u matrici $A \in M_n$ zbroj elemenata u svakom stupcu jednak i iznosi s ako i samo ako vrijedi $gA = sg$.

27. Neka je $A \in SMS_n$ regularna matrica. Dokažite da je tada i $A^{-1} \in SMS_n$. Pritom, ako zbroj elemenata u svakom retku i svakom stupcu u matrici A iznosi s, onda zbroj elemenata u svakom retku i svakom stupcu u matrici A^{-1} iznosi $\frac{1}{s}$.

Napomena. Općenito, ako je A magični kvadrat i uz to regularna matrica, A^{-1} će, prema prethodnom zadatku, biti polumagični kvadrat, ali ne nužno i magičan. Na primjer, očito je

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 14 & 18 \\ 17 & 15 & 1 & 11 \\ 13 & 21 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 22 & 12 \end{bmatrix} \in MS_4,$$

dok je

$$A^{-1} = \frac{1}{792} \begin{bmatrix} 582 & -540 & 472 & -496 \\ -375 & 351 & -265 & 307 \\ 219 & -243 & 197 & -155 \\ -408 & 450 & -386 & 362 \end{bmatrix} \in SMS_4 \setminus MS_4.$$

Međutim, može se pokazati da za magične kvadrate trećeg reda ipak vrijedi: ako je $A \in MS_3$ regularna matrica, onda je i $A^{-1} \in MS_3$.

Ovdje ćemo, prejudicirajući neke rezultate idućeg poglavlja, dokazati navedeni rezultat. (Zainteresiranom čitatelju savjetujemo da se ovom dokazu vrati nakon sljedećeg poglavlja.)

Neka je $A \in MS_3$ regularna matrica te neka je zbroj elemenata u svakom retku i svakom stupcu u matrici A jednak s. S obzirom na tvrdnju *zadatka 10* treba samo dokazati da je u matrici A^{-1} zbroj elemenata na dijagonali (tj. trag) kao i zbroj elemenata na poprečnoj dijagonali jednak $\frac{1}{s}$.

Kako je po pretpostavci $A \in MS_3$, znamo da je i $\operatorname{tr}(A) = s$. Također, prema tvrdnji *zadatka 8*, skalar s je svojstvena vrijednost matrice A. Ako druga dva korijena svojstvenog polinoma matrice A označimo s λ_1 i λ_2 onda prema tvrdnji *zadatka 81* u petom poglavlju vrijedi $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Dakle, $\lambda_1 = -\lambda_2$. Kako je A regularna, znamo da je $\lambda_1 \neq 0$. Imamo, dakle, $\frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{\lambda_2}$ i sad je $\operatorname{tr}(A^{-1}) = \frac{1}{s} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{s}$.

Što se tiče poprečne dijagonale, pogledajmo matricu $B = JA$, gdje je $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Jasno je da je i $B \in MS_3$ i da suma elemenata u redcima i stupcima i na dijagonalama matrice B također iznosi s. Prema prethodno dokazanom imamo $\operatorname{tr}(B^{-1}) = \frac{1}{s}$. Međutim, $B^{-1} = A^{-1}J^{-1} = A^{-1}J$, i sad se lako vidi da je $\operatorname{tr}(A^{-1}J)$ upravo jednak sumi elemenata na poprečnoj dijagonali matrice A^{-1}.

4. Linearni operatori

1. Provjerite sve tvrdnje navedene u *primjeru* **??**.

2. Neka je $L = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $M_1 = \{(a, 0, a) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$ i $M_2 = \{(0, b, b) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\}$. Pokažite da su L, M_1, M_2 potprostori od $\mathbb{R}^3$ te da vrijedi $R^3 = L \dot{+} M_1$ i $R^3 = L \dot{+} M_2$. Odredite kosi projektor na L duž potprostora M_1, a nakon toga duž potprostora M_2. (U oba slučaja traži se pravilo, tj. formula kojom kosi projektor djeluje na proizvoljan vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.)

3. Neka su $A : V \to W$ i $B : W \to X$ linearni operatori. Pokažite da vrijedi $\mathrm{r}(BA) \leq \mathrm{r}(A)$ i $\mathrm{r}(BA) \leq \mathrm{r}(B)$.

