


# TITRANJA I VALOVI

## 1 Načini titranja (modovi) u mehaničkim sustavima

- 1.1 Jednostavan harmonijski oscilator
- 1.2 Sustav s dvije jednake čestice
- 1.3 Sustav s više jednakih čestica
- 1.4 Aproksimacija kontinuuma
- 1.5 Linearna superpozicija modova

## 2 Prisilno titranje mehaničkog sustava

- 2.1 Rezonancija u jednostavnom harmonijskom oscilatoru 
- 2.2 Prisilno titranje sustava s dvije čestice
- 2.3 Prisilno titranje sustava s više čestica
- 2.4 Prisilno titranje elastične niti (kontinuuma)

## 3 Valovi ujednoj dimenziji

- 3.1 Valno gibanje
- 3.2 Impedancija
- 3.3 Refleksija i transmisija valova
- 3.4 Superpozicija valova i grupna brzina
- 3.5 Frekventni spektar
- 3.6 Valni paket

## 4 Titranja i valovi u dvije i tri dimenzije

- 4.1 Načini titranja (modovi) u dvije i tri dimenzije
- 4.2 Mehanički valovod
- 4.3 Ravni valovi

## 4.4 Interferencija valova

## 4.5 Refleksija i transmisija ravnih valova

## 5 Akustika

### 5.1 Zvuk kao ravan val

### 5.2 Sferni valovi zvuka

### 5.3 Eksplozivni rog

### 5.4 Glazbena viljuška i glazbala

### 5.5 Osjetljivost ljudskog uha

### 5.6 Dopplerov efekt

## 6 Titranja i valovi u električnim sustavima

### 6.1 Analogija električnog i mehaničkog oscilatora

### 6.2 Sustav s dva i više modova

### 6.3 Val u beskonačnom sustavu

### 6.4 Prijenosne linije

## 7 Elektromagnetski valovi

### 7.1 Val između paralelnih ploča

### 7.2 Elektromagnetski val u vakuumu

### 7.3 Elektromagnetski spektar

### 7.4 Maxwellove jednačbe u diferencijalnom obliku

### 7.5 Matematičke dopune

## 8 Optika

### 8.1 Svjetlost u dielektriku

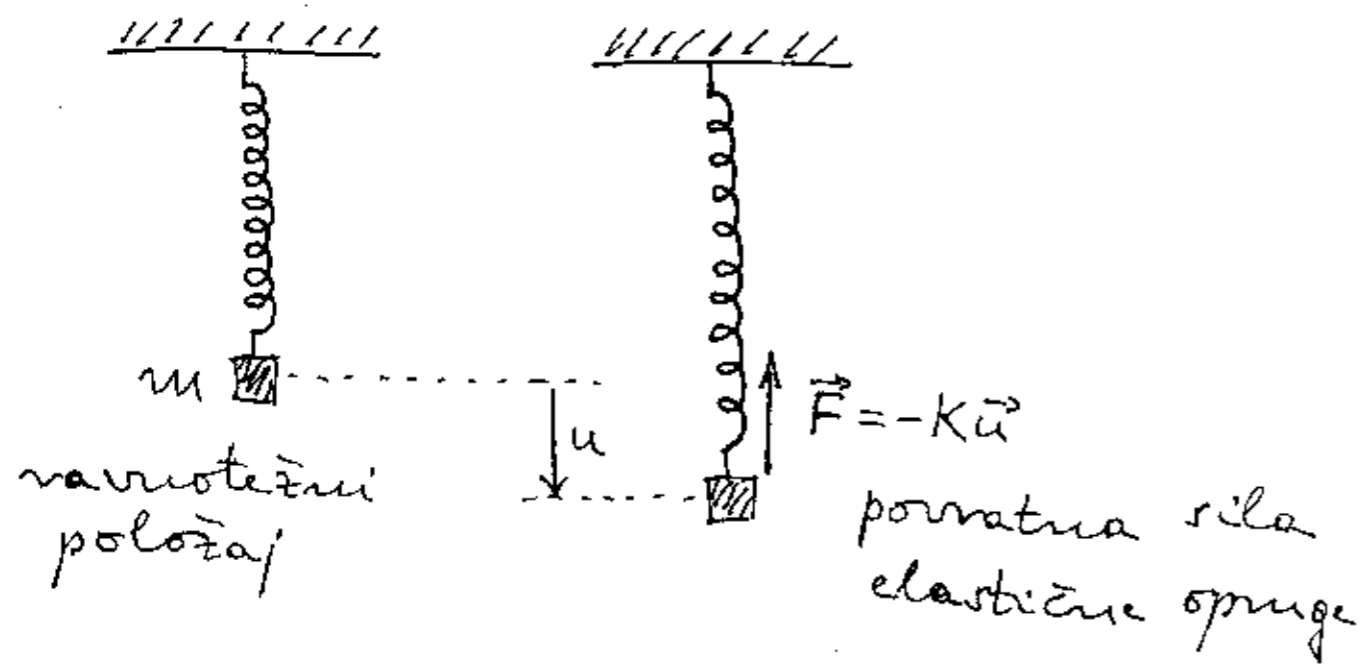
### 8.2 Aproksimacija geometrijske optike

- 8.3 Pojam slike i predmeta u geometrijskoj optici
- 8.4 Nastanak slike na ravnom zrcalu
- 8.5 Sferno zrcalo
- 8.6 Slika koja nastaje nakon loma svjetlosti
- 8.7 Leće
- 8.8 Ljudsko oko
- 8.9 Povećalo, mikroskop i teleskop
- 8.10 Interferencija svjetlosti iz dviju jako uskih pukotina
- 8.11 Difrakcijska rešetka
- 8.12 Difrakcija na jednoj umjereno širokoj pukotini

# TITRANJA I VALOVI

## 1. NAČINI TITRANJA (MODOVI) U MEHANIČKIM SUSTAVIMA

### 1.1. Jednostavan harmonijski oscilator (ponavljanje iz Mehanike)



$u$  = pomak iz položaja ravnoteže (elongacija)

Jednadžbu gibanja dobivamo primjenom II. Newtonova zakona

$$ma = F$$

Kod slobodnog gibanja nema djelovanja vanjske sile, nego djeluje samo elastična sila opruge, tj.  $F = -Ku$ .

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -Ku$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{K}{m} u$$

diferencijalna  
jednadžba za  
harmon. osc.

Opće rješenje za ovu diferenc. jednadžbu pretpostavimo u obliku

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

promjena  
elongacije  
tijekom vremena

$A$ ,  $\omega_0$  i  $\varphi$  su tri konstante u rješenju.

Možemo provjeriti da je funkcija  $u(t)$  uistinu rješenje dif. jedn. Provjera se obavlja tako da se  $u(t)$  uvrsti u dif. jedn.

$$-\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{K}{m} A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

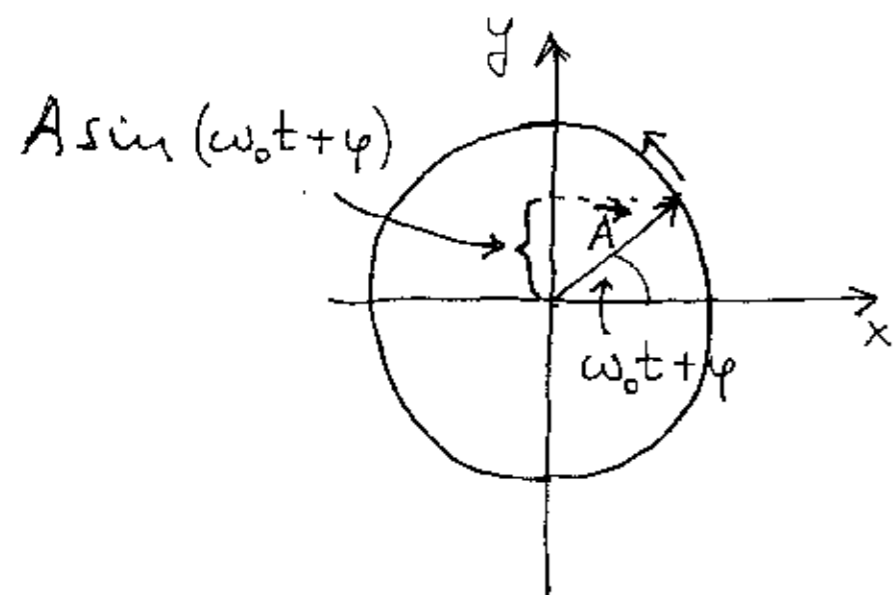
Nalazimo da  $u(t)$  uistinu zadovoljava dif. jednadžbu u svakom trenutku  $t$ , s time da je

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$\omega_0$  = knjižna frekvencija titranja

## Napomena:

Kod ovog harmonijskog oscilatora nema nikakva knjižnog gibanja. Naziv "knjižna frekvencija" javlja se zbog matematičkog opisa



Vektor  $\vec{A}$  rotira kutnom brzinom  $\omega_0$  oko osi z.

Vektor  $\vec{A}$  napravi puni krug za vrijeme T  
 $\omega_0 T = 2\pi$

Također, za vrijeme T projekcija vektora  $\vec{A}$  na os y napravi jedan puni titraaj.

Definiramo frekvenciju titraja

$$\nu = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Frekvencija  $\nu$  kaže koliko se titraja izvrši u 1 sekundi. Npr. za  $T=0,2s$  imamo  $\nu = \frac{1}{T} = 5$  titraja u sekundi = 5 Hz.

Knjižna frekvencija  $\omega_0$  ovisi samo o k i m ( $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ), dakle o građi harm. osc.

## 1. pokus:

promjena frekvencije za različite opruge i mase

Frekvencija ne ovisi o amplitudi titraja.

Općenito izračunavanje veličine  $\omega_0^2$

Uvijek vrijedi II. Newtonov zakon

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = F$$

Oblik sile F(t) može biti općenitije od -ku

Ako je titraje harmonično, tj. sinusoidalno,  $u(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ , slijedi račun

$$-m\omega_0^2 \underbrace{A \sin(\omega_0 t + \varphi)}_u = F$$

$$\omega_0^2 = \frac{-F}{mu} = \frac{\text{(povratna sila)}}{\text{(masa)} \cdot \text{(pomak iz ravnoteže)}}$$

Dakle, možemo reći da se  $\omega_0^2$  može odrediti ako u nekom oscilatoru znamo koliko je povratna sila po jedinici mase i po jedinici pomaka iz ravnoteže.

## Značenje konstante $A$ i $\varphi$

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$A$  - amplituda titranja

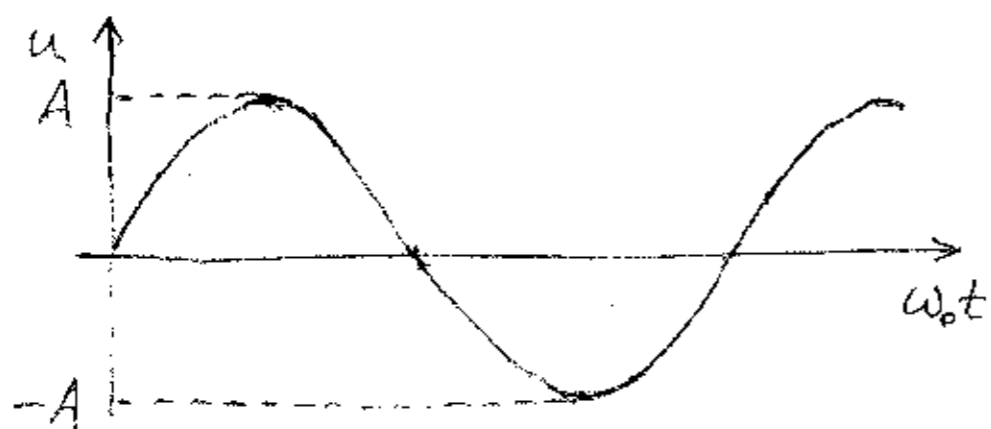
Amplituda titranja je maksimalan otklon iz položaja ravnoteže za dano titranje.

$\varphi$  - faza titranja u  $t=0$

$(\omega_0 t + \varphi)$  - faza titranja u trenutku  $t$

Proučimo dva posebna slučaja:

1)  $\boxed{\varphi = 0} \Rightarrow u(t) = A \sin \omega_0 t$



Kako možemo eksperimentalno uspostaviti ovakvo titranje, tj. kako eksperimentalno postavljamo da bude  $\varphi = 0$ ?

$u(0) = A \sin 0^\circ = 0$  početni položaj

$v(0) = \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = \omega_0 A$  početna brzina

Dakle, titranje s  $\varphi = 0$  ostvarujemo tako da u  $t=0$  imamo oscilator u položaju ravnoteže ali mu naglim udarcem damo početnu brzinu.

2)  $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}} \Rightarrow u(t) = A \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = A \cos \omega_0 t$



Kako eksperimentalno ostvarujemo  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ?

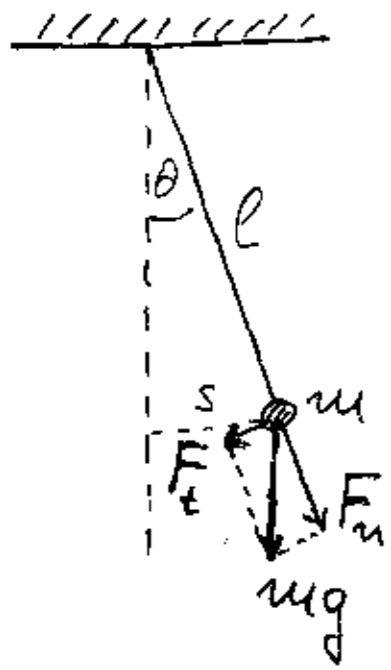
$u(0) = A \cos 0^\circ = A$  početni položaj

$v(0) = \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = -\omega_0 A \sin \omega_0 t \Big|_{t=0} = 0$  početna brzina

Dakle, titranje s  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ostvarujemo tako da u  $t=0$  pomaknemo oscilator iz položaja ravnoteže za iznos  $A$  i naprosto ga otpustimo (tj. bez udarca).

2. pokus: razni početni uvjeti

# Njikalos kao harmonijski oscilator



Samo tangencijalna komponenta  $F_t$  uzrokuje gibanje.

$F_n$  zateže nit.

$s$  - otklon od ravnoteže

$$s = l\theta$$

Jednadžba gibanja slijedi iz II. Newtonovog zakona

$$ma = F_t$$

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

Za male kutove  $\sin \theta \approx \theta = \frac{s}{l}$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega_0^2 s$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$s(t) = S \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{titranje}$$

$S$  - amplituda (maksimalan otklon)

$\varphi$  - faza u  $t=0$

## Zapaženje:

Velicina  $\omega_0^2$  kod njikala ne ovisi o masi  $m$  obješenog tijela.

Objašnjenje putem drugog zapaženja velicine  $\omega_0^2$ :

$$\omega_0^2 = \frac{(\text{povratna sila})}{(\text{masa})(\text{pomak iz ravnoteže})} = \frac{mg \sin \theta}{ms} \approx \frac{g}{l}$$

Kod njikala povratna sila je komponenta sile teže, pa je proporcionalna masi. Stoga se masa krati u  $\omega_0^2$ .

(Kod opruge s masom povratna sila  $Kx$  ne ovisi o  $m$ .)

## 3. pokus:

frekvencija njikala ne ovisi o masi nego samo o duljini niti

## Napomena:

Povratna sila ovisi o položaju i stoga se kod titranja mijenja u vremenu.

Međutim, povratna sila po jedinici pomaka iz ravnoteže uvijek je ista!

$\omega_0^2$  je konstanta gibanja za harmon. osc.



#### 4. pokus:

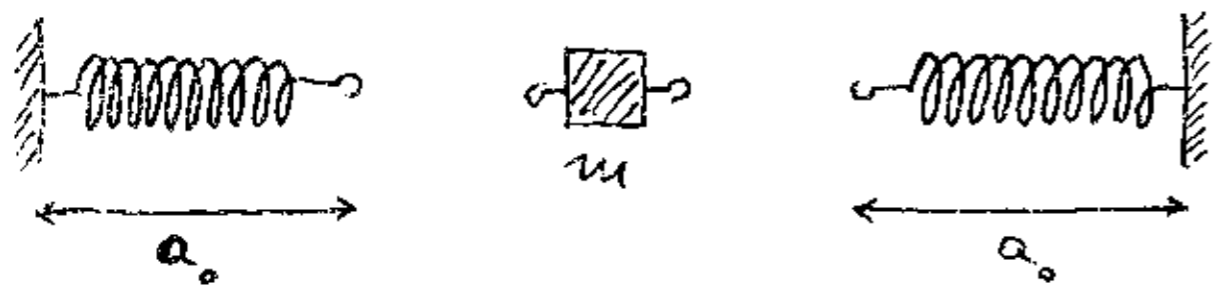
utjecaj parametara  $K$ ,  $m$  i  $l$   
na frekvenciju

Do sada smo obradivali longitudinalne oscilacije. To su oscilacije kod kojih se masa giba u smjeru u kojem su položene opruge.

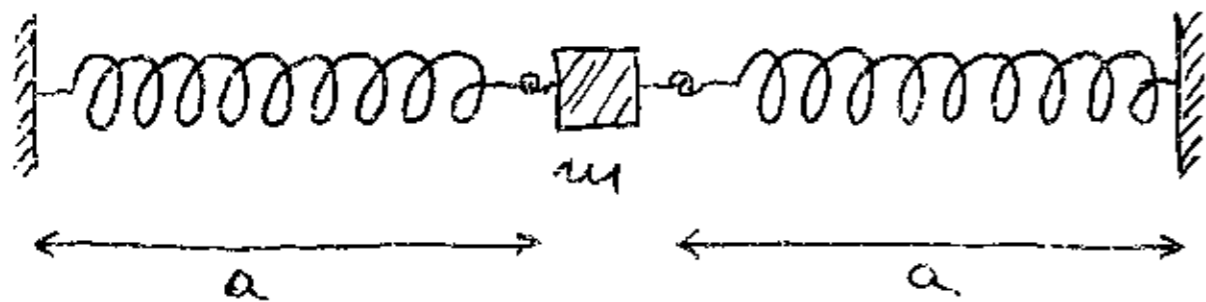
#### Transverzalne oscilacije

Neka masa  $m$  visi na niti velike duljine (tako da  $\frac{g}{l}$  zanemarimo prema  $\frac{2K}{m}$  za dane  $K$  i  $m$ ).