4. Neka je $A : V \to W$ proizvoljan linearan operator te neka su $S \in L(W)$ i $T \in L(V)$ regularni. Dokažite da je tada $\mathrm{r}(SAT) = \mathrm{r}(A)$.

5. Neka su $A, B : V \to W$ linearni operatori za koje vrijedi $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$. Pokažite da tada postoje regularni operatori $S \in L(W)$ i $T \in L(V)$ takvi da je $B = SAT$.

6. Dokažite: ako je $A : V \to W$ izomorfizam, onda je i inverzno preslikavanje $A^{-1} : W \to V$ linearno preslikavanje, dakle izomorfizam.

7. Neka je $A : V \to W$ linearan operator, neka je $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, linearno nezavisan skup u $\operatorname{Im} A \subseteq W$ te neka su vektori $x_i \in V$ odabrani tako da vrijedi $Ax_i = y_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Pokažite da je i skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan.

8. Neka je $A : V \to W$ linearan operator, neka je $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ baza za $\operatorname{Im} A$ te neka su vektori $x_i \in V$ odabrani tako da vrijedi $Ax_i = y_i$, $\forall i = 1, \ldots, r$. Pokažite da je tada $V = [\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}] \dot{+} \operatorname{Ker} A$.

9. Neka je $A : V \to W$ izomorfizam i $\{v_1, \ldots, v_m\}$ konačan skup vektora u V. Pokažite da tada vrijedi $\dim [\{Av_1, \ldots, Av_m\}] = \dim [\{v_1, \ldots, v_m\}]$. Vrijedi li ista tvrdnja ako pretpostavimo da je A samo monomorfizam?

10. Nađite neki izomorfizam $A : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$.

11. Za linearan operator $A \in L(\mathbb{R}^3, M_2(\mathbb{R}))$ zadano je $A(1,1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A(1,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $A(0,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Odredite opću formulu po kojoj djeluje operator A. Izračunajte mu rang i defekt.

12. Odredite jezgru i sliku operatora $T \in L(M_2)$ definiranog s $T(X) = XA - AX$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

13. U ovisnosti o $\alpha \in \mathbb{R}$ odredite rang i defekt te po jednu bazu jezgre i slike operatora $A \in L(\mathbb{R}^3, P_2)$ definiranog s $A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \alpha x_3 + (x_1 + x_2 + 2x_3)t + (\alpha x_1 + x_3)t^2$.

14. Provjerite da je preslikavanje $A : P_3 \to M_2(\mathbb{R})$ dano s $Ap = \begin{bmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) + p(-1) & p'(1) + p'(-1) \end{bmatrix}$ linearan operator pa mu nađite rang i defekt.

15. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Dokažite da za svaki $k \in \mathbb{N}$ takav da je $r(A) \leq k \leq \dim V$ postoji $B \in L(V)$ takav da vrijedi $AB = 0$ i $r(A) + r(B) = k$.

16. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Dokažite da skup svih regularnih operatora na V čini grupu s kompozicijom kao binarnom operacijom. (Ponekad se ta grupa označava s $GL(V)$.)

17. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $M \leq V$. Pokažite da postoje linearni operatori $A, B \in L(V)$ takvi da je $\operatorname{Ker} A = M$ i $\operatorname{Im} B = M$. Postoji li operator $C \in L(V)$ sa svojstvom $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Im} C = M$?

18. Neka je M potprostor vektorskog prostora V. Pokažite da je kvocijentno preslikavanje $\pi : V \to V/M$ definirano s $\pi(x) = [x]$ (tj. $\pi(x) = x+M$) linearan operator. (Ovaj (očito surjektivan) operator se često naziva kanonski epimorfizam.)

19. Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem, te neka je $A : V \to W$ epimorfizam. Dokažite da je tada preslikavanje $A^\natural : V/\operatorname{Ker} A \to W$, $A^\natural([x]) = Ax$ dobro definirano, linearno i bijektivno (dakle, $A^\natural$ je izomorfizam).

20. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $P \in L(V)$ operator sa svojstvom $P^2 = P$. Pokažite da je tada $V = \operatorname{Im} P \dotplus \operatorname{Ker} P$ i da je P kosi projektor na $\operatorname{Im} P$ u smjeru $\operatorname{Ker} P$.