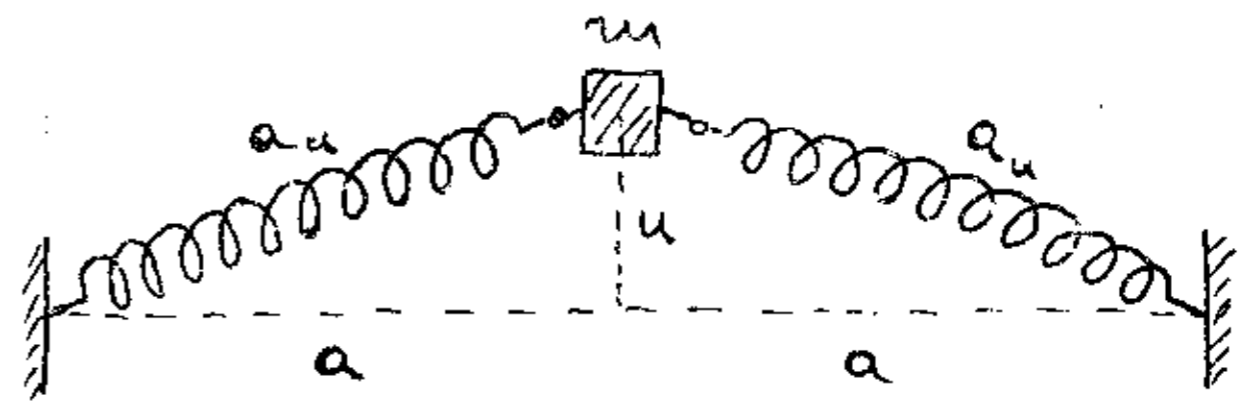
Crtajmo s po gledom odzgora:



$a_0$  - duljina opruge u nerastegnutoj stanju

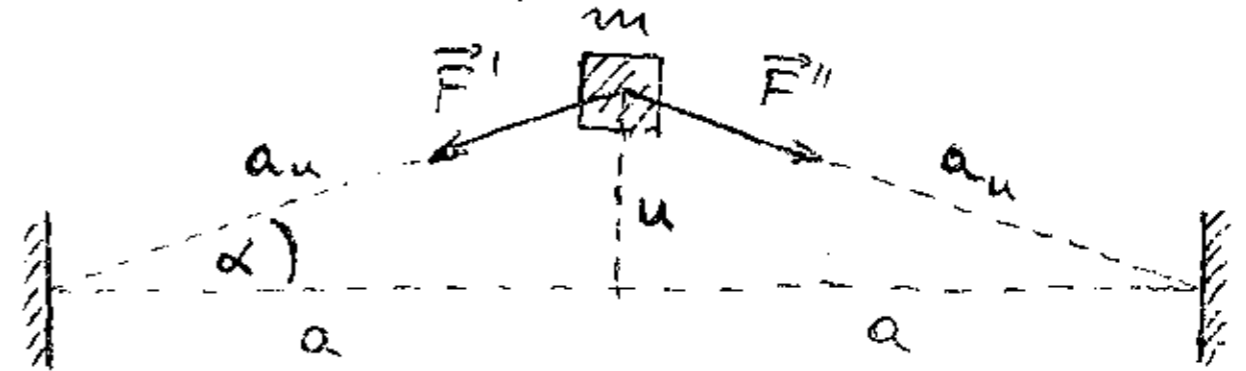


$a$  - duljina rastegnute opruge



$u$  - pomak mase  $m$  od položaja ravnoteže  
 $a_u$  - duljina opruge kod pomaka  $u$

Razmotrimo povratnu silu:



Iznosi sile  $F'$  i  $F''$  su

$$F' = F'' = K(a_u - a_0)$$

Na gibanje mase  $m$  djeluju projekcije sile na os  $u$ , pa je povratna sila

$$F = -2K(a_u - a_0) \sin \alpha = -2K(a_u - a_0) \frac{u}{a_u}$$

$$F = -2K \left(1 - \frac{a_0}{a_u}\right) u$$

Iz geometrijskog odnosa

$$a_u = \sqrt{a^2 + u^2}$$



$$F = -2K \left(1 - \frac{a_0}{\sqrt{a^2 + u^2}}\right) u$$

U općenitom slučaju povratna sila  $F$  nije linearno ovisna o  $u$ , pa transversalno titranje neće biti harmonično (tj. neće biti sinusoidalno).

Transverzalno titranje postaje harmonično ako je zadovoljen barem jedan od slijedeća dva uvjeta:

1) Opruga je jako istegnuta (čak i u ravnotežnom položaju tj.  $a \gg a_0$ ).

Ako je  $\frac{a_0}{a} \ll 1$ , onda je pogotovo  $\frac{a_0}{\sqrt{a^2 + u^2}} \ll 1$ , pa možemo taj član zanemariti.

$$F \approx -2Ku \quad \text{linearna sila} \checkmark$$

$$\omega_0^2 \approx \frac{2K}{m} \quad (\text{kao kod longitudinal. titranja})$$

2) Pomaci iz položaja ravnoteže su mali tj.  $u \ll a$ .

Tada zanemarimo  $u^2$  u odnosu na  $a^2$

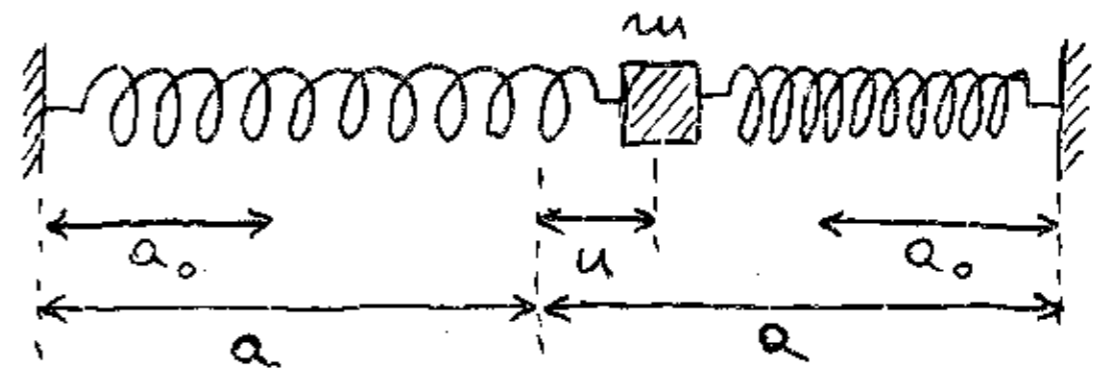
$$F \approx -2K \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) u \quad \text{linearna sila} \checkmark$$

$$\omega_0^2 \approx \frac{2K}{m} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad \text{smanjena frekv. titranja}$$

5. pokus: transversalno titranje

Napomena:

Kod longitudinalnog titranja uvijek imamo linearnu silu



Obje su opruge rastegnute u odnosu na nerastegnutu duljinu  $a_0$ , ali ne jednako.

Lijeva opruga vuče masu  $m$  u lijevo silom

$$F' = -K[(a+u) - a_0] = -K(a - a_0) - Ku$$

Desna opruga vuče masu  $m$  u desno silom

$$F'' = K[(a-u) - a_0] = K(a - a_0) - Ku$$

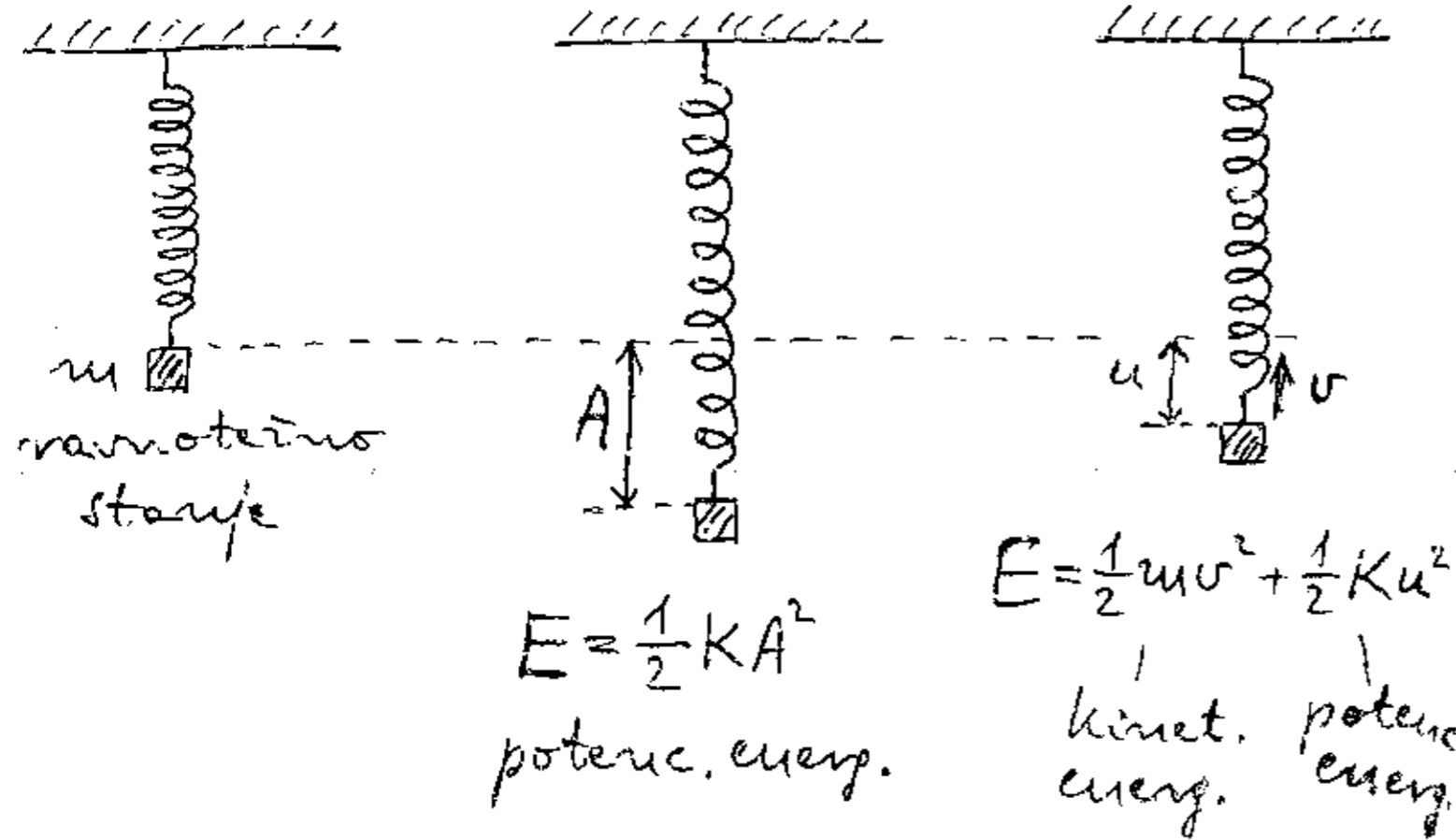
Za  $u=0$  (tj. u položaju ravnoteže) imamo  $F'' = -F' = K(a - a_0)$ , a ukupna sila  $F = F' + F'' = 0$ .

Za  $u \neq 0$  ukupna sila iznosi

$$F = F' + F'' = -2Ku \quad \text{linearna sila} \checkmark$$

$$\omega_0^2 = \frac{2K}{m}$$

## Razmatranje energije u procesu titranja



U krajnjem položaju  $A$  imamo samo potencijalnu energiju.

U procesu titranja vrijedi zakon očuvanja energije

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Ku^2 = \frac{1}{2}KA^2 \text{ (konstanta)}$$

Kinetička energija raste, a potencijalna pada. Kada masa  $m$  prolazi kroz položaj ravnoteže ( $u=0$ ) imamo

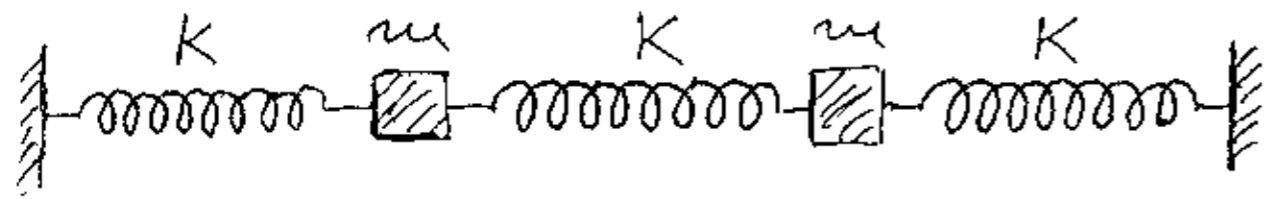
$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}KA^2$$

tj. kinetička energija je dosegla maksimum

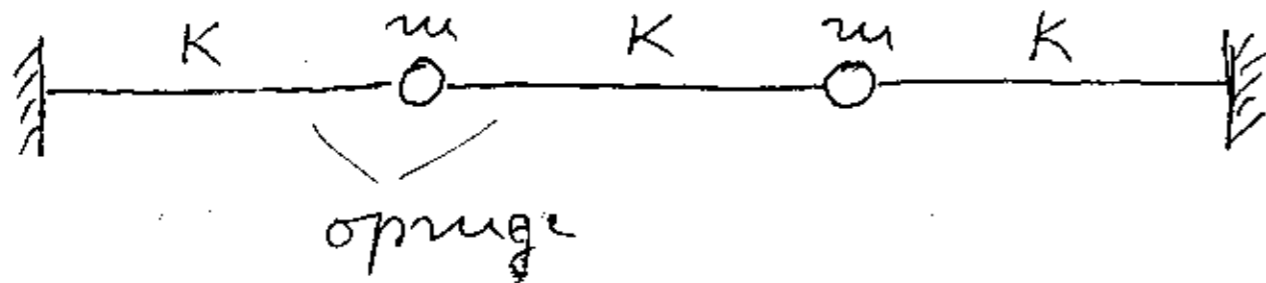
Prema tome, na harmonijsko titranje možemo gledati kao na proces u kojemu se potencijalna energija i kinetička energija nizmijence pretvaraju jedna u drugu.

Važno je uočiti da postoje trenuci u kojima je jedna od tih energija nula, a druga je maksimalna.

## 1.2. Sustav s dvije jedruške čestice



U buduću ćemo crtati simbolički



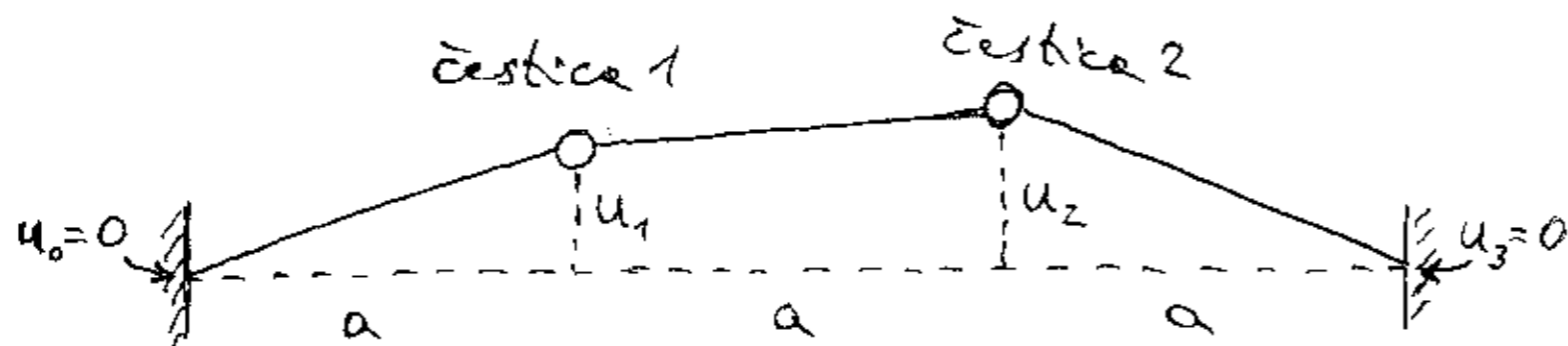
Opcenito se titranje ne odvija jednom jedinom frekvencijom.

6. pokus:

općenito titranje

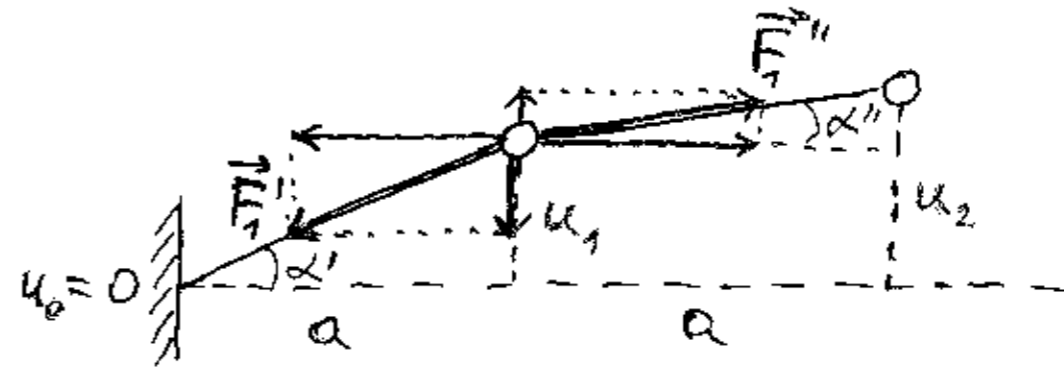
Pitanje:

Je li moguće kolektivno titranje jednom jedinom frekvencijom?



ukupna duljina  $L=3a$

Razmotrimo sile na česticu 1



Za povratnu silu (dvi sujerna titranja) imamo

$$\begin{aligned}
 F_1 &= -F_1' \sin \alpha' + F_1'' \sin \alpha'' = \\
 &= -K(a_{u_{01}} - a_0) \frac{u_1 - u_0}{a_{u_{01}}} + K(a_{u_{12}} - a_0) \frac{u_2 - u_1}{a_{u_{12}}} = \\
 &= -K \left(1 - \frac{a_0}{a_{u_{01}}}\right) (u_1 - u_0) + K \left(1 - \frac{a_0}{a_{u_{12}}}\right) (u_2 - u_1)
 \end{aligned}$$

$\nwarrow$  zadržavamo za jako rastegnute opruge  $\nearrow$

$$\begin{aligned}
 F_1 &\approx -K(u_1 - u_0) + K(u_2 - u_1) = \\
 &= -[K(u_1 - u_0) + K(u_1 - u_2)]
 \end{aligned}$$

Povratna sila na neku česticu ovisi o razlikama pomaka iz položaja ravnoteže te čestice i susjednih čestice.

Što je s komponentama sile okomito na površinu sile?

$$-F_1' \cos \alpha' + F_1'' \cos \alpha'' = -K(a_{u_{01}} - a_0) \frac{a}{a_{u_{01}}} + K(a_{u_{12}} - a_0) \frac{a}{a_{u_{11}}}$$

$$= -K \left(1 - \frac{a_0}{a_{u_{01}}}\right) a + K \left(1 - \frac{a_0}{a_{u_{12}}}\right) a \approx -Ka + Ka = 0$$

poništavaju se  
zanimljivo za jako rastegnute opruge

Postavljamo uvjet da obje čestice titraju istom frekvencijom

$$\omega^2 = \frac{-F_1}{mu_1} = \frac{-F_2}{mu_2}$$

$$\frac{K(u_1 - u_0) + K(u_1 - u_2)}{mu_1} = \frac{K(u_2 - u_1) + K(u_2 - u_3)}{mu_2}$$

$$u_0 = u_3 = 0 \quad \frac{2u_1 - u_2}{u_1} = \frac{2u_2 - u_1}{u_2}$$

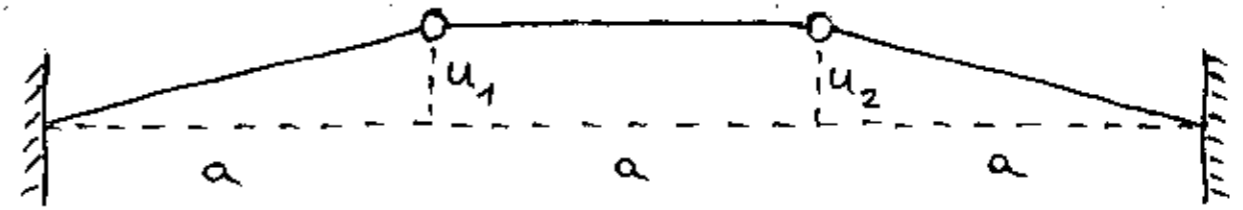
Uvedimo supstituciju  $w = \frac{u_2}{u_1}$

$$2 - w = 2 - \frac{1}{w} \Rightarrow w^2 = 1 \Rightarrow w_{1,2} = \pm 1$$

Dakle, imamo dva načina titranja:

1)  $u_2(t) = u_1(t)$  prvi način titranja (prvi mod)  
lat. modus = način  
engl. mode = način

U svakom trenutku pomak druge čestice jednak je pomaku prve čestice.



Označimo frekvenciju prvog načina titranja (prvog mode) s  $\omega^{(1)}$ .

$$(\omega^{(1)})^2 = \frac{K}{m} \frac{2u_1 - u_2}{u_1} = \frac{K}{m} \frac{2u_2 - u_1}{u_2} = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega^{(1)} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Ako su čestice na rjivalima konačne duljine  $l$

$$(\omega^{(1)})^2 = \frac{g}{l} + \frac{K}{m} \Rightarrow \omega^{(1)} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{K}{m}}$$

7. pokus

prvi način (mod) titranja

Gibanje pojedinih čestica je harmonično

$$u_1(t) = A_1 \sin(\omega^{(1)}t + \varphi_1)$$

$$u_2(t) = A_2 \sin(\omega^{(1)}t + \varphi_1)$$

frekv. je ista  
 $\omega^{(1)}$   
za obje čestice

U svakome trenutku je  $u_1(t) = u_2(t)$   
pa mora biti zadovoljeno

$$A_1 = A_2 \quad \text{jednake amplitude}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{jednake faze u } t=0$$

Ubruduće ćemo uvijek početi računati vrijeme od trenutka kada su čestice u maksimalnim otklonima, a to je ekvivalentno stavljajući

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$u_1(t) = A_1 \sin\left(\omega^{(1)}t + \frac{\pi}{2}\right) = A_1 \cos \omega^{(1)}t$$

$$u_2(t) = A_2 \sin\left(\omega^{(1)}t + \frac{\pi}{2}\right) = A_2 \cos \omega^{(1)}t$$

$$\underline{\underline{A_1 = A_2}}$$

Ovakav izbor odgovara početnim uvjetima koje ostvarujemo u prikazanim pokusima (u  $t=0$  stavljamo  $u_1 = A_1$ ,  $u_2 = A_2$ , a brzine su nule).

2)  $u_2 = -u_1$  drugi način titranja (drugi mod)



oznaka za drugi mod

$$(\omega^{(2)})^2 = \frac{K}{m} \frac{2u_1 - u_2}{u_1} = \frac{K}{m} \frac{2u_2 - u_1}{u_2} = \frac{3K}{m} \Rightarrow \omega^{(2)} = \sqrt{\frac{3K}{m}}$$

Ako su čestice na njihovima konačnim duljinama  $l$

$$(\omega^{(2)})^2 = \frac{g}{l} + \frac{3K}{m} \Rightarrow \omega^{(2)} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3K}{m}}$$

8. pokus:

drugi način (mod) titranja

Gibanje pojedinih čestica u drugom načinu (modu) titranja

$$u_1(t) = A_1 \cos \omega^{(2)}t$$

$$\underline{\underline{A_2 = -A_1}}$$

$$u_2(t) = A_2 \cos \omega^{(2)}t$$

↑ obje čestice titraju istom frekvencijom  $\omega^{(2)}$

Diskusija o frekvencijama  $\omega^{(1)}$  i  $\omega^{(2)}$

Računski smo dobili  $\omega^{(2)} > \omega^{(1)}$  a to možemo provjeriti i eksperimentalno

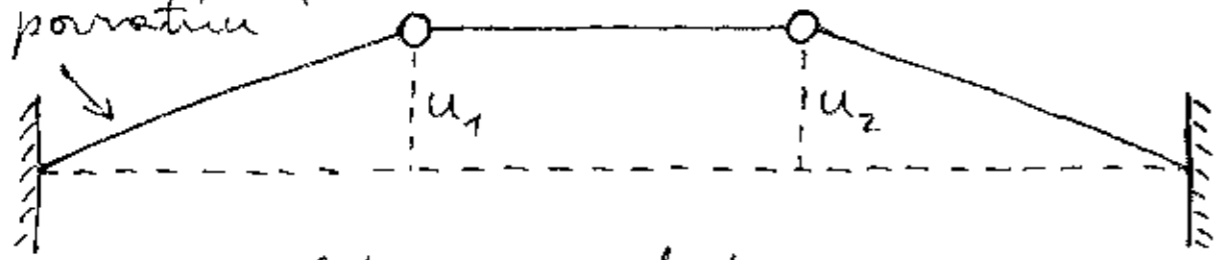
9. pokus:

usporedba  $\omega^{(1)}$  i  $\omega^{(2)}$

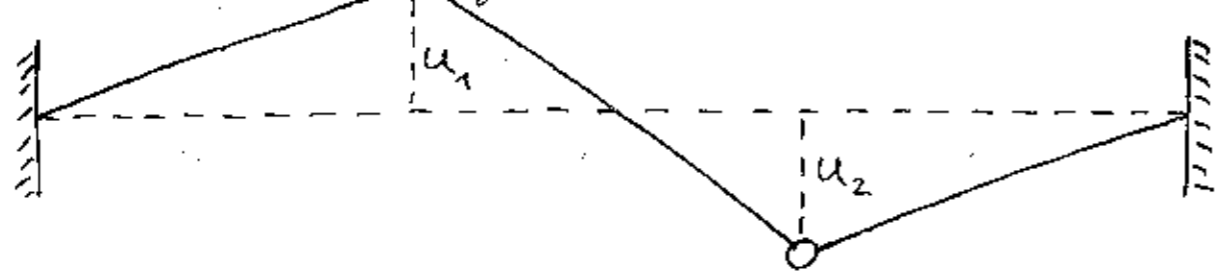
Razlog leži u tome što su povratne sile u drugom modu veće od onih u prvom modu.

Razmotrimo sile na prvu česticu

samo ove opruge  
daje povratnu  
silu



obje opruge daju  
povratnu silu



Ako je povratna sila veća onda čestica titra  
brže.

### Diskusija o energiji

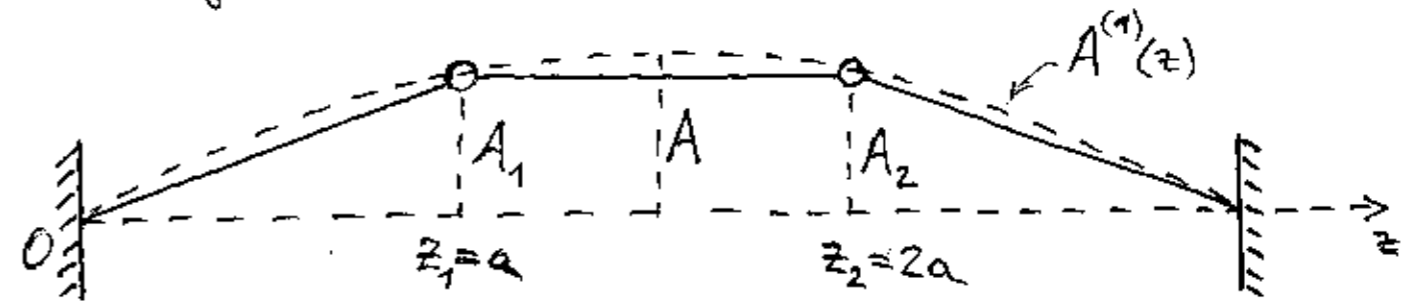
U svakome od dvaju modova obje čestice se istodobno  
nalaze u svojim amplitudnim položajima kada  
je potencijalna energija maksimalna a kinetička  
iščezava.

Također, obje čestice istodobno prolaze kroz položaj  
ravnoteže kada potencijalna energija iščezava a  
kinetička je maksimalna.

Dakle, način titranja (mod) je kolektivno gibanje  
u kojemu se ukupna potencijalna energija  
u cijelosti pretvara u ukupnu kinetičku energiju  
i obrnuto.

### Prostorni oblik moda

Razmotrimo položaji čestice u trenutku kada  
su dosegnuti maksimalni otkloni (amplitude)



Postavimo os  $z$  duž sužera opruga i čestica  
u položaju ravnoteže. Prva čestica ima  
koordinatu duž te osi  $z_1 = a$ , a druga  $z_2 = 2a$ .

Otkloni čestica skomito na os  $z$  su  $A_1$  i  $A_2$ .  
Želimo imati funkciju koja nam daje  
otklon pojedine čestice u ovisnosti o njenoj  
koordinati duž osi  $z$ .

Funkcija koja zadovoljava ovaj zahtjev u slučaju  
prvog moda glasi

$$A^{(1)}(z) = A \sin \pi \frac{z}{L}$$

Ova ima nule za  $z=0$  (lijevi čvrsti kraj) i  
 $z=L$  (desni čvrsti kraj) a maksimum za  $z = \frac{L}{2}$

### Napomena:

Opruge se kod rasturanja ne savijaju pa njih  
crtaemo ravnom crtama. Funkcija  $A^{(1)}(z)$  je  
zaobljena kao sinusoida.

Funkcija  $A^{(1)}(z)$  predstavlja zamisljenu krmilju (crtkana linija na slici) na kojoj se nalaze čestice u trenutku maksimalnog otklona iz položaja ravnoteže.

Veličina  $A$  naziva se amplituda moda. Ako je ona zadržana onda su amplitude pojedinih čestica

$$A_i = A \sin \pi \frac{z_i}{L}, \quad i=1,2$$

tj. moramo samo uvrstiti koordinatu  $z_i$  za određenu česticu.

Npr. za prvu česticu ( $i=1$ ) imamo  $z_1 = a$  pa je njena amplituda

$$A_1 = A \sin \pi \frac{a}{L} = A \sin \pi \frac{a}{3a} = A \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} A$$

(ukupni razmak je  $L=3a$ )

Za drugu česticu ( $i=2$ ) imamo  $z_2 = 2a$

$$A_2 = A \sin \pi \frac{2a}{L} = A \sin \pi \frac{2a}{3a} = A \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} A$$

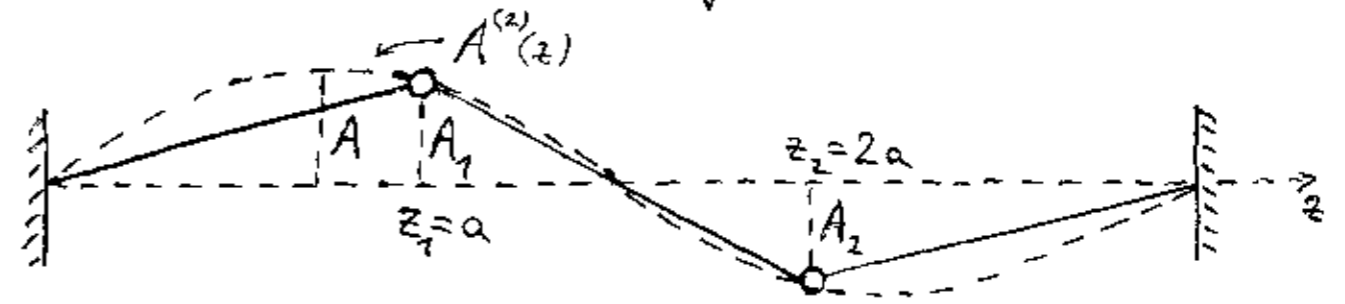
Možemo definirati valnu duljinu moda kao period funkcije oblika moda.

Kod prvog moda imamo samo pola valne duljine između dva čvrsta kraja, tj.

$$L = \frac{\lambda^{(1)}}{2}$$

$\lambda^{(1)}$  je valna duljina prvog moda

Razmotrimo sada drugi mod



Prostorni oblik drugog moda dan je funkcijom

$$A^{(2)}(z) = A \sin 2\pi \frac{z}{L}$$

Amplitude pojedinih čestica dobivamo uvrštavanjem njihovih koordinata  $z_i$  ( $i=1,2$ ).

$$A_1 = A \sin 2\pi \frac{a}{L} = A \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} A$$

$$A_2 = A \sin 2\pi \frac{2a}{L} = A \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} A$$

U drugome modu imamo cijelu valnu duljinu između dva čvrsta kraja, tj.

$$L = \lambda^{(2)}$$

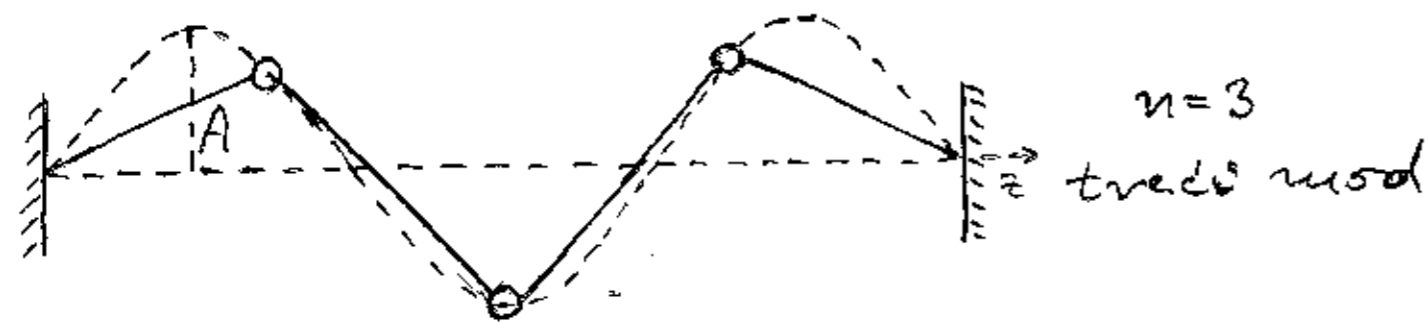
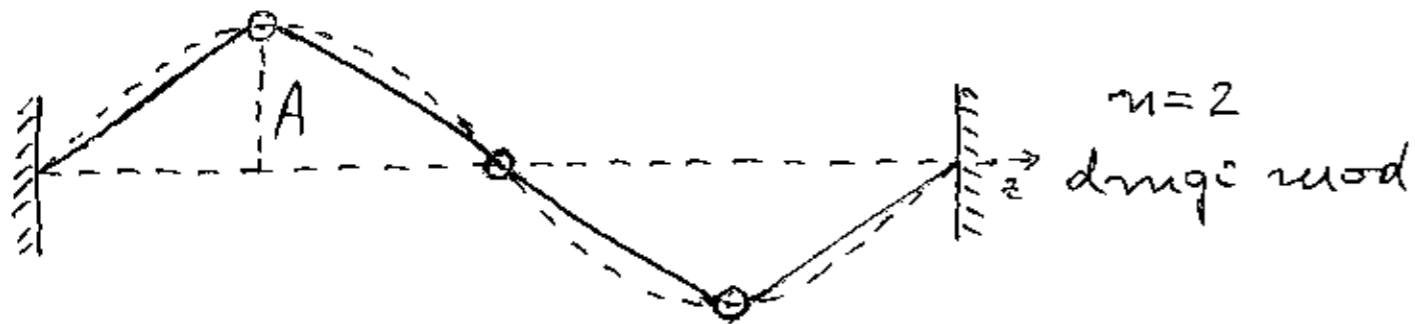
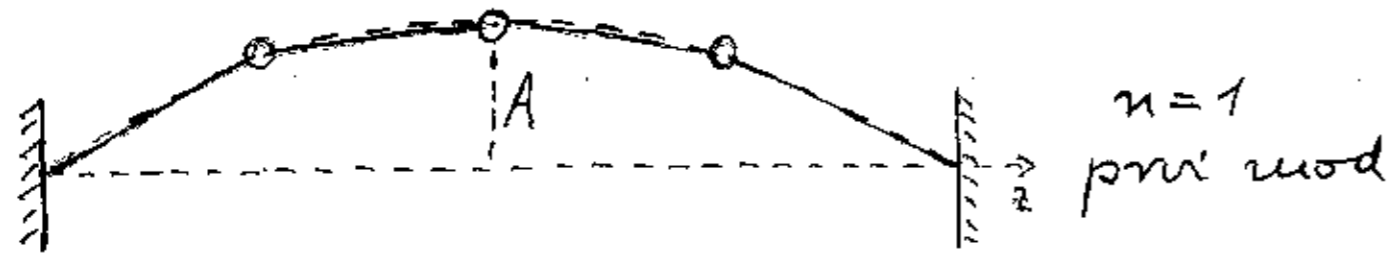
$\lambda^{(2)}$  je valna duljina drugog moda

Vidimo da je valna duljina višeg moda manje ( $\lambda^{(2)} < \lambda^{(1)}$ ).

### 1.3. Sustavi s više jednakih čestica

Razmotrimo najprije sustav od tri čestice. Ako slijedimo logiku započetu kod sustava od dvije čestice, možemo očekivati sada tri mode s valnim duljinama  $\lambda^{(n)}$

$$L = n \frac{\lambda^{(n)}}{2} \quad (n=1, 2, 3)$$



U  $n$ -tom modu nalazimo  $n$  puta po pola valne duljine između dva čvrsta kraja.

#### 10. pokus:

načini titranja (modovi) u sustavu od tri jednake čestice

#### Zapažanja:

- 1) U prvome modu sve tri čestice gibaju se u istome smjeru.
- 2) U drugome modu srednja čestica miruje a prva i treća se gibaju u suprotnim smjerovima.
- 3) U trećem modu druga čestica ima veći otklon od položaja ravnoteže nego prva i treća i giba se u suprotnom smjeru od njih.
- 4) Vlastite frekvencije titranja pojedinih modova  $\omega^{(1)} < \omega^{(2)} < \omega^{(3)}$

To je logično ako uočimo povratne sile na dnu čestice u svakom od modova.

Pretpostavljene funkcije oblika moda (crtkane linije na slici)

$$A^{(n)}(z) = A \sin\left(n\pi \frac{z}{L}\right)$$

Kada se  $z$  mijenja od 0 do  $L$  argument sinusne funkcije se promijeni za  $n\pi$ , tj.  $n$  puta po pola perioda.

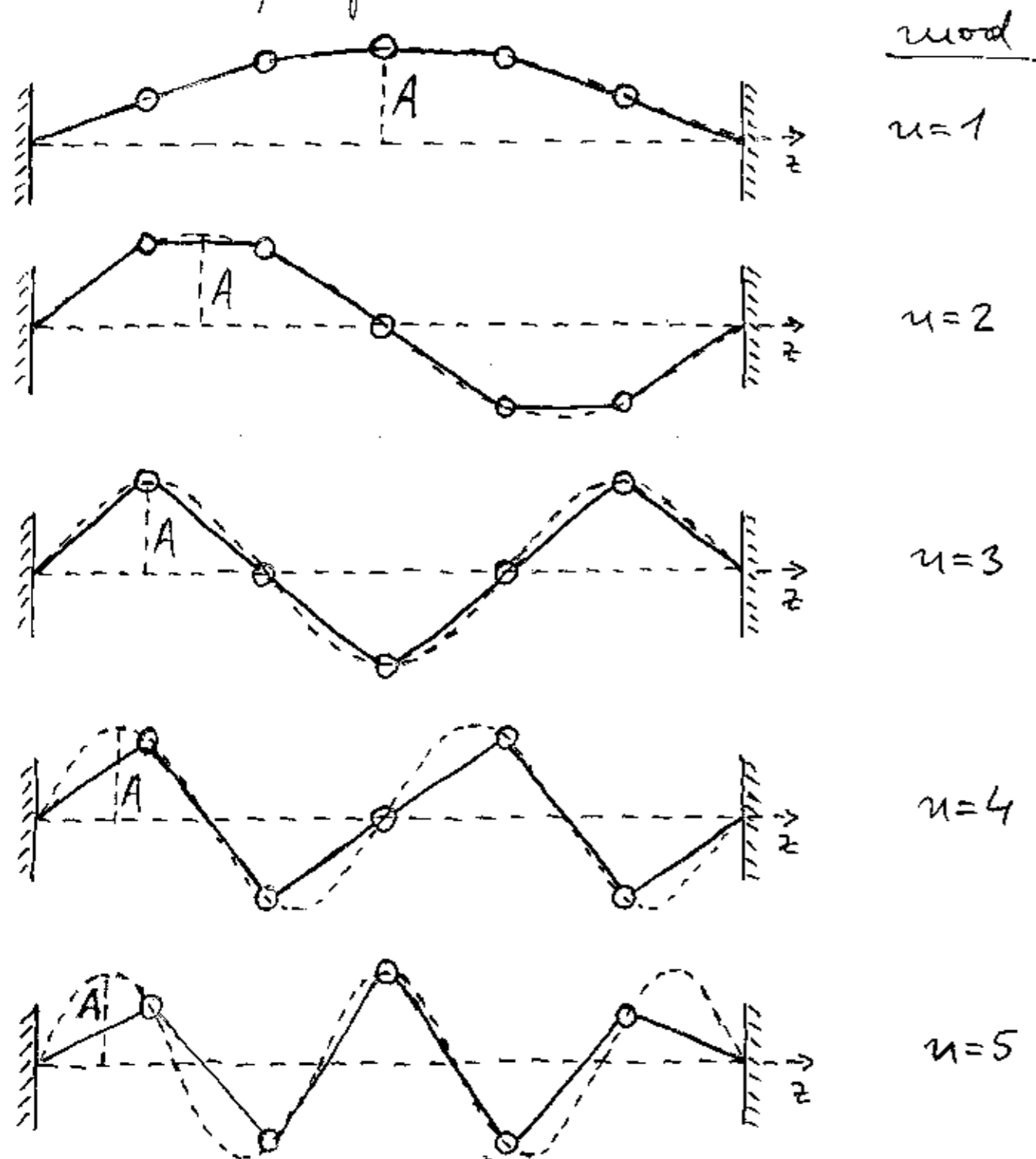
Ako iskoristimo relaciju  $L = n \frac{\lambda^{(n)}}{2}$ , možemo funkciju oblika moda pisati

$$A^{(n)}(z) = A \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda^{(n)}}\right)$$

Kada se  $z$  mijenja od 0 do  $\lambda^{(n)}$  argument sinusne funkcije promijeni se za  $2\pi$  (puni period)



Prikažimo još i primjer od pet čestica vezanih oprugama



Između dva učvršćena kraja nalazimo  $n$  puta po pola valne duljine

$$L = n \frac{\lambda^{(n)}}{2}$$

Napomena:

Razmak  $L$  je fiksiran a valna duljina višeg moda je manje ( $\lambda^{(n)} = \frac{2L}{n}$ ).