21. Dokažite da je rezultat množenja linearnog operatora skalarom iz *definicije* **??** također linearan operator.

22. Dokažite da je $L(V, W)$ zaista vektorski prostor, tj. da operacije zbrajanja i množenja skalarom na $L(V, W)$ zaista zadovoljavaju sve potrebne uvjete iz *definicije* **??**.

23. Dokažite tvrdnje (4) i (5) *propozicije* **??**.

24. Ispitajte nezavisnost skupa $\{A, B, C\}$ u prostoru $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ako je $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2 - x_3)$, $B(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3)$, $C(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - x_2 - 3x_3, x_1 + x_3)$.

25. Neka su e i f kanonske baze u prostorima $\mathbb{R}^2$, odnosno $\mathbb{R}^3$, te neka su $E_{ij} \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ operatori iz dokaza *teorema* **??**. Odredite u ovoj situaciji eksplicitne formule za djelovanje operatora E_{ij}.

26. Pokažite da su preslikavanja $f, g : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definirana s $f(p) = \int_0^1 p(t)dt$, odnosno $g(p) = \int_{-1}^1 p(t)dt$ linearni funkcionali.

27. Za bazu $\{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$ prostora $\mathbb{R}^3$ odredite dualnu bazu.

28. Izvedite opći oblik linearnog operatora $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. (Uputa: neka je $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^m$ i $\{f_1^*, f_2^*, \ldots, f_m^*\}$ pripadna dualna baza. Promatrajte funkcionale $f_i^* A$ na prostoru $\mathbb{R}^n$ i iskoristite *primjer* **??**.)

29. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $\{f_1, \ldots, f_n\}$ baza dualnog prostora V^*. Je li ta baza dualna nekoj bazi prostora V?

30. Provjerite da funkcionali $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3$ čine bazu prostora $(\mathbb{R}^3)^*$, i nađite bazu prostora $\mathbb{R}^3$ kojoj je ona dualna.

31. Dokažite da za potprostore L i M konačnodimenzionalnog prostora V i njihove anihilatore vrijedi $(L + M)^0 = L^0 \cap M^0$, te $(L \cap M)^0 = L^0 + M^0$.

32. Neka je V konačnodimenzionalan prostor i $f \in V^*$. Odredite bazu anihilatora $(\operatorname{Ker} f)^0$.

33. Neka je $M = \{p \in P_3 : p(7) = 0\}$. Odredite bazu od M^0.

34. Nađite M^0 za $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\} \leq \mathbb{R}^4$.

35. Neka su f_1 i f_2 linearno nezavisni linearni funkcionali na prostoru V, pri čemu je $\dim V = 4$. Odredite anihilator M^0 potprostora $M = \operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2$. (Napomena. Uočite da je prethodni zadatak jedan konkretan primjer situacije opisane u ovom zadatku.)

36. Neka je V konačnodimenzionalan prostor, neka je $\{f_1, f_2, \dots f_k\}$ linearno nezavisan skup u V^* te neka je $f \in V^*$. Dokažite da je f linearna kombinacija funkcionala $f_1, f_2, \dots, f_k$ ako i samo ako vrijedi $\operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2 \dots \cap \operatorname{Ker} f_k \subseteq \operatorname{Ker} f$.

37. Neka je S podskup vektorskog prostora V. Anihilator skupa S se definira kao $S^0 = \{f \in V^* : f(x) = 0, \forall x \in S\}$. Dokažite da je S^0 potprostor dualnog prostora V^* te da vrijedi $S^0 = [S]^0$.

38. Pokažite da je, za dani operator $A \in L(V, W)$, i njegov dualni operator A^* definiran u *napomeni* **??** linearan. Dalje, pokažite da je preslikavanje $A \mapsto A^*$ izomorfizam prostora $L(V, W)$ i $L(W^*, V^*)$.

39. Pokažite da za bilo koja dva operatora $A, B \in L(V)$ vrijedi $(AB)^* = B^*A^*$.

40. Neka je $A \in L(V, W)$, neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze za Vi W te neka su e^* i f^* dualne baze. Dokažite da je tada $[A^*]_{f^*}^{e^*} = ([A]_e^f)^t$.

41. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Pokažite da za svaki linearan funkcional na $L(V)$ postoji jedinstven operator $D \in L(V)$ takav da je $f(A) = \operatorname{tr}(AD)$, $\forall A \in L(V)$.