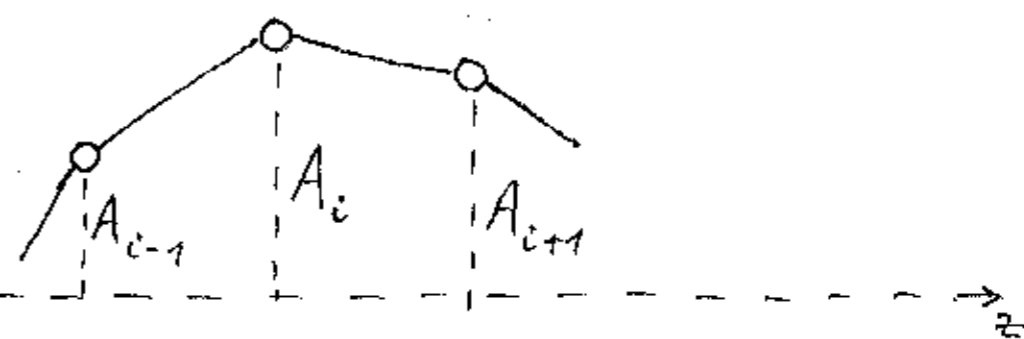
U navedenim primjerima pretpostavljali smo da funkcije prostornog oblika moda glasi

$$A^{(n)}(z) = A \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda^{(n)}}\right)$$

Sada ćemo dokazati njenu ispravnost i to na općenitom sustavu od  $N$  jednakih čestica vezanih oprugama.

Označimo sa "i" redni broj čestice u nizu od ukupno  $N$  čestica ( $i=1, 2, \dots, N$ ).

Razmotrimo amplitudne položaje čestice u nekom od mogućih modova (npr.  $n$ -ti mod)



Mod je kolektivno titranje svih čestica istom frekvencijom. Prema tome, veličina

$$(\omega^{(n)})^2 = \frac{K(A_i - A_{i-1}) + K(A_i - A_{i+1})}{m A_i}$$

može biti jednaka za sve čestice, tj. neovisna o indeksom "i".

Također ta veličina može biti konstantna u vremenu (titranje stalnom frekvencijom).

Ako je pretpostavljena funkcija oblika moda ispravna, onda se amplituda pojedinih čestica dobija uvrštavanjem njihovih koordinata duž osi  $z$

$$A_i = A \sin 2\pi \frac{z_i}{\lambda^{(n)}} = A \sin 2\pi \frac{ia}{\lambda^{(n)}}$$

$$A_{i\pm 1} = A \sin 2\pi \frac{z_{i\pm 1}}{\lambda^{(n)}} = A \sin 2\pi \frac{(i\pm 1)a}{\lambda^{(n)}}$$

Ishodimo poznatu trigonometrijsku relaciju

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

pa analogno možemo pisati

$$A_{i\pm 1} = A \left[ \sin\left(2\pi \frac{ia}{\lambda^{(n)}}\right) \cos\left(2\pi \frac{a}{\lambda^{(n)}}\right) \pm \cos\left(2\pi \frac{ia}{\lambda^{(n)}}\right) \sin\left(2\pi \frac{a}{\lambda^{(n)}}\right) \right]$$

Moramo izračunati veličinu

$$(\omega^{(n)})^2 = \frac{k}{m} \frac{2A_i - A_{i-1} - A_{i+1}}{A_i} = \frac{k}{m} \left( 2 - \frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i} \right)$$

Iz prethodnog izraza slijedi

$$A_{i-1} + A_{i+1} = \underbrace{2A \sin\left(2\pi \frac{ia}{\lambda^{(n)}}\right) \cos\left(2\pi \frac{a}{\lambda^{(n)}}\right)}_{= A_i}$$

Prema tome

$$(\omega^{(n)})^2 = \frac{2k}{m} \left( 1 - \cos 2\pi \frac{a}{\lambda^{(n)}} \right)$$

tj. ne ovisi o "i" (jednako za sve čestice).

Timе smo dokazali da iz pretpostavljene funkcije oblika moda slijede takvi odnosi amplituda pojedinih čestica da sve čestice titraju istom frekvencijom.

Ujedno smo dobili izraz za praktično izračunavanje frekvencija pojedinih modova.

Ishodimo poznatu trigonometrijsku relaciju

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

pa imamo

$$\boxed{\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{4k}{m}} \sin \frac{\pi a}{\lambda^{(n)}}} \quad \text{dispersionjska relacija}$$

Dispersionjska relacija pokazuje ovisnost frekvencije moda o valnoj dužini moda.

Za općeniti sustav od  $N$  čestica razmaknutih za "a" imamo

$$L = (N+1)a$$

Za  $n$ -ti mod u tome sustavu vrijedi

$$L = n \frac{\lambda^{(n)}}{2}$$

Izjednačavanjem dobivamo

$$n \frac{\lambda^{(n)}}{2} = (N+1)a$$

Prema tome argument u sinusnoj funkciji disperzijske relacije iznosi

$$\frac{\pi a}{\lambda^{(n)}} = \frac{n}{N+1} \frac{\pi}{2}$$

$$n=1 \text{ (prvi mod)} \Rightarrow \frac{\pi a}{\lambda^{(1)}} = \frac{1}{N+1} \frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$$

kada je  $N$   
jako velik broj

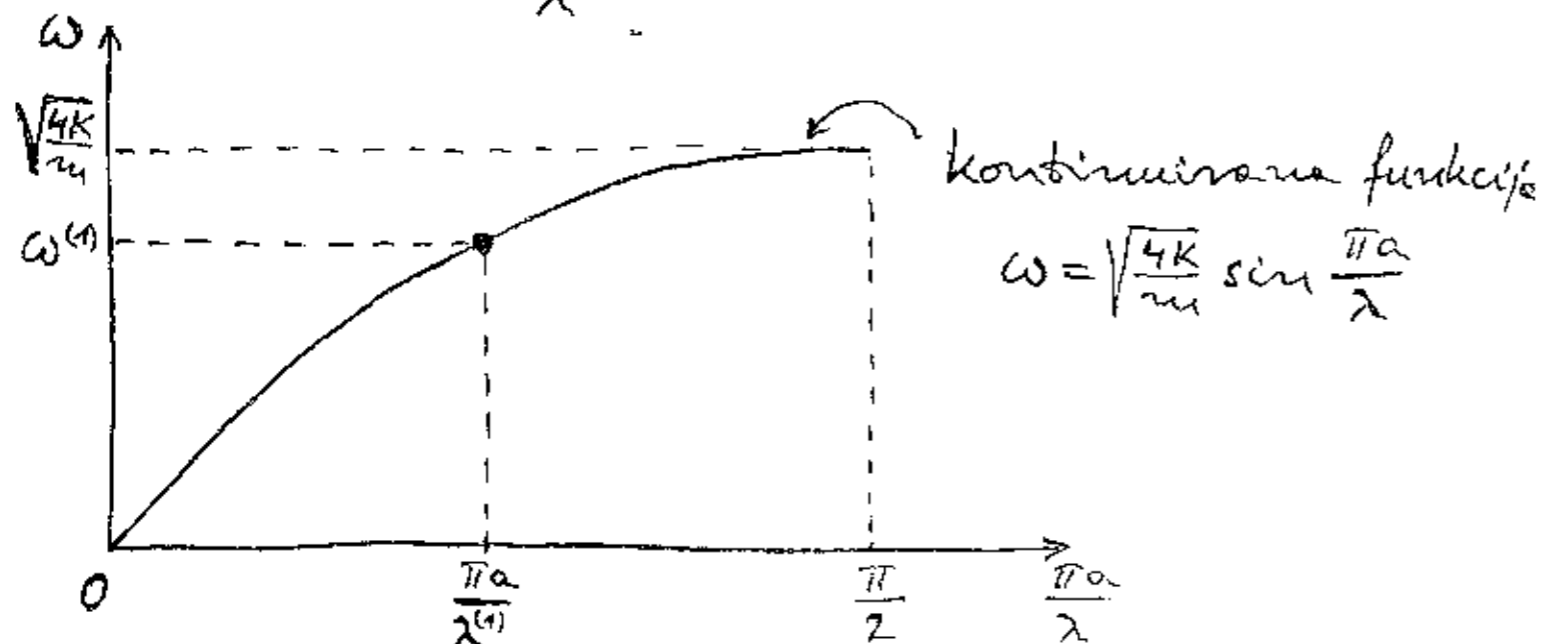
$$n=N \text{ (najviši mod)} \Rightarrow \frac{\pi a}{\lambda^{(N)}} = \frac{N}{N+1} \frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

Dakle,  $\frac{\pi a}{\lambda^{(n)}}$  može poprimiti vrijednosti između 0 i  $\frac{\pi}{2}$ .

Disperzijska relacija vrijedi za bilo koji ukupan broj čestica  $N$ . Izvrsimo provjere na ranije obrađanim primjerima.

Za  $N=1$  (samo jedna čestica) imamo samo jedan mod  $n=1$

$$\frac{\pi a}{\lambda^{(1)}} = \frac{1}{1+1} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$



Nacrtamo disperzijsku krivulju kao da se  $\lambda$  može kontinuirano mijenjati pa argument sinusne funkcije  $\frac{\pi a}{\lambda}$  ide od 0 do  $\frac{\pi}{2}$ .

Zatim na disperzijskoj krivulji označimo točku koje ima koordinate  $(\frac{\pi a}{\lambda^{(1)}}, \omega^{(1)})$  na prikazanim osima. Ta točka predstavlja mod jer prikazuje njegove parametre (valnu duljinu i frekvenciju).

U ovom slučaju  $\frac{\pi a}{\lambda^{(1)}}$  nalazi se po sredini između 0 i  $\frac{\pi}{2}$ .

Frekvenciju možemo lako izračunati

$$\omega^{(1)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

(Ranije smo tu frekvenciju označavali s  $\omega_0$ .)

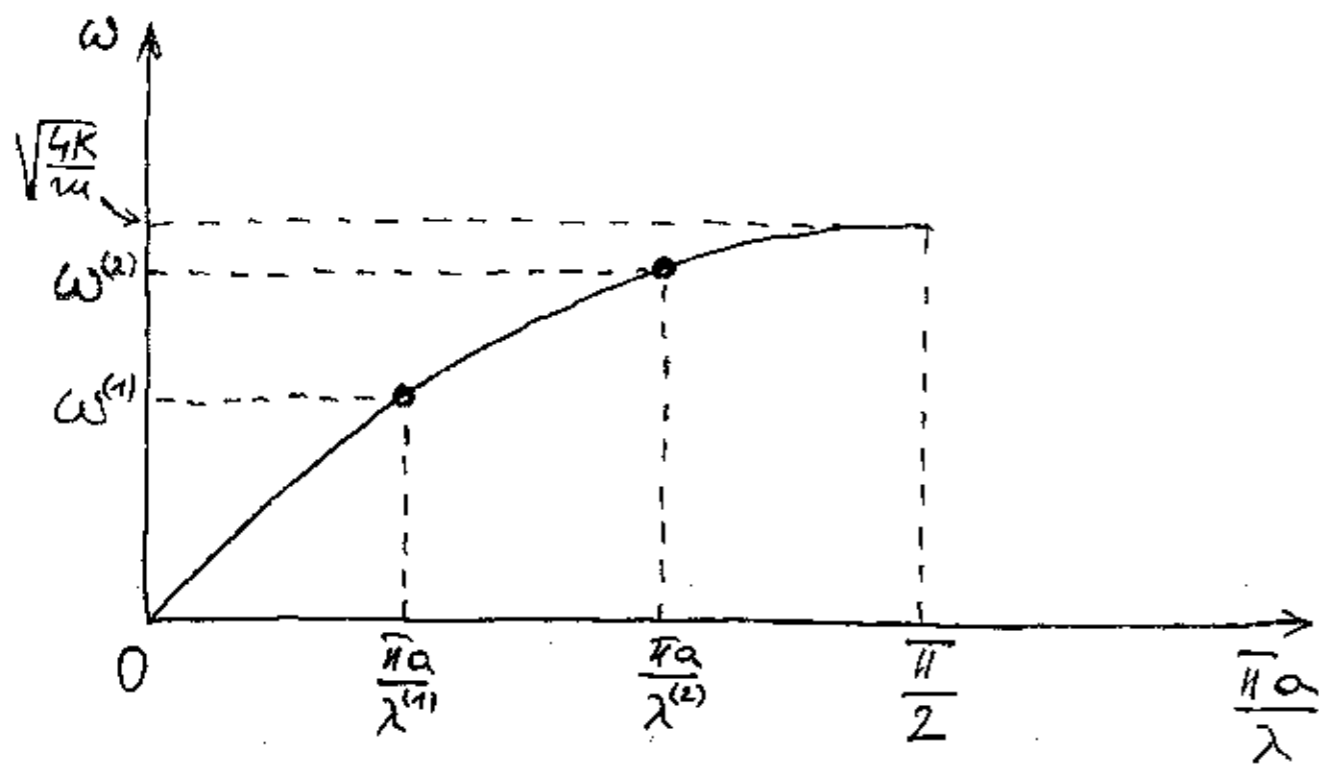
Zbog nelinearnosti disperzijske krivulje  $\omega^{(1)}$  je veće od polovice maksimalne vrijednosti  $\sqrt{\frac{4K}{m}}$ .

Za  $N=2$  (dviije čestice) moguće su dva moda

$$n=1 \text{ (prvi mod)} \Rightarrow \frac{\pi a}{\lambda^{(1)}} = \frac{1}{2+1} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} \frac{\pi}{2}$$

$$n=2 \text{ (drugi mod)} \Rightarrow \frac{\pi a}{\lambda^{(2)}} = \frac{2}{2+1} \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \frac{\pi}{2}$$

Interval od 0 do  $\frac{\pi}{2}$  podijelimo na 3 dijela i tako nalazimo  $\frac{\pi a}{\lambda^{(1)}}$  i  $\frac{\pi a}{\lambda^{(2)}}$ .



Možemo lako izračunati vlastite frekvencije modova

$$\omega^{(1)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \checkmark$$

$$\omega^{(2)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3K}{m}} \quad \checkmark$$

To su upravo one frekvencije koje smo dobili iz početnog razmatranja u odjeljku 1.2.

Napomena:

Točke na disperzijskoj krivulji ne predstavljaju čestice koje titraju!!

(Titranje čestica se prikazuje u dijagramu koji ima os  $x$  i okomito na nju os  $u$ .)

Naznačene točke na disperzijskoj krivulji predstavlja par vrijednosti  $(\frac{\pi a}{\lambda^{(n)}}, \omega^{(n)})$  koji odgovaraju  $n$ -tom modu.

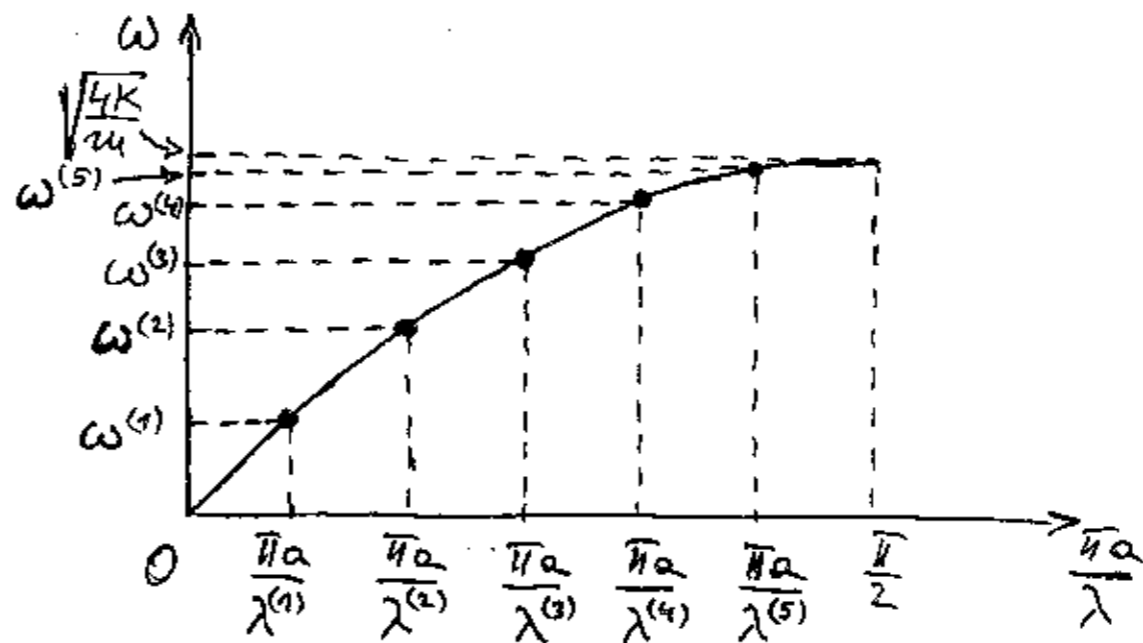
Iz disperzijske relacije možemo odrediti vlastite frekvencije modova u bilo kojem sustavu od  $N$  čestica vezanih oprugama.

Uzmimo npr.  $N=5$  (pet čestica)

$$n=1 \text{ (prvi mod)} \Rightarrow \frac{\pi a}{\lambda^{(1)}} = \frac{1}{5+1} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{6} \frac{\pi}{2}$$

$$\vdots$$

$$n=5 \text{ (najviši mod)} \Rightarrow \frac{\pi a}{\lambda^{(5)}} = \frac{5}{5+1} \frac{\pi}{2} = \frac{5}{6} \frac{\pi}{2}$$



Zaključci:

1) Vrijednosti  $\frac{\pi a}{\lambda^{(n)}}$  su ekvidistantne ali frekvencije  $\omega^{(n)}$  nisu ekvidistantne zbog nelinearnosti disperzijske krivulje.

2) Za dane  $K$  i  $m$  postoji maksimalna frekvencija

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{4K}{m}}$$

tj. sustav nikada ne može titrati višom frekvencijom.

Ako su mase obješene ne rjehala

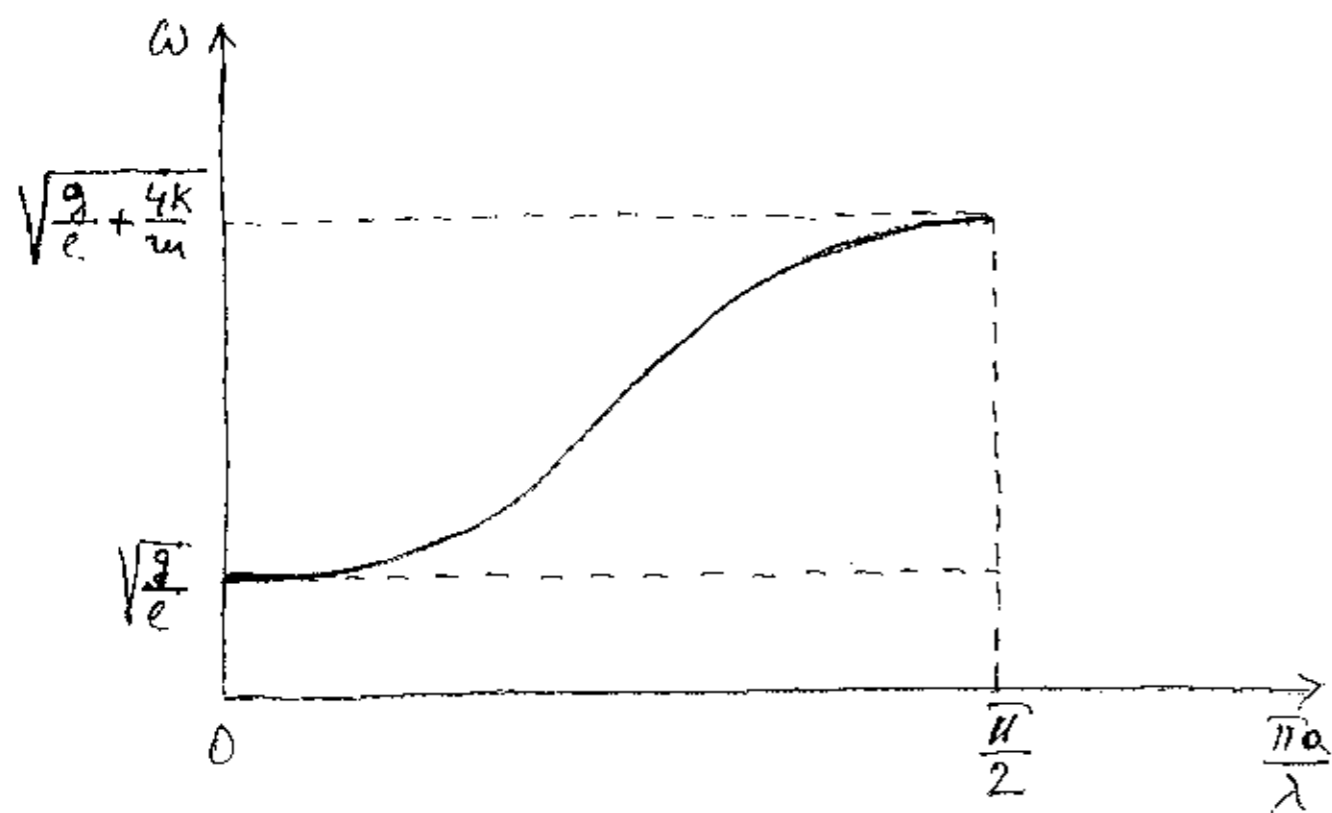
$$(\omega^{(n)})^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{\pi a}{\lambda^{(n)}}$$

↑  
od povratne  
sile rjehala

↑  
od povratne  
sile opruga

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{\pi a}{\lambda^{(n)}}}$$

dispersijska  
relacija



Sustav ne može titrati frekvencijom nižom od  $\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , niti višom od  $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{4K}{m}}$

Vrijednost  $\frac{\pi a}{\lambda^{(n)}}$  može biti bilo gdje između 0 i  $\frac{\pi}{2}$ , no pripadna frekvencija je uvijek između  $\omega_{\min}$  i  $\omega_{\max}$ .

## 1.4. Aproximacija kontinuuma

Neka je  $N$  (broj čestica) jako velik.

Kod nižih modova ( $n \ll N$ ) imamo unutar čestica unutar  $\lambda^{(n)}$ , Stoga nam se sustav predstavlja praktički kao kontinuum.

Niz masa  $m$  nalazi se na udaljenosti  $a$ , pa je linijska gustoća mase

$$\rho = \frac{m}{a}$$

Svaka je opruga jednako rastegnuta (u ravno-  
težnom stanju), pa možemo reći da postoji  
sila napetosti  $T$

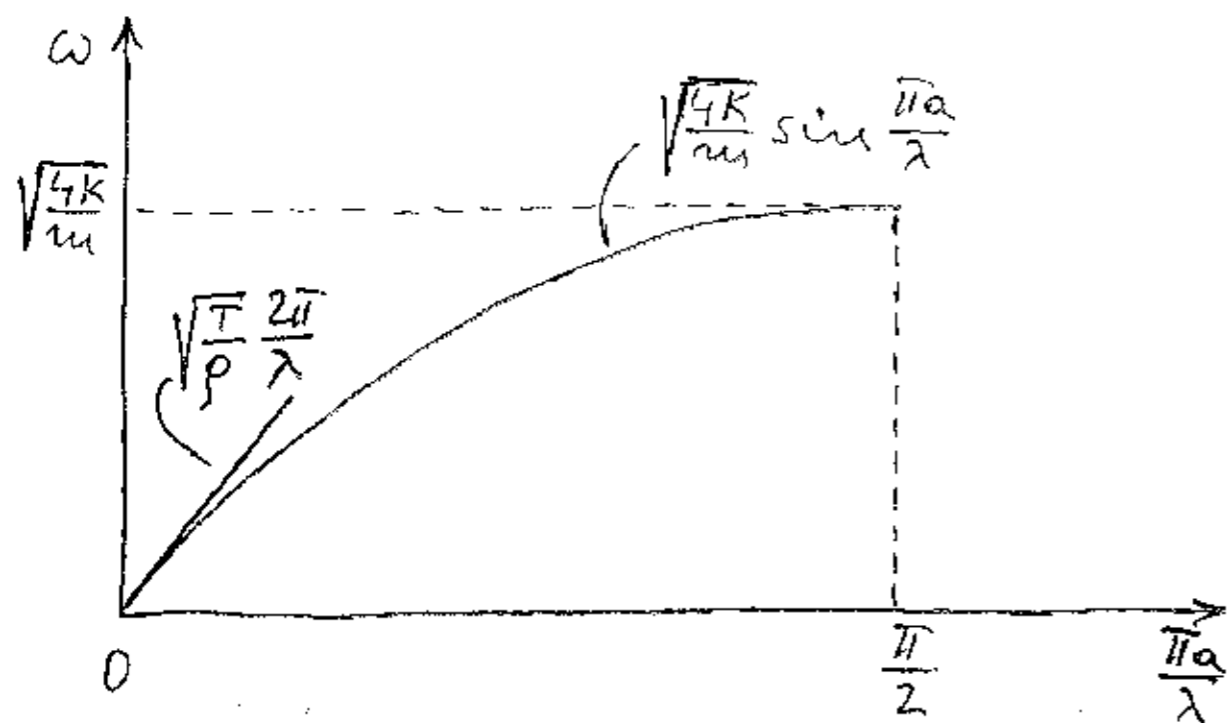
$$T = K(a - a_0) = Ka \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \approx Ka$$

zauzimerimo

Kako glasi dispersijska relacija u aproksimaciji kontinuuma?

$$n \ll N \Rightarrow \frac{\pi a}{\lambda^{(n)}} = \frac{n}{N+1} \frac{\pi}{2} \ll 1 \Rightarrow \sin \frac{\pi a}{\lambda^{(n)}} \approx \frac{\pi a}{\lambda^{(n)}}$$

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{4K}{m} \frac{\pi a}{\lambda^{(n)}}} = \sqrt{\frac{Ka}{m}} \frac{2\pi}{\lambda^{(n)}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{2\pi}{\lambda^{(n)}}$$



Aproximacija kontinuuma je dobra za velike valne dužine ( $\lambda \gg a$ ).

Svaka elastična nit predstavlja (praktički) kontinuiranu masu i kontinuiranu elastičnost.

11. pokušaj:

niz modova u velikoj opzori  
i gumenom crjevom

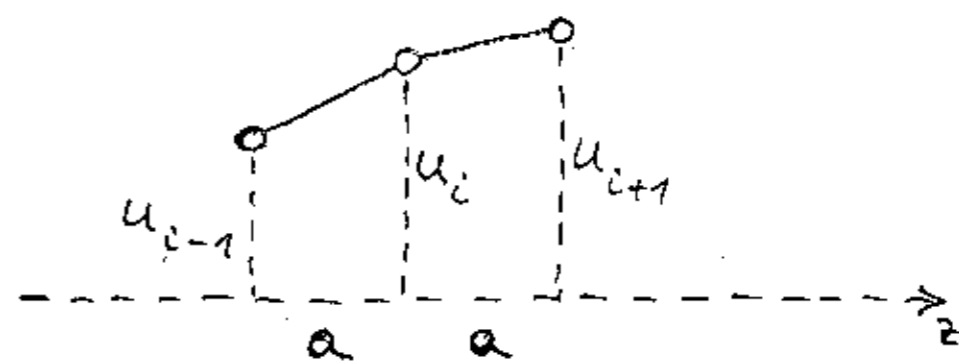
Medutim, nema apsolutnog kontinuuma. Bilo koje sredstvo ipak sadrži zmatu strukturu (npr. atomi na udaljenosti  $a$ ).

Za visoke modove  $\lambda^{(m)}$  postaje jako maleno i usporedivo s  $a$ . Tada aproksimacija kontinuuma ne vrijedi.

Minimalna valna dužina je za  $\frac{\lambda^{(m)}}{2} = a$  (cik-cak konfiguracija). Tada je  $\frac{\pi a}{\lambda^{(m)}} = \frac{\pi}{2}$ .

Valna jednačina u aproksimaciji kontinuuma

Krenimo od jednačine gibanja za  $i$ -tu česticu u nizu



$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = - [K(u_i - u_{i-1}) + K(u_i - u_{i+1})]$$

U aproksimaciji kontinuuma pomaci iz položaja ravnoteže susjednih čestica malo se međusobno razlikuju. U graničnom slučaju ima smisla shvatiti pomake "u" kao funkciju pozicije na osi "z", tj. kao  $u(z)$ .

U tu svrhu jednačinu gibanja za  $i$ -tu česticu možemo pisati

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = Ka \left[ \frac{u_{i+1} - u_i}{a} - \frac{u_i - u_{i-1}}{a} \right]$$

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{a} \longrightarrow \left( \frac{\Delta u}{\Delta z} \right)_{i+1, i} \quad \text{desno od } i\text{-te čestice}$$

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{a} \longrightarrow \left( \frac{\Delta u}{\Delta z} \right)_{i, i-1} \quad \text{lijevo od } i\text{-te čestice}$$

Ove se dvije veličine međusobno razlikuju jer postoji neka zakrivljenost funkcije  $u(z)$ .

Ako jednačinu gibanja napišemo u obliku

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = K a^2 \frac{\left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right)_{i+1,i} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right)_{i,i-1}}{a}$$

$$\frac{\left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right)_{i+1,i} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right)_{i,i-1}}{a} \xrightarrow{za \ a \rightarrow 0} \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_i$$

↑  
zakrivljenost funkcije  
 $u(z)$  u točki "i"

Također uvedimo parametre kontinuuma

$$\frac{Ka^2}{m} = \frac{Ka}{\frac{m}{a}} \xrightarrow{za \ a \rightarrow 0} \frac{T}{\rho}$$

te ispuštimo indeks "i" jer se jednačina gibanja odnosi jednako na bilo koju česticu.

Tada dobivamo

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{T}{\rho} \frac{d^2 u}{dz^2}}$$

valna jednačina za kontinuum

Kako izgledaju modovi u kontinuumu?

Kontinuum smo dobili kao aproksimaciju za gust zrnati sustav. Prema tome, možemo očekivati iste modove ali kao kontinuirane funkcije od "z"

za n-ti mod  $u^{(n)}(z,t) = A^{(n)}(z) \cos \omega^{(n)} t$

Oblik moda u kontinuumu bio bi isti kao i kod niza čestica

$$A^{(n)}(z) = A \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda^{(n)}}\right)$$

Pitanje:

Da li je takva funkcija  $u^{(n)}(z,t)$  doista rješenje valne jednačine za kontinuum?

Provjera se obavlja uvrštavanjem  $u^{(n)}(z,t)$  u valnu jednačinu

$$-(\omega^{(n)})^2 A \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda^{(n)}}\right) \cos \omega^{(n)} t = -\frac{T}{\rho} \left(\frac{2\pi}{\lambda^{(n)}}\right)^2 A \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda^{(n)}}\right) \cos \omega^{(n)} t$$

Ova jednačina je zadovoljena ako je ispunjen uvjet

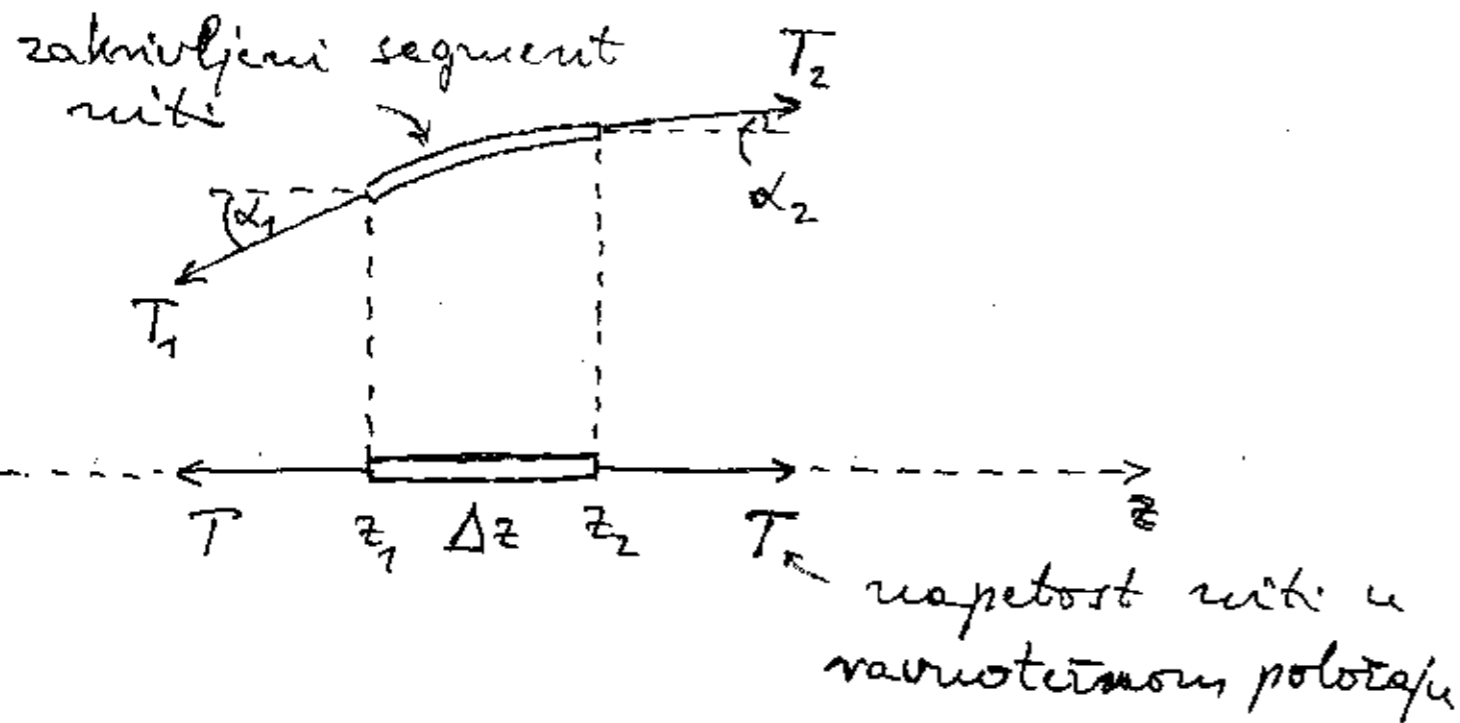
$$(\omega^{(n)})^2 = \frac{T}{\rho} \left(\frac{2\pi}{\lambda^{(n)}}\right)^2$$

Ovaj se uvjet podudara s ranije utvrđenom disperzijskom relacijom za kontinuum

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{2\pi}{\lambda^{(n)}} \quad \checkmark$$

Prema tome, funkcija  $u^{(n)}(z,t)$  je doista rješenje valne jednačine za kontinuum.

Valnu jednačbu možemo izvesti i izravno iz razmatranja kontinuirane elastične niti.



Horizontalne komponente napetosti moraju biti izjednačene (segment se ne pomiče lijevo-desno)

$$T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2 = T$$

Jednačba gibanja glasi

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = - (T_1 \sin \alpha_1 - T_2 \sin \alpha_2)$$

↑ masa segmenta  $m = \rho \Delta z$

$$T_1 \sin \alpha_1 = \frac{T}{\cos \alpha_1} \sin \alpha_1 = T \tan \alpha_1 = T \left( \frac{du}{dz} \right)_{z_1}$$

$$T_2 \sin \alpha_2 = T \left( \frac{du}{dz} \right)_{z_2}$$

$$\rho \Delta z \frac{d^2 u}{dt^2} = T \Delta z \frac{\left( \frac{du}{dz} \right)_{z_2} - \left( \frac{du}{dz} \right)_{z_1}}{\Delta z}$$

$\Delta z \rightarrow 0 \quad \frac{d^2 u}{dz^2}$

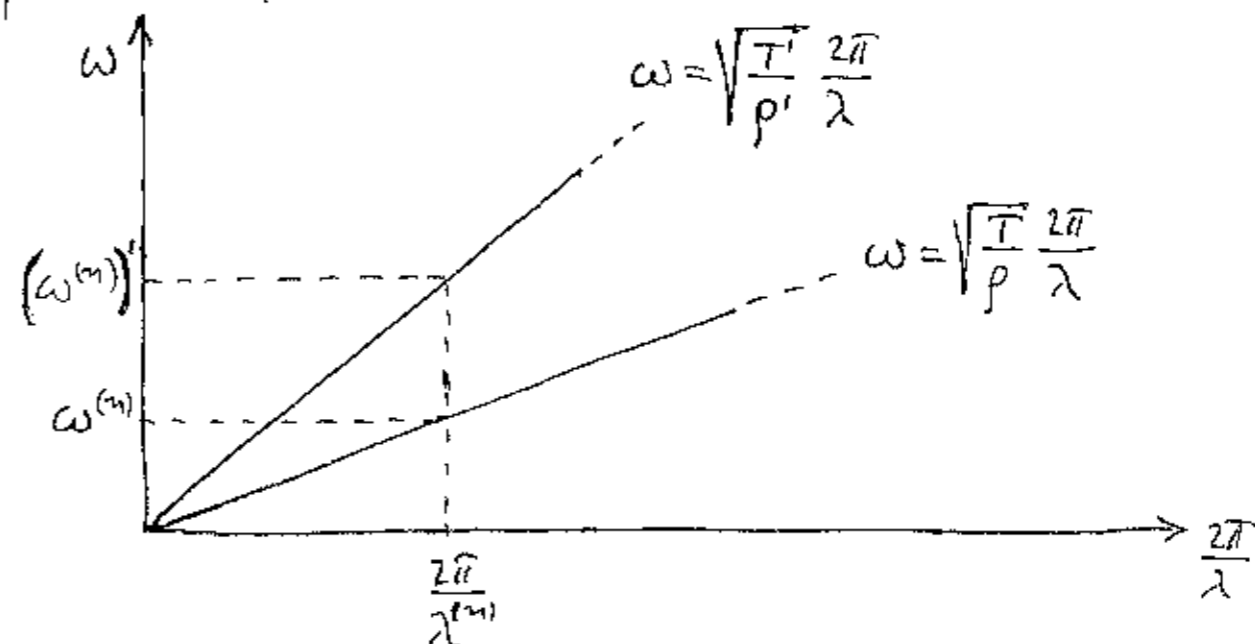
$$\boxed{\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{T}{\rho} \frac{d^2 u}{dz^2}} \quad \checkmark$$

Dobili smo opet valnu jednačbu za kontinuum.

### Promjena parametara sustava

Ako rastegnemo elastičnu nit povećava se njena napetost ( $T \rightarrow T', T' > T$ ) a smanji se njena gustoća ( $\rho \rightarrow \rho', \rho' < \rho$ ).

Ako ne mijenjamo razmak  $L$  između čvorova krajeva onda se ne mijenja ni valna duljina modova ( $L = n \frac{\lambda^{(n)}}$ ), ali se promijene frekvencije.



↑ ne mijenja se za dani "n"



Titranje u danom  $n$ -tom modu odvija se većom frekvencijom kada je elastična nit jače rastegnuta.

12. pokus:

titranje rastegnute gumenice cijevi

13. pokus:

titranje nategnute žice (primjer gitare)

Valni broj

Uvodimo veličinu

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \quad \text{valni broj} \quad (\text{jedinica je } \text{m}^{-1})$$

Valni broj nam kaže koliko valnih duljina  $\lambda$  ima u jedinici duljine.

(Npr. za  $\lambda = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\lambda} = 5 \text{ m}^{-1}$ , tj: 5 valnih duljina po metru.)

Također uvodimo veličinu

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{kutni valni broj}$$

Kutni valni broj nam kaže za koliko se promijeni argument sinusne funkcije oblika moda kada se "z" promijeni za 1m.

Npr. u  $n$ -tom modu funkcija oblika moda glasi

$$A^{(n)}(z) = A \sin 2\pi \frac{z}{\lambda^{(n)}} = A \sin k^{(n)} z$$

$$k^{(n)} = \frac{2\pi}{\lambda^{(n)}} \quad \text{kutni valni broj } n\text{-tog moda}$$

Idući od  $z=0$  do  $z=1\text{m}$  argument sinusne funkcije se promijeni od 0 do  $k^{(n)}$ .