42. Neka je f linearan funkcional na M_n takav da je $f(AB) = f(BA)$, za sve $A, B \in M_n$, i $f(I) = n$. Pokažite da je tada $f = \operatorname{tr}$.

43. Neka je $A \in L(V)$ regularan operator te neka je e neka baza prostora V. Pokažite da tada vrijedi $[A^{-1}]_e^e = ([A]_e^e)^{-1}$.

44. Neka su $A, B \in M_n$ slične matrice. Pokažite da A i B imaju jednake determinante i jednake tragove.

45. Promotrimo elementarne matrice drugog reda: $E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{1,\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_{2,\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $E_{2,1,\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$, $E_{1,2,\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pri čemu je $\lambda \neq 0$. Neka su $A_{1,2}$, $A_{1,\lambda}$, $A_{2,\lambda}$, $A_{2,1,\lambda}$ i $A_{1,2,\lambda}$ operatori na prostoru $V^2(O)$ kojima u kanonskoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, redom, pripadaju navedene elementarne matrice. Interpretirajte geometrijski djelovanje ovih operatora.

46. Nađite matricu operatora $T \in L(M_2)$ definiranog s $T(X) = XA - AX$, gdje je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, u kanonskoj bazi prostora M_2.

47. Nađite matricu operatora $A \in L(\mathbb{R}^3)$ definiranog s $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_3)$ u kanonskoj bazi, a zatim i u bazi $\{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, -1, 0)\}$.

48. Odredite neku bazu za jezgru te defekt i rang operatora $A \in L(\mathbb{R}^4)$ kojem u kanonskoj bazi e pripada matrica $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

49. Dokažite da je $A \in L(\mathbb{R}^3)$, $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_2 + 7x_3, -x_3)$ regularan operator i odredite $[A^{-1}]_e^e$ ako je e kanonska baza prostora $\mathbb{R}^3$.

50 Neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$ dan s

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_3).$$

Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi, pokažite da je ta matrica regularna, nađite joj inverz i iz tog inverza odredite formulu djelovanja operatora A^{-1}.

51 Neka je $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n^2-1}\}$ neka baza potprostora $M \leq M_n$ svih matrica čiji trag je 0. Odredite matricu linearnog funkcionala $\mathrm{tr} : M_n \to \mathbb{F}$ u paru baza $\{I, A_1, A_2, \ldots, A_{n^2-1}\}$, $\{2\}$.

52. Neka su V i W konačnodimenzionalni prostori nad istim poljem i $A \in L(V, W)$ operator ranga r, $0 < r < \dim V$. Pokažite da postoje baze $b = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ i $c = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ za V, odnosno W takve da je

$$[A]_b^c = D_r = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in M_{mn}$$

pri čemu je $I \in M_r$ dok je svaki od nul-blokova odgovarajućeg formata. (Uputa: koristite tvrdnju *zadatka* 8.)

53. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene potprostore operatora $A \in L(\mathbb{R}^3)$ kojem u kanonskoj bazi e pripada matrica $[A]_e^e = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$.

54. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene potprostore operatora $A \in L(\mathbb{R}^3)$ kojem u bazi $a = \{(1, 1, -1), (1, -1, 0), (-1, 0, 0)\}$ pripada matrica $[A]_a^a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

55. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadajuće svojstvene potprostore operatora deriviranja $D \in L(P_4)$, $Dp = p'$.

56. Neka je dana matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ i operator $K : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definiran s $K(X) = AX - XA$. Odredite matricu operatora K u kanonskoj bazi, pokažite da je $0 \in \sigma(K)$ i odredite pripadajuću algebarsku i geometrijsku kratnost.

57. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadajuće svojstvene potprostore matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ gdje je

$$A = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{bmatrix}.$$

58. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadajuće svojstvene potprostore matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ gdje je

$$A = \begin{bmatrix} n-1 & -n & \ldots & -n \\ -n & n-1 & \ldots & -n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & -n & \ldots & n-1 \end{bmatrix}.$$

59. Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, te $i, j \in \{2, 3, \ldots, n\}$ promotrimo matrice $A_{ij} \in M_n$ definirane formulom (**??**):

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & -1 & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \\ -1 & \ldots & 1 & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \end{bmatrix},$$

pri čemu se brojevi -1 nalaze na pozicijama $(i, 1)$ i $(1, j)$.

Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrica A_{ij} za sve $i, j = 2, 3, \ldots n$. (Napomena: svojstveni vektori ovih matrica zapravo stoje u pozadini definicije matrice T i preslikavanja φ iz *propozicije* **??**.)

60. Uzmimo kanonsku bazu $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ prostora $\mathbb{C}^n$ i operator $A \in L(\mathbb{C}^n)$ zadan s $Ae_1 = e_n$, $Ae_2 = e_1$, $Ae_3 = e_2$, ..., $Ae_n = e_{n-1}$. Pokažite da se A može dijagonalizirati i nađite bazu u kojoj se A dijagonalizira.

61. Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ svojstvene vrijednosti operatora A te ako je zadan skalar τ, što su svojstvene vrijednosti operatora $A - \tau I$?

62. Dokažite da svaki linearan operator na realnom prostoru neparne dimenzije ima bar jednu svojstvenu vrijednost.

63. Neka su x_1 i x_2 svojstveni vektori operatora A pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima. Može li i vektor $x_1 - x_2$ biti svojstven za A?

64. Neka su v_1 i v_2 svojstveni vektori pridruženi međusobno različitim svojstvenim vrijednostima operatora A. Pokažite da $v_1 + v_2$ ne može biti svojstven vektor za A. Postoje li skalari α_1 i α_2 takvi da je $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ svojstven vektor za A?

65. Neka je $V_A(\lambda_0)$ svojstveni potprostor operatora $A \in L(V)$ pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Pokažite da je $V_A(\lambda_0)$ invarijantan potprostor za svaki operator $B \in L(V)$ koji komutira s A.

66. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Za operator $A \in L(V)$ definirajmo operator $\mathsf{L}_A : L(V) \to L(V)$ formulom $\mathsf{L}_A(B) = AB$. Pokažite da je $\sigma(\mathsf{L}_A) = \sigma(A)$.

67. Neka je V konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor. Dokažite da za svaki operator $A \in L(V)$ postoji baza b za V takva da je $[A]_b^b$ gornjetrokutasta matrica.

68. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Dokažite da ne postoji pravi potprostor od V invarijantan za sve operatore iz $L(V)$ (u tom smislu se kaže da je $L(V)$ ireducibilna familija operatora).

69. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$ operator za kojeg je svaki vektor $v \in V$, $v \neq 0$, svojstven. Pokažite da tada postoji skalar λ_0 za koji vrijedi $A = \lambda_0 I$.

70. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, te neka je $A \in L(V)$ operator takav da vrijedi $AB = BA$, $\forall B \in L(V)$. Dokažite da tada postoji skalar α takav da je $A = \alpha I$. (Uputa: pokažite da A ima bar jednu svojstvenu vrijednost i promatrajte odgovarajući svojstveni potprostor.)

71. Neka je λ svojstvena vrijednost operatora $A \in L(V)$. Pokažite da je tada λ^k svojstvena vrijednost operatora A^k, $\forall k \in \mathbb{N}$. Pokažite još da tvrdnja vrijedi i za sve $k \in \mathbb{Z}$ uz uvjet da je A regularan.

72. Pokažite primjerom da obrat tvrdnje prethodnog zadatka ne vrijedi: nađite primjer operatora A, skalara λ_0 i prirodnog broja k za koje je $\lambda_0^k \in \sigma(A^k)$, ali $\lambda_0 \notin \sigma(A)$.

73. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, $A \in L(V)$ i $\alpha \neq 0$. U kojoj su vezi $\sigma(A)$ i $\sigma(\alpha A)$?

74. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $A \in L(V)$ operator ranga 1. Pokažite da postoji polinom p drugog stupnja takav da je $p(A) = 0$.

75. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadajuće svojstvene potprostore operatora transponiranja $T \in L(M_2)$, $T(A) = A^t$.

76. Invertirajte pomoću svojstvenog polinoma matricu $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

77. Dokažite da je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ definiran s $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_3, x_2 - x_3)$ regularan, odredite mu matrični prikaz u kanonskoj bazi, odredite pomoću svojstvenog polinoma inverz matrice $[A]_e^e$ te odredite formulu prema kojoj djeluje inverzni operator A^{-1}.