Kod niza čestice s razmakom "a" važe  
je veličine:

$k^{(n)}a$  - promjena argumenta sinusne funkcije  
oblike moda za  $\Delta z = a$

Razmotrimo dva krajnja slučaja:

1)  $k^{(n)}a \ll 1$  vrijedi kod niskih modova

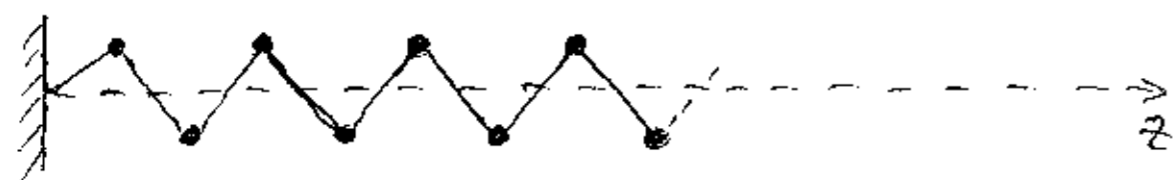
Argument funkcije se malo mijenja od  
jedne čestice do susjedne.



( $k^{(n)}a \ll 1 \Rightarrow \lambda^{(n)} \gg a$  velika valna dužina)

2)  $k^{(n)}a \approx \pi$  vrijedi za najviši mod  
(veliki n)

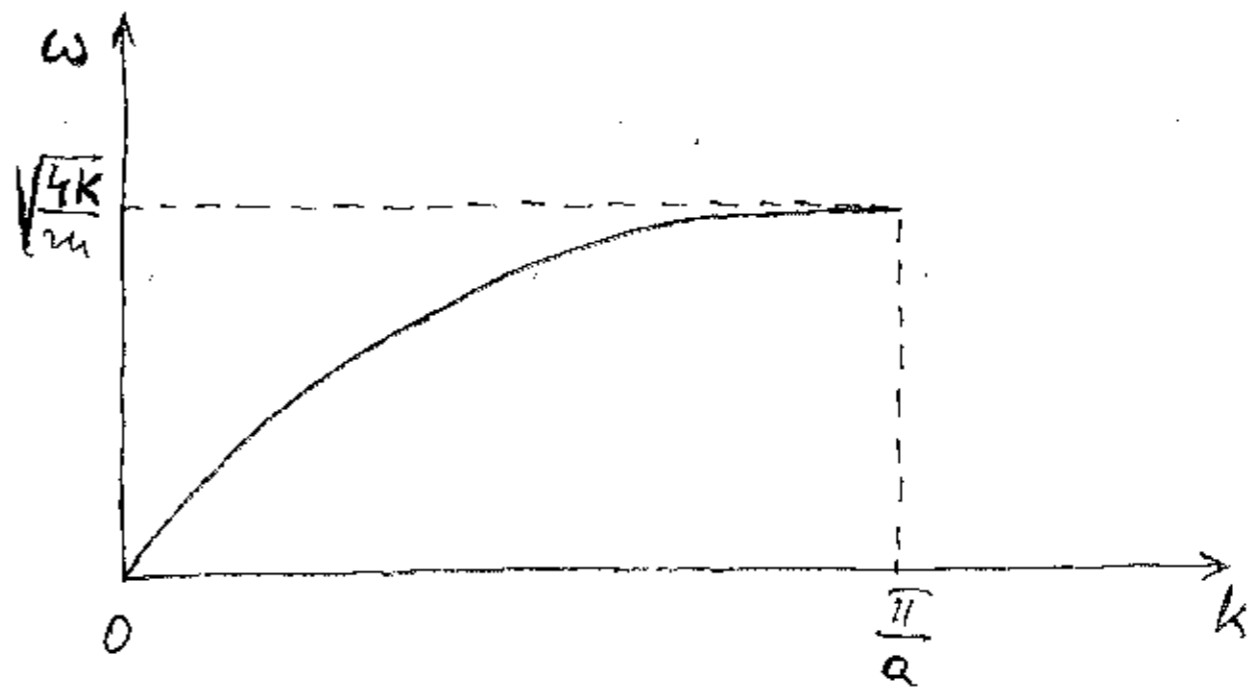
Ako se argument funkcije mijenja za  $\pi$   
(pola periode) od jedne čestice do susjedne,  
onda imamo cik-cak konfiguraciju.



( $k^{(n)}a \approx \pi \Rightarrow \frac{\lambda^{(n)}}{2} \approx a$  najviši mod)  
najkraće valne dužine

Dispersijska relacija se može ekvivalentno  
prihvatiti kao ovisnost  $\omega^{(n)}$  o  $k^{(n)}$

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin \frac{\pi a}{\lambda^{(n)}} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin \frac{k^{(n)}a}{2}$$



Maksimalni k je za cik-cak konfiguraciju

$$ka = \pi \Rightarrow k = \frac{\pi}{a} \checkmark$$

Napomena:

$\omega$  - kutna frekvencija

$k$  - kutni valni broj

Često se za  $\omega$  kaže samo "frekvencija",  
a za  $k$  samo "valni broj".

## 1.5. Linearna superpozicija modova

Do sada smo razmatrali slučajeve kada je sustav pobuđen na titranje u jednom od mogućih modova.

Podsjetimo se da titranje u nekom modu (npr.  $n$ -ti mod) nastaje tako da ostvarimo početne uvjete za taj mod (tj. otklonimo čestice iz položaja ravnoteže tako da se postigne prostorni oblik dotičnog moda)

$$u_i^{(n)}(0) = A_i^{(n)} = A^{(n)} \sin k^{(n)} z_i$$

↑

otklon  $i$ -te čestice

u  $n$ -tom modu u  $t=0$

i zatim se čestice pušte da titraju

$$u_i^{(n)}(t) = u_i^{(n)}(0) \cos \omega^{(n)} t = A_i^{(n)} \cos \omega^{(n)} t$$

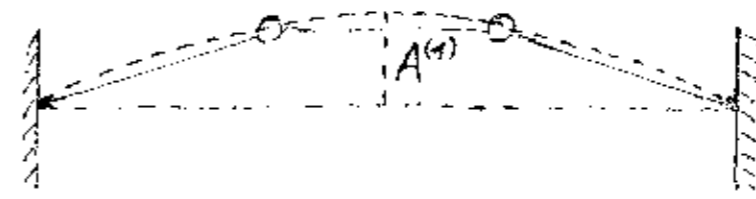
Sve čestice titraju jednom te istom frekvencijom  $\omega^{(n)}$ .

### Pitanje:

Možemo li ostvariti istodobno titranje dvaju ili više modova u nekom sustavu?

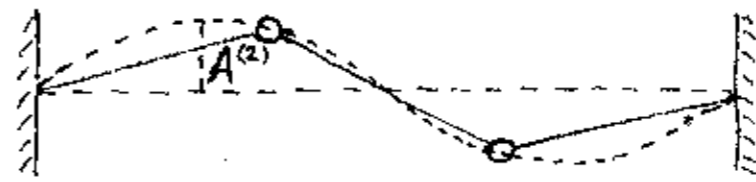
Pokažimo najprije da je moguće ostvariti početne uvjete koji odgovaraju linearnoj superpoziciji modova.

Uzmimo za primjer sustav od dvije čestice ( $N=2$ ) i pretpostavimo neku amplitudu  $A^{(1)}$  za prvi mod



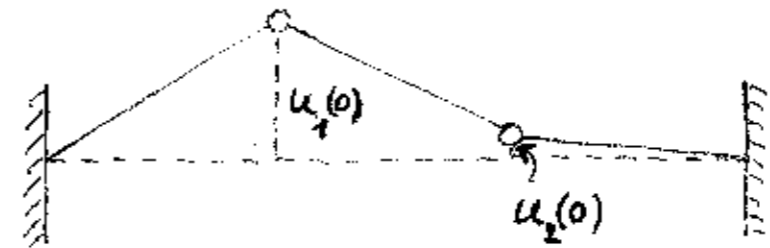
$$n=1 \\ u_i^{(1)}(0) = A_i^{(1)} = A^{(1)} \sin k^{(1)} z_i$$

i neku amplitudu  $A^{(2)}$  za drugi mod



$$n=2 \\ u_i^{(2)}(0) = A_i^{(2)} = A^{(2)} \sin k^{(2)} z_i$$

Superpozicija ovih dvaju modova znači da za svaku česticu treba zbrojiti odgovarajuće otklone iz položaja ravnoteže



superpozicija

$$u_i(0) = u_i^{(1)}(0) + u_i^{(2)}(0)$$

Početni otkloni čestice  $u_1(0)$  i  $u_2(0)$  nisu jednaki (osim u slučaju kada je pretpostavljeno  $A^{(2)}=0$ , tj. kada nema primjese drugog moda).

Možemo pretpostavljati razne vrijednosti za  $A^{(1)}$  i  $A^{(2)}$  (pozitivne i negativne) i dobivati po želji moguće kombinacije  $u_1(0)$  i  $u_2(0)$ .

Vrijedi i obrat, tj. bilo koji početni otkloni  $u_1(0)$  i  $u_2(0)$  mogu se shvatiti kao superpozicija dvaju modova s nekim amplitudama  $A^{(1)}$  i  $A^{(2)}$ .

To se može pokazati i matematički:

za  $i=1$   $z_1=a$   $u_1(0) = A^{(1)} \sin k^{(1)}a + A^{(2)} \sin k^{(2)}a$

za  $i=2$   $z_2=2a$   $u_2(0) = A^{(1)} \sin 2k^{(1)}a + A^{(2)} \sin 2k^{(2)}a$

u prvome modu  $k^{(1)}L = \pi \Rightarrow k^{(1)}a = \frac{\pi}{3}$

u drugome modu  $k^{(2)}L = 2\pi \Rightarrow k^{(2)}a = \frac{2\pi}{3}$

(u sustavu od dvije čestice  $L=3a$ )

Prema tome imamo

$$u_1(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} A^{(1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} A^{(2)}$$

$$u_2(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} A^{(1)} - \frac{\sqrt{3}}{2} A^{(2)}$$

Ako zadamo bilo koje otklone  $u_1(0)$  i  $u_2(0)$  možemo naći nepoznate  $A^{(1)}$  i  $A^{(2)}$  iz ovog sustava dviju jednačini.

Općenito pravilo:

U sustavu od  $N$  čestica, bilo koji odabir početnih otklona čestica može se prikazati kao rezultat superpozicije  $N$  modova s odgovarajućim amplitudama.

Možemo još utvrditi kako će čestice titrati kada ih otpustimo.

U tu svrhu razmotrimo jednačinu gibanja proizvoljne  $i$ -te čestice

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = - [K(u_i - u_{i-1}) + K(u_i - u_{i+1})]$$

linearni članovi

Diferencijalna jednačina je linearna (nema nelinearnih članova, npr.  $u_i^2$  ili mješovite proizvode  $u_i u_{i-1}$  ili slično).

Za linearnu diferencijalnu jednačinu vrijedi da je suma njenih rješenja također rješenje iste jednačine.

Za gornju jednačinu smo kao rješenja dobili  $N$  modova. Uzmimo npr.  $n$ -ti i  $s$ -ti mod. Svako rješenje zadovoljava dif. jedni.

$$m \frac{d^2 u_i^{(n)}}{dt^2} = - [K(u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}) + K(u_i^{(n)} - u_{i+1}^{(n)})]$$

$$m \frac{d^2 u_i^{(s)}}{dt^2} = - [K(u_i^{(s)} - u_{i-1}^{(s)}) + K(u_i^{(s)} - u_{i+1}^{(s)})]$$

Zbrojimo ove jednačine

$$m \frac{d^2}{dt^2} (u_i^{(n)} + u_i^{(s)}) = - \left\{ K [(u_i^{(n)} + u_i^{(s)}) - (u_{i-1}^{(n)} + u_{i-1}^{(s)})] + K [(u_i^{(n)} + u_i^{(s)}) - (u_{i+1}^{(n)} + u_{i+1}^{(s)})] \right\}$$

Očito je da i zbroj  $(u_i^{(n)} + u_i^{(s)})$  dvaju rješenja zadovoljava istu dif. jedni. pa je prema tome i taj zbroj njeno rješenje.

Isto pravilo vrijedi i za zbroj više rješenja.

Navedeno pravilo vrijedi u bilo kojem trenutku.  
Prema tome, ako smo u trenutku  $t=0$  imali superpoziciju  $N$  modova, onda one ostaje i za kasnije vremena. Titranje proizvoljne  $i$ -te čestice je dato sumom

$$u_i(t) = \sum_{n=1}^N u_i^{(n)}(0) \cos \omega^{(n)} t = \sum_{n=1}^N A^{(n)} \sin k^{(n)} z_i \cos \omega^{(n)} t$$

Svaki mod koji je u  $t=0$  zastupljen s amplitudom  $A^{(n)}$  nastavlja titrati frekvencijom  $\omega^{(n)}$  neovisno o drugim modovima.

Drugim riječima, svi pobudeni modovi titraju istodobno u superpoziciji, svaki sa svojom amplitudom  $A^{(n)}$  i frekvencijom  $\omega^{(n)}$ .

Titranje pojedine  $i$ -te čestice je rezultat doprinosa od pojedinih pobudjenih modova. Prema gornjoj relaciji ono je superpozicija titranja na raznim frekvencijama  $\omega^{(n)}$  s amplitudama  $A^{(n)} \sin k^{(n)} z_i$ .

14. pokus:

razne superpozicije modova  
(u sustavu od tri čestice)

Poseban slučaj superpozicije dvaju modova

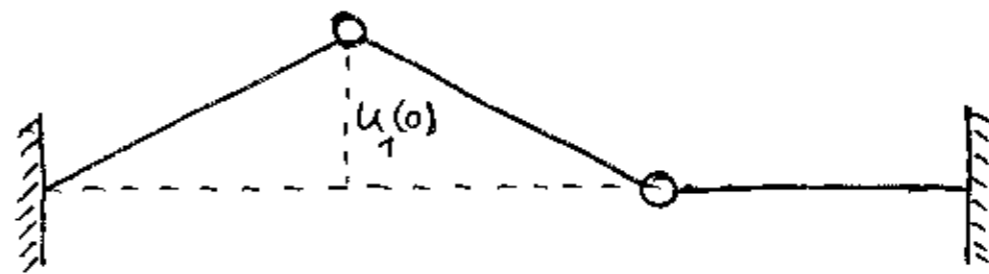
Neka su u sustavu od dvije čestice ( $N=2$ ) istodobno pobudena oba moda i to s jednakim amplitudama

$$A^{(1)} = A^{(2)} = A$$

To možemo ostvariti pomoću početnih otklona (u prijašnjoj jednadžbi)

$$u_1(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} A^{(1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} A^{(2)} = \sqrt{3} A$$

$$u_2(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} A^{(1)} - \frac{\sqrt{3}}{2} A^{(2)} = 0$$



Nakon početnog trenutka nastaje složeno titranje frekvencijama obaju modova

$$u_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} A^{(1)} \cos \omega^{(1)} t + \frac{\sqrt{3}}{2} A^{(2)} \cos \omega^{(2)} t = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} A (\cos \omega^{(1)} t + \cos \omega^{(2)} t)$$

$$u_2(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} A^{(1)} \cos \omega^{(1)} t - \frac{\sqrt{3}}{2} A^{(2)} \cos \omega^{(2)} t = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} A (\cos \omega^{(1)} t - \cos \omega^{(2)} t)$$

15. pokus:

superpozicija dvaju modova s jednakim  
amplitudama.  $A^{(1)} = A^{(2)} = A$   
(amplitudno modulirano titranje)

Svaka čestica titra istodobno i prema  
prvom modu frekvencijom  $\omega^{(1)}$  i prema  
drugom modu frekvencijom  $\omega^{(2)}$ .

Kod istodobnog titranja dvjema frekvencijama  
nastaju udari.

Ovu pojavu možemo matematički obraditi.  
Iskoristimo poznate trigonometrijske relacije

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Također uvedimo nove oznake

$$\bar{\omega} = \frac{\omega^{(1)} + \omega^{(2)}}{2} \quad \text{svrednja frekvencija}$$

$$\Delta\omega = \omega^{(2)} - \omega^{(1)} \quad \text{razlika dviju frekvencija}$$

Titranje pojedinih čestica glasi

$$u_1(t) = \sqrt{3}A \cos \frac{\Delta\omega}{2}t \cos \bar{\omega}t$$

$$u_2(t) = \sqrt{3}A \sin \frac{\Delta\omega}{2}t \sin \bar{\omega}t$$

Ako se frekvencije malo razlikuju

$$\Delta\omega \ll \bar{\omega}$$

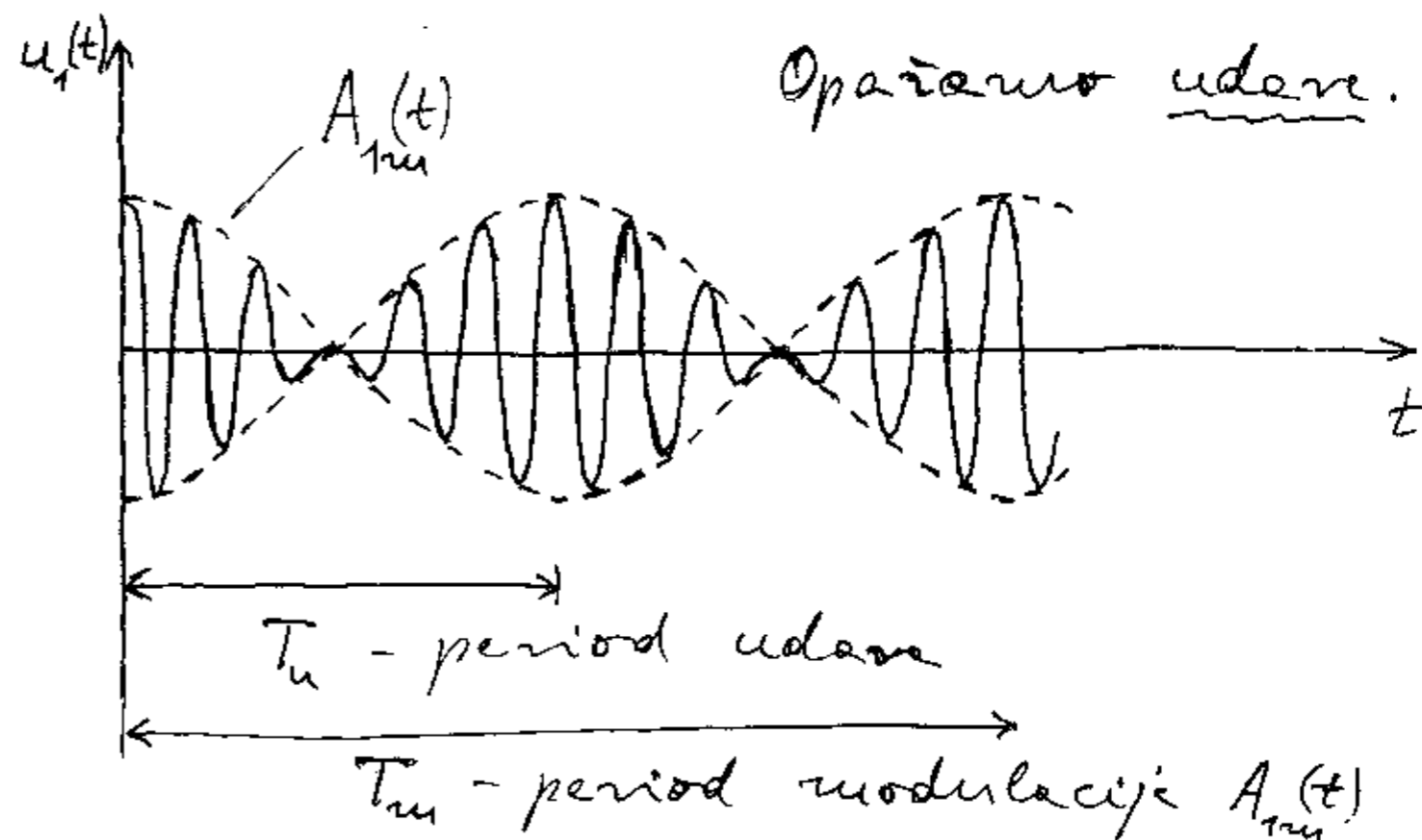
onda se veličina  $\sqrt{3}A \cos \frac{\Delta\omega}{2}t$  sporo  
mijenja u odnosu prema  $\cos \bar{\omega}t$ .

$$A_{1m}(t) = \sqrt{3}A \cos \frac{\Delta\omega}{2}t \quad \text{- možemo shvatiti kao}$$

vremenski promjenjivu  
(moduliranu) amplitudu

$$u_1(t) = A_{1m}(t) \cos \bar{\omega}t$$

Ovu pojavu nazivamo amplitudna modulacija.  
(skraćeno AM)

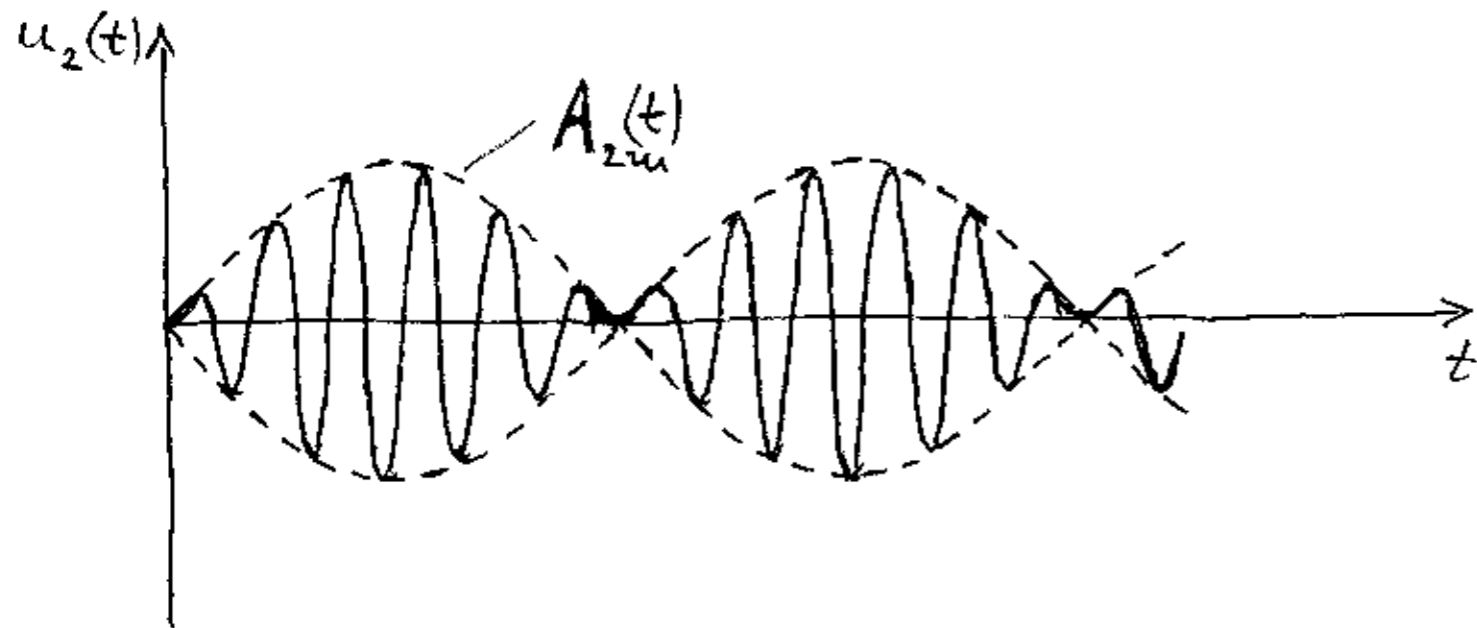


frekvencija modulacije  $\frac{\Delta\omega}{2}$   
frekvencija udara  $\Delta\omega$

Za  $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$  imamo mnogo bliže frekvencijom  $\bar{\omega}$  umetor jednog periode udara.

Za drugu česticu vrijedi isto ali s vremenskim pomakom

$$u_2(t) = \underbrace{\sqrt{3}A \sin \frac{\Delta\omega}{2}t}_{A_{2m}(t)} \sin \bar{\omega}t$$



Kada je  $A_{2m}(t)$  maksimalna,  $A_{1m}(t)$  je minimalna i obrnuto.

Energija prelazi od jedne čestice na drugu. Ukupna energija je konstantna.

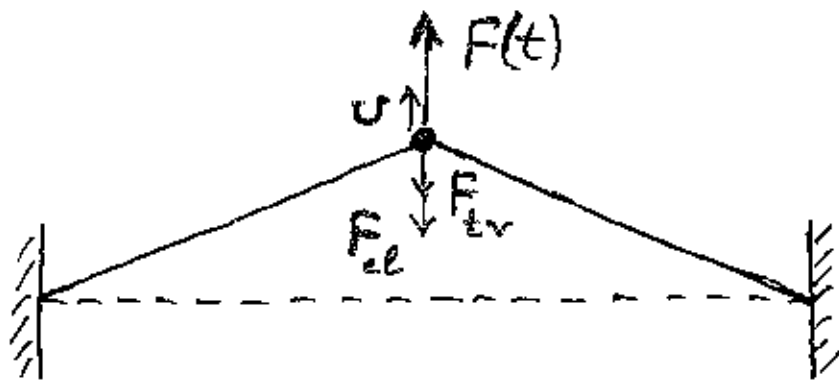
## 2. PRISILNO TITRANJE MEHANIČKOG SUSTAVA

### 2.1. Rezonancija u jednodimenzionalnom harmonijskom oscilatoru

Neka na česticu u harmonijskom oscilatoru djeluje vanjska sila

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

Imamo još i elastičnu povratnu silu i silu trenja koja guši oscilacije



Jednadžba gibanja glasi

$$ma = F_{\text{ukupno}}$$

$$F_{\text{ukupno}} = - \left( mg \frac{u}{l} + 2Ku \right) - b\dot{u} + F(t)$$

↑  
povratna sila
↑  
trenje
↑  
vanjske sila

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = - \underbrace{\left( \frac{g}{l} + \frac{2K}{m} \right)}_{\omega_0^2} u - \underbrace{\frac{b}{m}}_{\frac{1}{\tau}} \frac{du}{dt} + \frac{1}{m} F(t)$$

relaksacijsko vrijeme

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

dif. jedn. za tjerači harmon. oscilator

Imamo dvije frekvencije u ovoj dif. jednadžbi.  $\omega_0$  je frekvencija koja je zadana parametrima sustava ( $l, K$  i  $m$ ). Frekvencija vanjske sile  $\omega$  može biti bilo koja (ovisi o izvoru vanjske sile).

Opcijom je  $\omega \neq \omega_0$  pa se postavlja pitanje kojom će frekvencijom titrači dati oscilator ako ga tjera neka vanjska periodična sila?

Kakvu ulogu igraju početni uvjeti?

Odgovor na postavljena pitanja možemo dobiti ako uspijemo naći rješenje  $u(t)$  gonije dif. jedn. za tjerači harmonijski oscilator.

Vrijedi matematičko pravilo po kojemu je opće rješenje nehomogene dif. jedn. jednako zbroju

$$u(t) = u_H(t) + u_p(t)$$

↑  
opće rješenje homogene dif. jedn.
↑  
posebno rješenje nehomogene dif. jedn.



## Gušeni harmonijski oscilator

Razmotrimo najprije odgovarajuću homogenu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

Ovo je dif. jedn. za gušeni harmonijski oscilator bez vanjske periodičke sile.

Kakva funkcija može biti rješenje ove dif. jedn.?  
Da bi funkcija  $u_H(t)$  bila rješenje gornje jedn. mora se njenim uzastopnim deriviranjem dobivati ista funkcija umnožena konstantom.

Jedino eksponencijalna funkcija ispunjava ovakav uvjet. Stoga tražimo rješenje u obliku

$$u_H(t) = C e^{wt}$$

gdje je  $C$  konstanta koju tek treba odrediti.

Uvrstimo pretpostavljeno rješenje u dif. jedn.

$$w^2 C e^{wt} + \frac{w}{\tau} C e^{wt} + \omega_0^2 C e^{wt} = 0$$

Ova je jednačina zadovoljena u svakom trenutku  $t$  ako vrijedi uvjet

$$w^2 + \frac{1}{\tau} w + \omega_0^2 = 0$$

$$w_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Dobili smo dva rješenja za  $w$ , pa je opće rješenje homogene diferencijalne jednačine

$$u_H(t) = C_1 e^{w_1 t} + C_2 e^{w_2 t}$$

Razmotrimo redom slučajeve slabog i jakog gušenja (ovisi o  $\tau$ ).

### a) Slabo gušenje

Kod slabijeg gušenja relaksacijsko vrijeme  $\tau$  je duže.

$$\frac{1}{2\tau} \ll \omega_0 \quad \text{veoma slabo gušenje}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1} \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\omega_0 \tau}\right)^2} = i \omega_g$$

$\omega_g$  frekvencija gušenih titraja

Opće rješenje homog. jedn. ima oblik

$$\begin{aligned} u_H(t) &= C_1 e^{-\frac{t}{2\tau} + i\omega_g t} + C_2 e^{-\frac{t}{2\tau} - i\omega_g t} \\ &= (C_1 + C_2) e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos \omega_g t + i \underbrace{(C_1 - C_2)}_{=0} e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin \omega_g t \end{aligned}$$

Tražimo da  $u_H(t)$  bude realna veličina (zbog fizikalne realnosti), pa mora biti  $C_1 - C_2 = 0$ , tj.  $C_1 = C_2$  (samo jedna konstanta u rješenju).

$$u_H(t) = A_H e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos \omega_g t$$

Konstantu  $A_H$  određujemo iz početnog uvjeta

$$u_H(0) = A_H$$

Zaključak:

Titranje ostvarujemo tako da u  $t=0$  otklonimo česticu iz položaja ravnoteže za neki iznos i pustimo je da titra. Titranje se odvija frekvencijom  $\omega_g$  ( $\omega_g < \omega_0$ ) uz eksponencijalno smanjivanje amplitude.

Amplituda se smanji na iznos  $\frac{1}{e}$  od početne vrijednosti za  $t=2\tau$ .

16a pokus:

gušeni harmonijski oscilator  
(uz mijenjanje iznosa gušenja)

Možemo izračunati gubitak snage, tj. gubitak energije u jedinici vremena. Kinetička energija u nekom trenutku iznosi

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \frac{du_H}{dt} = -\frac{1}{2\tau} A_H e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos \omega_g t - \omega_g A_H e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin \omega_g t$$

Tražimo srednju vrijednost kinetičke energije u jednom periodu titranja od  $t$  do  $t+T$

$$\langle E_K \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E_K(t') dt'$$

Ako je gušenje maleno, možemo smatrati da je  $e^{-\frac{t}{2\tau}}$  praktički konstantno za vrijeme jednog perioda titranja, pa usrednjavamo samo izraz

$$\langle \cos^2 \omega_g t \rangle = \langle \sin^2 \omega_g t \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos \omega_g t \sin \omega_g t \rangle = 0$$

Dobivemo rezultat

$$\langle E_K \rangle = \frac{1}{4} m \left[ \underbrace{\left( \frac{1}{2\tau} \right)^2 + \omega_g^2}_{=\omega_0^2} \right] A_H^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Srednja vrijednost potencijalne energije jednaka je srednjoj vrijednosti kinetičke energije ( $\langle E_P \rangle = \langle E_K \rangle$ ), pa je srednja vrijednost ukupne energije

$$\langle E \rangle = \langle E_K \rangle + \langle E_P \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_H^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Energija se gubi po eksponencijalnom zakonu.

Gubitak snage (tj. gubitak energije u jedinici vremena) iznosi

$$P = \frac{d}{dt} \langle E \rangle = -\frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_H^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = -\frac{\langle E \rangle}{\tau}$$

Energija oscilatora se troši na rad sile gušenja.

Uobičajeno je definirati faktor dobrote Q gušenog oscilatora

$$Q = 2\pi \frac{\text{pohranjena energija}}{\text{gubitak energije u jednom periodu}}$$

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{|P|T} = \frac{2\pi}{T} \frac{\langle E \rangle}{\frac{\langle E \rangle}{\tau}} = \omega_0 \tau$$

T je period titranja gušenih oscilacija.

Za slabo gušenje  $\omega_0 \approx \omega$ .

$$Q \approx \omega_0 \tau = \frac{2\pi}{T} \tau \gg 1 \quad (\tau \gg T)$$

Slabo gušen oscilator ima velik faktor dobrote Q. Mnogo dugo se iznosi za vrijeme  $\tau$ . Kod jakog gušenja je  $\omega_0 \ll \omega$  i vrijeme  $\tau$  je maleno, pa  $Q \rightarrow 1$ , tj. jako gušeni oscilator ima malen faktor dobrote Q.

## b) Kritično gušenje

Kada se gušenje dovoljno poveća (smanjuje se  $\tau$ ) dobivamo uvjet

$$\frac{1}{2\tau} = \omega_0 \quad (\omega_0 \rightarrow 0 \text{ nastaju oscilacije})$$

To je uvjet za kritično gušenje. Rješenja za eksponente su jednaka

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2\tau}$$

Opće rješenje ima oblik

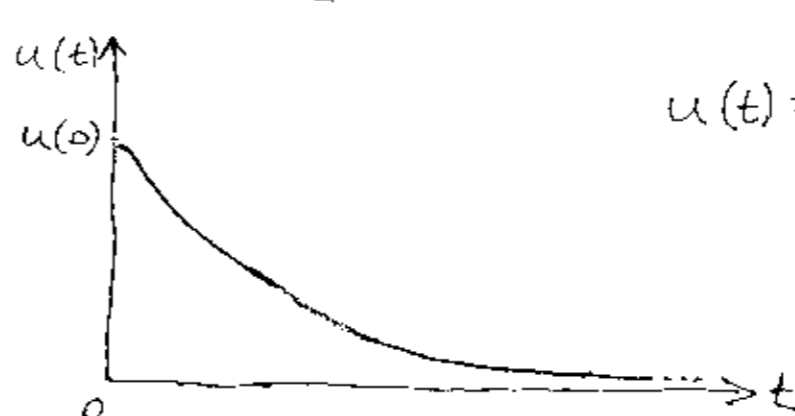
$$u(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

(može se provjeriti uvrštavanjem u dif. jedn.)

Početni uvjeti se zadaju pomoću početnog otklona  $u(0)$  i početne brzine  $v(0)$ .

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= C_1 \\ v(0) &= \left[ \frac{du}{dt} \right]_{t=0} = C_2 - \frac{1}{2\tau} C_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= u(0) \\ C_2 &= v(0) + \frac{1}{2\tau} u(0) \end{aligned}$$

Za  $v(0) = 0$  imamo



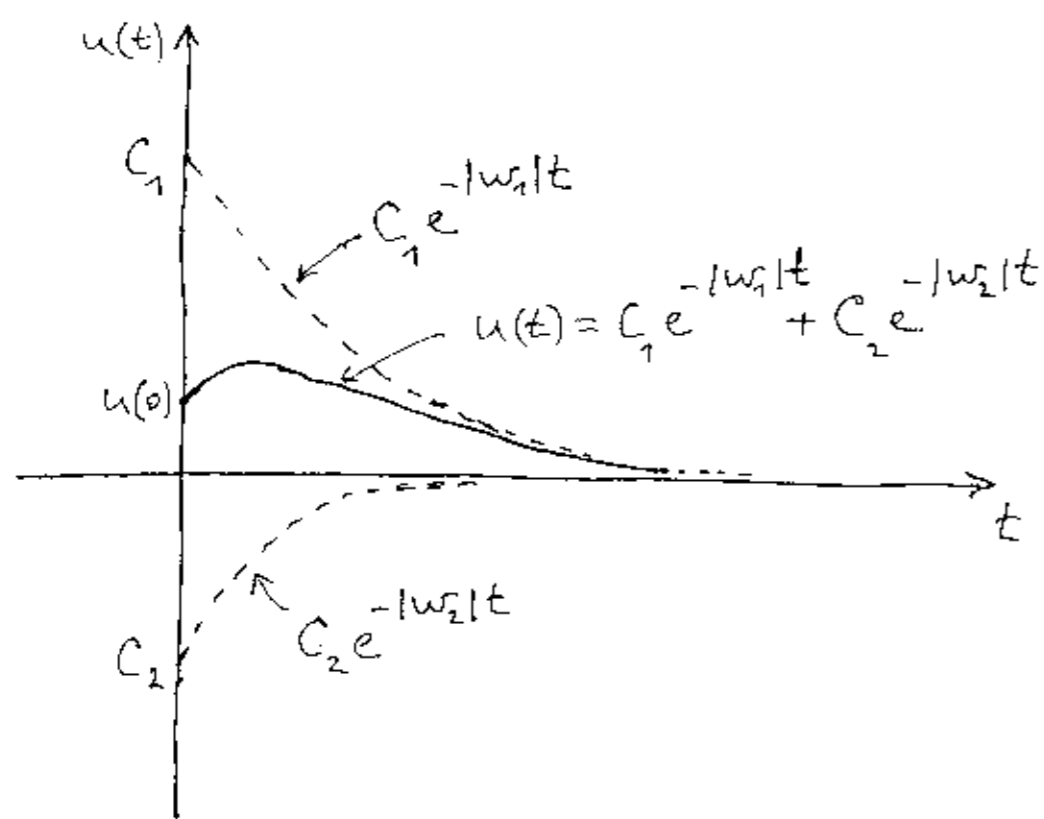
$$u(t) = u(0) \left( 1 + \frac{t}{2\tau} \right) e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

$u(t)$  se smanjuje prema nuli i nikada ne mijenja predznak



Analizirajmo primjer u kojemu  $u(0) > 0$  i  $v(0) > 0$  (tijelo gurnemo prema većem otklonu).

Tada je  $C_1 > 0$ ,  $C_2 < 0$ , ali  $|C_2| < C_1$



U slučaju kada je  $v(0) = 0$  imamo ponašanje slično kao kod kritičnog gubanja, ali se sporijim približavanjem ravnotežnom stanju.

Ako tijelo gurnemo prema položaju ravnoteže  $v(0) < 0$  dovoljno jako  $|v(0)| > \frac{1}{2\tau} [1 + \sqrt{1 - (2\omega_0\tau)^2}] u(0)$ , dobivamo  $C_1 < 0$ ,  $C_2 > 0$ , ali  $|C_1| < C_2$ . Tada  $u(t)$  mijenja predznak i zatim tone (slično kao u slučaju kritičnog gubanja).

16c pokus:

primjeri s nadkritičnim gubanjem

Posebno rješenje nehomogene dif. jedr.