78. Neka operatoru $A \in L(\mathbb{C}^2)$ u kanonskoj bazi e prostora $\mathbb{C}^2$ pripada matrica $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 2 \end{bmatrix}$. Odredite a ako je poznato da je 0 svojstvena vrijednost operatora A. Može li se A dijagonalizirati? Ako može, odredite bazu prostora $\mathbb{C}^2$ u kojoj je matrica operatora A dijagonalna.

79. Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 1 \end{bmatrix}$ odredite parametre a i b ako je poznato da je A singularna te da njezine svojstvene vrijednosti imaju algebarsku kratnost 2.

80. Dokažite da za operatore A, B na konačnodimenzionalnom prostoru V vrijedi $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

81. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrice takve da postoji $T \in GL(n, \mathbb{C})$ takva da vrijedi $B = T^{-1}AT$. Dokažite da tada postoji i $S \in GL(n, \mathbb{R})$ takva da vrijedi $B = S^{-1}AS$.

82. Neka je $A \in M_n$ te neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sve nultočke njezinog svojstvenog polinoma k_A (dakle, vrijedi $k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$ - uočite da je takav rastav uvijek moguć nad poljem $\mathbb{C}$ čak i ako je A realna matrica). Dokažite da je tada $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr}(A)$.

83. Neka je p polinom n-tog stupnja, $n \in \mathbb{N}$, s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$. Pokažite da postoji vektorski prostor V nad $\mathbb{F}$, $\dim V = n$, i operator $A \in L(V)$ takav da je $k_A = p$.

84. Pretpostavimo da izvjesna vrsta insekata ima sljedeći životni tok: Od ukupnog broja izleženih njih samo pola doživi jednu godinu starosti, a od njih samo četvrtina doživi dvije godine starosti. Do kraja treće godine života svi ti insekti uginu; međutim, svaki od onih koji je ušao u drugu godinu na kraju te godine ostavi jednog potomka, a svaki od onih koji je ušao u treću godinu života na kraju te godine ostavi četiri potomka. Pretpostavimo da promatramo populaciju od 300 insekata; po 100 izleženih, starih jednu godinu te starih dvije godine. Kako će se kretati brojnost ove populacije, ukupno, i po dobnim skupinama? Odredite brojno stanje ove populacije nakon 2 godine i nakon 10 godina. Hoće li ova populacija izumrijeti, neograničeno se širiti ili će njezino brojno stanje težiti nekom ekvilibriju?

85. Služeći se metodom izloženom u *primjeru* **??** odredite približnu vrijednost broja $\sqrt[3]{5}$.

86. Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrica u kojoj je zbroj koeficijenata u svakom stupcu isti i iznosi c. Dokažite da je $c \in \sigma(A)$.

5. Unitarni prostori

1. Provjerite da su preslikavanja navedena u *primjerima* **??** zaista skalarni produkti.

2. Pokažite da je formulom $\langle p,q\rangle = p(1)q(1)+2p(0)q(0)+p(-1)q(-1)$ definiran skalarni produkt na $P_2(\mathbb{R})$.

3. Neka je V unitaran prostor i neka su vektori $a,b\in V$ međusobno okomiti. Odredite nužan i dovoljan uvjet da vrijedi $(a-b)\perp(a+b)$.

4. Dokažite relaciju paralelograma iz *napomene* **??**.

5. Dokažite polarizacijske formule iz *napomene* **??**.

6. Neka je $e=\{e_1,\dots,e_n\}$ baza vektorskog prostora V. Dokažite da postoji skalarni produkt na V s obzirom na koji je e ortonormirana baza za V.

7. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ ortonormirajte skup $S=\{(1,2,2,-1),(1,1,-5,3),(3,2,8,-7)\}$.

8. U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ Gram-Schmidtovim postupkom ortonormirajte skup $S = \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\right\}$.

9. Odredite bar jednu ortonormiranu bazu unitarnog prostora $P_3(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle p,q\rangle=\int_{-1}^{1}p(t)q(t)dt$.

10. Neka su L i M potprostori konačnodimenzionalnog unitarnog prostora V. Dokažite da je $(L+M)^\perp = L^\perp\cap M^\perp$ i $(L\cap M)^\perp = L^\perp + M^\perp$.

11. Za vektore $a=(1,3,0,2), b=(3,7,-1,2), c=(2,4,-1,0)\in\mathbb{R}^4$ i potprostor $M=[\{a,b,c\}]$ odredite jednu ortonormiranu bazu potprostora $M^\perp$.

12. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^n$ zadan je potprostor $M=\{(x_1,\dots,x_n) : x_2-x_1=x_3-x_2=\dots = x_n-x_{n-1}=x_1-x_n\}$. Odredite neku ortonormiranu bazu za $M^\perp$.

13. Neka je $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ ortonormirana baza unitarnog prostora V. Uvedimo vektore $f_k = e_k-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e_i$ za $k=1,2,\dots,n$ te vektor $f_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n e_i$. Pokažite da tada za sve $x\in V$ vrijedi $x=\sum_{k=1}^{n+1}\langle x,f_k\rangle f_k$.

14. Neka je $Bx=\sum_{k=1}^n\langle x,f_k\rangle f_k$, gdje su $f_1,f_2,\dots,f_n$ vektori iz prethodnog zadatka. Odredite sve svojstvene vrijednosti i baze pripadajućih svojstvenih potprostora operatora B.

15. Neka je $Cx=\sum_{k=2}^{n+1}\langle x,f_k\rangle f_k$, gdje su $f_2,f_2,\dots,f_{n+1}$ vektori iz *zadatka* 13. Odredite sve svojstvene vrijednosti i baze pripadajućih svojstvenih potprostora operatora C.

16. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ zadan je potprostor M svojom bazom $\{(1,1,2,-1),(1,0,0,2)\}$. Prikažite vektor $x=(1,1,1,1)$ u obliku $x=a+b$, $a\in M, b\in M^\perp$.

17. U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle X,Y\rangle=\mathrm{tr}(Y^tX)$ odredite najbolju aproksimaciju matrice $\begin{bmatrix}4&2\\1&-2\end{bmatrix}$ matricama iz potprostora $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$.

18. U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle X,Y\rangle=\mathrm{tr}(Y^tX)$ odredite ortogonalnu projekciju matrice $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$ na potprostor $\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$.

19. U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(Y^t X)$ promotrimo potprostor M svih simetričnih matrica ($S^t = S$). Prikažite matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ u obliku $A = B + C$ gdje je $B \in M$, $C \in M^\perp$.

20. U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$ promotrimo potprostor $S \leq M_2(\mathbb{R})$ svih simetričnih matrica. Za zadanu matricu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ nađite matricu $B \in S$ za koju je

$$\|A - B\| \leq \|A - C\|, \ \forall C \in S.$$

21. U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(Y^t X)$ odredite ortogonalnu projekciju matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ na potprostor $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$.

22. Odredite najbolje približno rješenje (u smislu najmanjih kvadrata) sustava

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{array}.$$

23. Neka je V unitaran prostor. Pokažite da je preslikavanje $\varphi : V \to V^*$ definirano formulom $\varphi(a) = f_a$ antilinearno, tj. da za sve skalare α, β i vektore a, b vrijedi $\varphi(\alpha a + \beta b) = \overline{\alpha}\varphi(a) + \overline{\beta}\varphi(b)$.

24. U prostoru $P_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ zadan je linearan funkcional $f(p) = p(-1) + p(1)$. Odredite polinom $q \in P_2(\mathbb{R})$ takav da vrijedi $f(p) = \langle p, q\rangle$, $\forall p \in P_2(\mathbb{R})$.

25. Na unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(XY')$ promotrimo funkcional f zadan s $f\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right) = x_{11} - x_{22}$. Odredite matricu $A \in M_2(\mathbb{R})$ za koju vrijedi $f(X) = \langle X, A\rangle$, $\forall X \in M_2(\mathbb{R})$.

26. Neka za linearan operator A na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V vrijedi $x, y \in V$, $x \perp y \Rightarrow Ax \perp Ay$. Dokažite da tada postoje skalar α i unitaran operator U na V takvi da je $A = \alpha U$.

27. Neka su V i W unitarni prostori nad istim poljem. Dokažite da je za linearan operator $A \in L(V, W)$ svojstvo očuvanja skalarnih produkata $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in V$, ekvivalentno svojstvu izometričnosti $\|Ax\| = \|x\|$, $\forall x \in V$.

28. Neka je V unitaran prostor i $A : V \to V$ *preslikavanje* sa svojstvom $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in V$. Dokažite da je A linearan operator.

29. Na unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ zadan je linearan operator $A(x_1, x_2, x_3) = (\frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_3, \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_3, x_2)$. Provjerite je li operator A unitaran te odredite A^{-1}.

30. Neka je $\{e_1, e_2, e_3\}$ kanonska baza unitarnog prostora $\mathbb{R}^3$ i neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadan s

$$Ae_1 = (-6, 0, -8), \ Ae_2 = (8, 0, -6), \ Ae_3 = (0, 10, 0).$$

Za vektor $x = (7, \sqrt{2}, 7)$ izračunajte $\|Ax\|$. Uputa: promotrite operator $\frac{1}{10}A$.

31. Nadopunite matricu $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ s još dva retka tako da dobijete unitarnu matricu $U \in M_4$.

32. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Pokažite da postoji ortonormirana baza prostora V u kojoj je matrični zapis operatora A gornjotrokutasta matrica.

33. Dokažite da skup svih ortogonalnih matrica čini grupu s obzirom na matrično množenje. (Usp. *teorem* **??**.)

34. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ unitaran operator. Ako je potprostor $M \leq V$ invarijantan za A, dokažite da je tada i $M^{\perp}$ invarijantan za A.

35. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $P \in L(V)$. Dokažite da je operator P ortogonalan projektor na neki potprostor ako i samo ako vrijedi $P^2 = P = P^*$.

36. Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori te neka je $A \in L(V, W)$. Označimo s φ_V i φ_W operatore iz *napomene* **??** koji predstavljaju (ako su su prostori kompleksni, antilinearne) izomorfizme prostora V i W i njihovih duala V^* i W^*, respektivno. Pokažite da je dualni operator operatora A definiran u *napomeni* **??** jednak kompoziciji $\varphi_V \circ A^* \circ \varphi_W^{-1}$. (Uočite da A^* ovdje označava hermitski adjungirani operator.)

37. Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ hermitski operator. Dokažite da je tada $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$.

38. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ operator sa svojstvom $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$. Pokažite da je A hermitski operator.

39. Zadan je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ svojim prikazom u kanonskoj bazi $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$. Pokažite da je A hermitski operator i nađite ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^3$ u kojoj je matrica operatora A dijagonalna.

40. Zadan je linearan operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ svojim prikazom u kanonskoj bazi $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. Pokažite da je A hermitski operator i nađite ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^3$ u kojoj je matrica operatora A dijagonalna.

41. Za matricu $A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ odredite ortogonalnu matricu S tako da $S^t A S$ bude dijagonalna.

42. Za linearan operator A na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V kažemo da je pozitivan (što označavamo s $A \geq 0$) ako je A hermitski i zadovoljava nejednakost $\langle Ax, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in V$. Pritom se kaže da je A strogo pozitivan (što označavamo s $A > 0$) ako dodatno zadovoljava i uvjet $\langle Ax, x \rangle > 0$, $\forall x \neq 0$. Dokažite da za svaki pozitivan operator A postoji jedinstven pozitivan operator $B \in L(V)$ takav da vrijedi $B^2 = A$. (Operator B zato se zove pozitivan drugi korijen iz operatora A.)

43. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor sa skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ te neka je $A \in L(V)$ strogo pozitivan operator. Pokažite da je formulom $[x, y] := \langle Ax, y \rangle$ definiran jedan novi skalarni produkt na V. Obratno, ako je $[\cdot, \cdot]$ neki skalarni produkt na V, onda postoji strogo pozitivan operator na V s obzirom na originalan skalarni produkt takav da vrijedi $[x, y] = \langle Ax, y \rangle$, $\forall x, y \in V$.

44. Neka je A regularan hermitski operator na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V. Dokažite da je tada i operator A^{-1} hermitski.

45. Odredite dekompoziciju singularnih vrijednosti matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

46. Odredite dekompoziciju singularnih vrijednosti matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

47. Odredite dekompoziciju singularnih vrijednosti matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

48. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $P \in L(V)$ ortogonalan projektor. Odredite $P^{\dagger}$.

49. Odredite pseudoinverz matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

50. Pokažite da za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ svaka matrica $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ za koju je $bc = d$ zadovoljava uvjete navedene pod (d) u *teoremu* **??**, ali samo jedna od njih zadovoljava i uvjet (c).