Pretpostavimo da je gubanje manje od kritičnog. Na tijelo djeluje vanjska periodička sila. Rješenje nehomogene dif. jedr. je funkcija koja sadrži titranje frekvencijom  $\omega$  kao vanjske sile

$$u_p(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

$A$  - amplituda titranja

$\varphi$  - fazni pomak funkcije  $u_p(t)$  u odnosu prema vanjskoj sili  $F(t) = F_0 \cos \omega t$

Uvrštavanjem u dif. jedr. možemo provjeriti da je  $u_p(t)$  uistinu rješenje

$$-\omega^2 A \cos(\omega t - \varphi) - \frac{\omega}{\tau} A \sin(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Upotrebom trigonometrijskih relacija i sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} & [-\omega^2 \cos \varphi + \frac{\omega}{\tau} \sin \varphi + \omega_0^2 \cos \varphi] A \cos \omega t + \\ & + [-\omega^2 \sin \varphi - \frac{\omega}{\tau} \cos \varphi + \omega_0^2 \sin \varphi] A \sin \omega t = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \end{aligned}$$

Ove jedr. može biti zadovoljena za svaki  $t$  samo ako vrijedi

$$\begin{aligned} & [-\omega^2 \cos \varphi + \frac{\omega}{\tau} \sin \varphi + \omega_0^2 \cos \varphi] A = \frac{F_0}{m} \\ & -\omega^2 \sin \varphi - \frac{\omega}{\tau} \cos \varphi + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

Možemo jednodužno odrediti  $A$  i  $\varphi$ . Iz druge jedr. dobivamo

$$\boxed{\tan \varphi = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Možemo se poslužiti trigonometrijskim relacijama

$$\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

Uvrstimo u prvu jedn. i dobivamo

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}$$

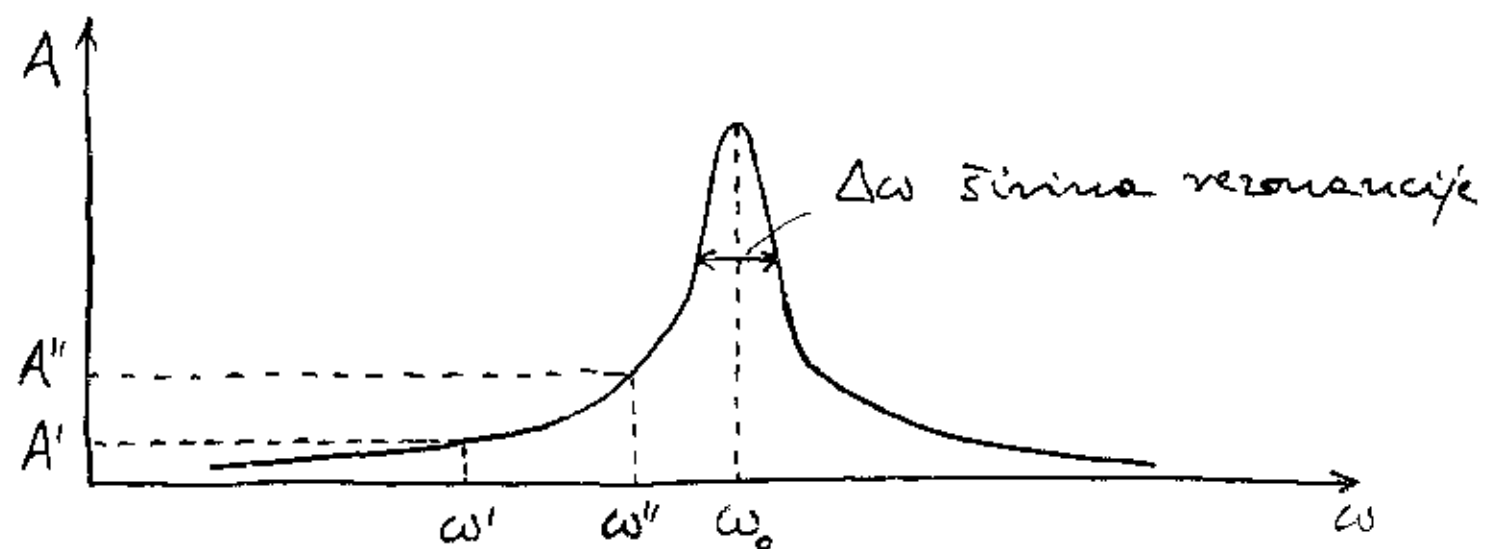
Zaključak:

Funkcija  $u_p(t)$  je doista rješenje nehomogene dif. jedn. ako konstante  $A$  i  $\varphi$  imaju gornje vrijednosti.

Važno zapažanje:

Amplituda  $A$  ne smanjuje se eksponencijalno s vremenom. Drugim riječima, titranje  $u_p(t)$  opstaje u vremenu toliko dugo dok postoji periodična vanjska sila.

Za dati oscilator (tj. zadani  $m$ ,  $\tau$  i  $\omega_0$ ) amplituda  $A$  ovisi o frekvenciji pogonske sile  $\omega$



Iz krivulje rezonancije očitavamo amplitudu titranja oscilatora za rezne frekvencije (npr.  $\omega'$ ,  $\omega''$ , itd.) pogonske sile.

Amplituda titranja je maksimalna ako je frekvencija pogonske sile jednaka vlastitoj frekvenciji oscilatora. Tada se kaže da je vanjska sila u rezonanciji s harmonijskim oscilatorom.

Napomena:

Podrazumijeva se da amplitudu pogonske sile  $F_0$  držimo konstantnom. Drugim riječima, do promjene amplitude titranja oscilatora ne dolazi zbog promjene amplitude vanjske sile, nego samo zbog promjene rjezne frekvencije u odnosu prema vlastitoj frekvenciji oscilatora.

Iz izraza za amplitudu  $A$  vidljivo je da se amplituda za bilo koju frekvenciju poveća ako primijenimo veću pogonsku silu  $F_0$ . Efekt je isti za sve frekvencije pa se rezonantna krivulja samo umnoži većim faktorom no njen oblik ostaje neizmijenjen.

Širinu rezonancije dobijemo iz uvjeta

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2$$

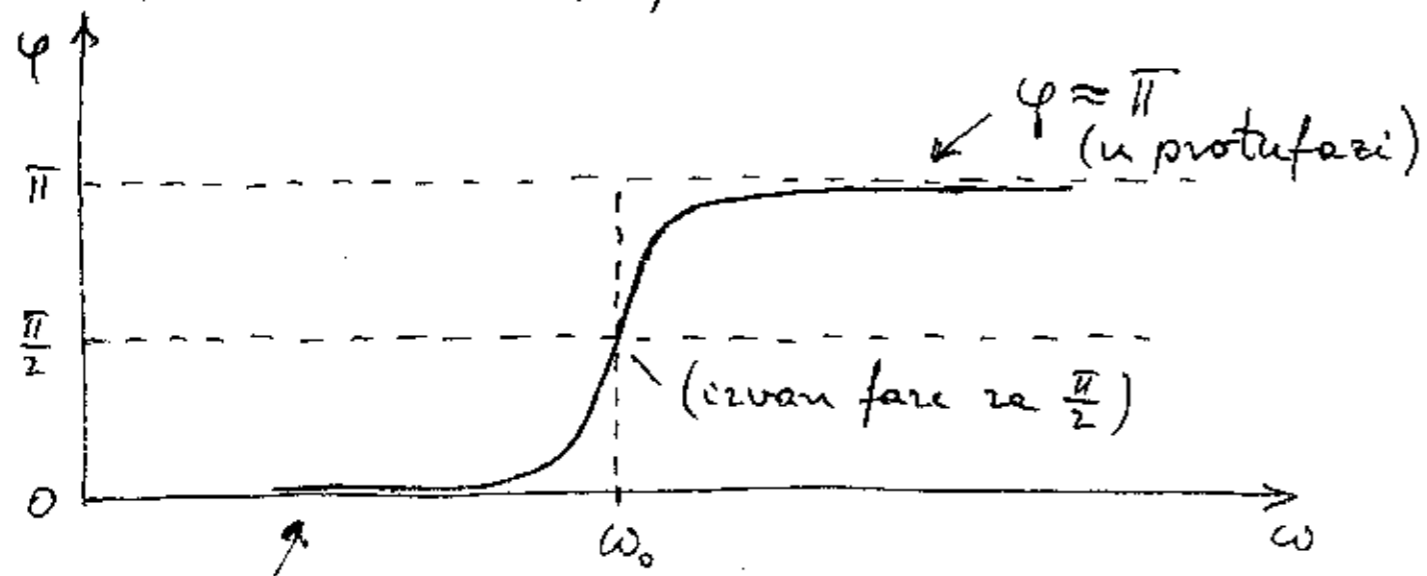
(Tada amplituda  $A$  padne na  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  od maks. vrijednosti, a snaga na  $\frac{1}{2}$  od maks. vrijed.)

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0 \frac{\Delta\omega}{2}$$

za maleno qušenje  
 $\omega \approx \omega_0$

$$\omega_0 \Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{\tau} \Rightarrow \boxed{\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau}}$$

Fazi pomak  $\varphi$  (kašnjenje) je također funkcija od  $\omega$



$\varphi \approx 0$   
(tj. u fazi)

Opće rješenje nehomogene dif. jedn.

$$u(t) = A_H e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega_0 t - \varphi_H) + A \cos(\omega t - \varphi)$$

U početku (za  $t < \tau$ ) imamo superpoziciju titranja na frekvencijama  $\omega_0$  i  $\omega$ .

Opazamo udare.

Nakon dovoljno dugo vremena ( $t \gg \tau$ ) utmu slobodne oscilacije frekvencijom  $\omega_0$  i ostane samo prisilno titranje frekvencijom  $\omega$ . To se zove stacionarno stanje.

17. pokus:

početni udari i prijelaz u stacionarno stanje

Ako promijenimo u nekome trenutku frekvenciju vanjske sile  $\omega \rightarrow \omega'$ , opet dobijemo udare uslijed superpozicije titranja frekvencijama  $\omega_0$  i  $\omega'$ . Nakon nekog vremena ( $\Delta t \gg \tau$ ) imamo samo novu frekvenciju  $\omega'$  i novu amplitudu  $A'$ .

18. pokus:

brza promjena frekvencije

Ako se frekvencija manje promijeni, brže se dođe u novo stacionarno stanje.

19. pokus:

opazanje rezonancije uz polaganu mijenjanje frekvencije vanjske sile

Razmotrimo karakteristične slučajeve:

1)  $\omega \ll \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$  ispod rezonancije

$$A \approx \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \xrightarrow{\text{za } \omega \rightarrow 0} \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{\omega}{\tau \omega_0^2} \ll \frac{1}{\omega_0 \tau} \ll 1 \Rightarrow \varphi \text{ zanemarljivo malen}$$

$$u(t) \approx \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

Titranje je praktički u fazi s vanjskom silom.

2)  $\omega = \omega_0$  rezonancija

$$A = \frac{F_0 \tau}{m\omega_0} \text{ amplituda je maksimalna}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$u(t) = \frac{F_0 \tau}{m\omega_0} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0 \tau}{m\omega_0} \sin \omega t$$

Titranje ne ostaje za vanjskom silom za  $\frac{\pi}{2}$ .

U fazi s vanjskom silom je brzina

$$v(t) = \frac{du}{dt} = \frac{F_0 \tau}{m} \cos \omega t$$

To je logično. Vanjska sila pogurme česticu tako da joj još poveća brzinu.

Vanjska sila prenosi na česticu snagu

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)v(t) dt = \frac{F_0^2 \tau}{m} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t = \frac{F_0^2 \tau}{2m}$$

Ova snaga troši se u trenju pa amplituda ostaje stalna u stacionarnome stanju.

3)  $\omega \gg \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$  iznad rezonancije

$$A \approx \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \xrightarrow{\text{za } \omega \rightarrow \infty} 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{\frac{\omega}{\tau}}{-\omega^2} = -\frac{1}{\omega \tau} \Rightarrow \varphi \approx \pi$$

$$u(t) \approx \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos(\omega t - \pi) = -\frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega t$$

Titranje je praktički u protufazi s vanjskom silom.

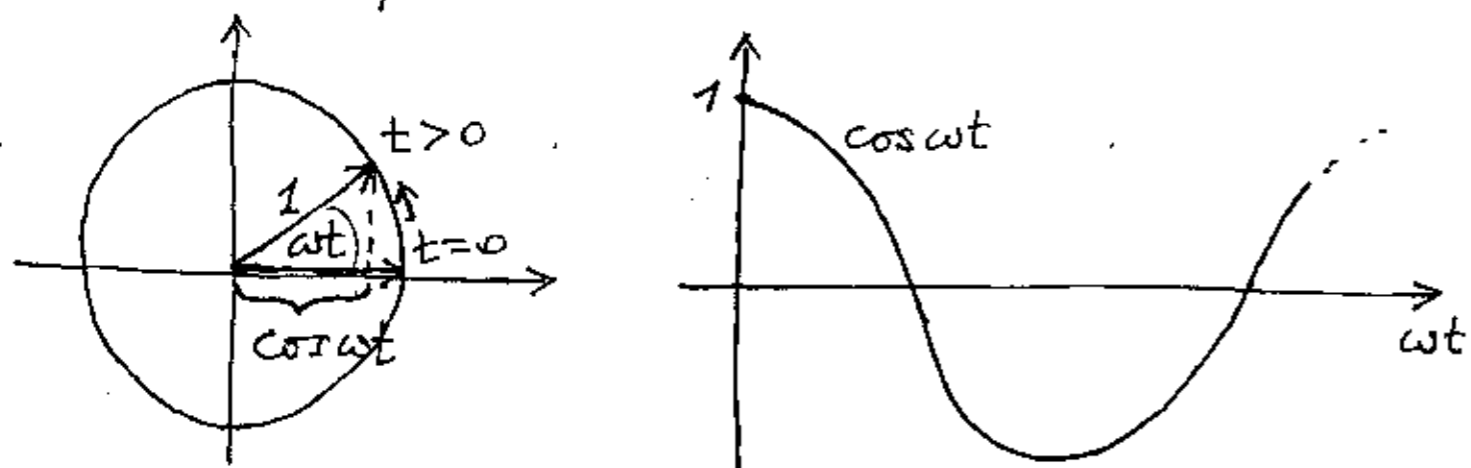
20. pokus:

promatranje faznih odnosa u raznim slučajevima

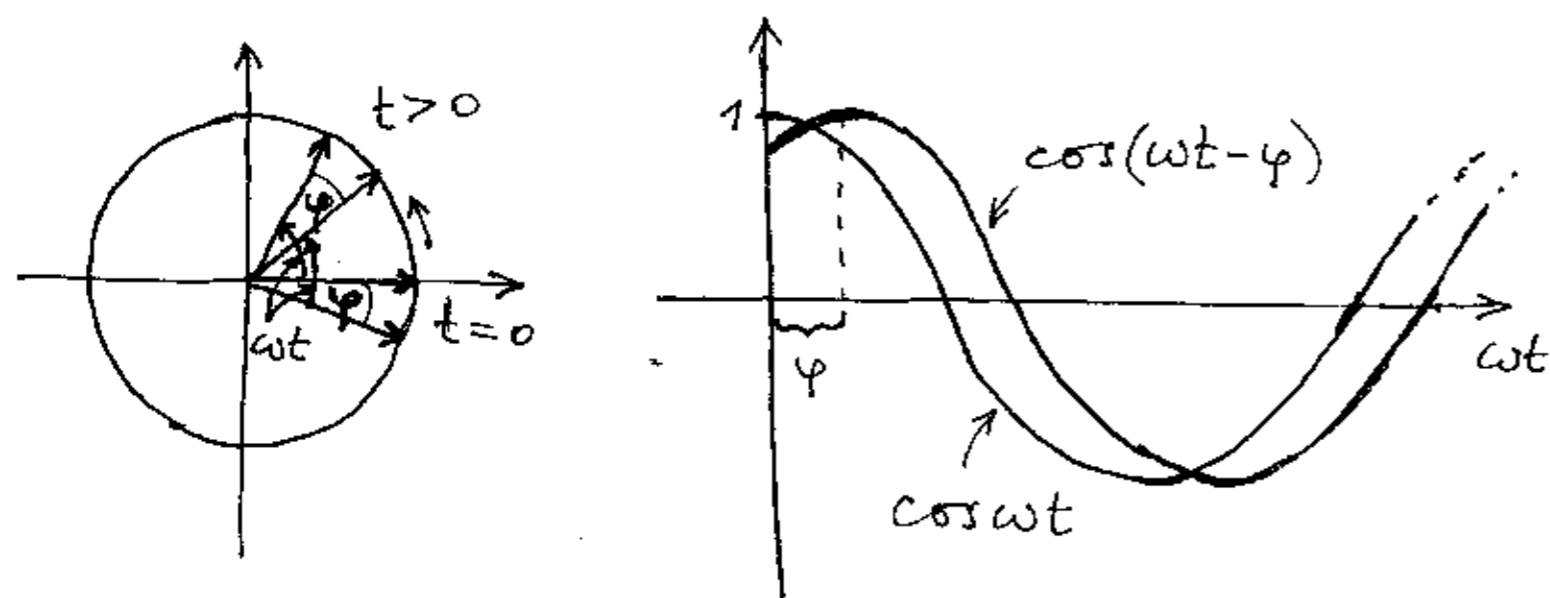


## Metoda rotirajućih vektora

Vremenski promjenljivu funkciju  $\cos \omega t$  možemo dobiti kao projekciju jediničnog vektora koji rotira kutnom brzinom  $\omega$



Ako imamo još i funkciju  $\cos(\omega t - \varphi)$  koja kasni za fazom kut  $\varphi$ , crtamo dva rotirajuća vektora



Oba rotirajuća vektora imaju istu kutnu brzinu  $\omega$ , pa kut među njima ostaje uvijek isti, tj.  $\varphi$ .

Primijenimo sada ovu metodu na vremenski promjenljive veličine u harmonijskom oscilatoru.

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \text{ vanjska sila}$$

$$u(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \text{ pomak čestice iz položaja ravnoteže}$$

Mora biti zadovoljena diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Uvrštavanjem  $u(t)$  u dif. jedn. dobivamo

$$-\omega^2 A \cos(\omega t - \varphi) - \frac{1}{\tau} \omega A \sin(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Ishodujemo poznatu trigonometrijsku relaciju

$$\sin x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(\omega t - \varphi) = -\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

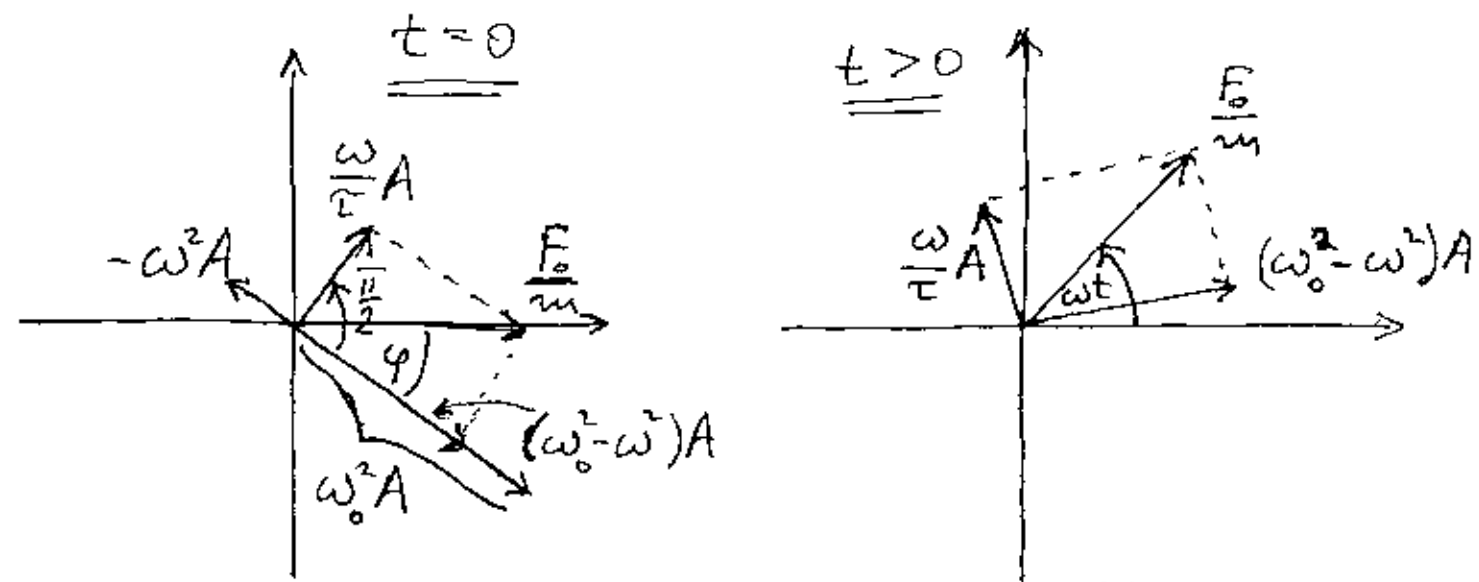
Gornju jednačinu možemo srediti u obliku

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \cos(\omega t - \varphi) + \frac{\omega}{\tau} A \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Ova tri člana možemo shvatiti kao projekcije triju rotirajućih vektora.

Vektori rotiraju istom kutnom brzinom  $\omega$ , ali imaju različite amplitude i faze.

Razmotrimo najprije vektorski prikaz za slučaj  $\omega < \omega_0$  (ispod rezonancije).



Zbroj tih triju vektora  $-\omega^2 A$ ,  $\omega_0^2 A$  i  $\frac{\omega}{\tau} A$  daje rezultantni vektor  $\frac{F_0}{m}$ .

Kada vektori rotiraju mijenjaju se u vremenu njihove projekcije na horizontalnu os.

Međutim, zbroj projekcije pojedinih vektora uvijek je jednak projekciji rezultantnog vektora (rotiraju istom kutnom brzinom).

Razmotrimo značenje pojedinih rotirajućih vektora na slici. Gledamo od kojih članova u diferencijalnoj jednačini su nastali:

- $-\omega^2 A$  dolazi od akceleracije (prvi član)
- $\omega_0^2 A$  dolazi od elastične povratne sile opruge (treći član u dif. jedrn.)

$\frac{\omega}{\tau} A$  dolazi od gušenja (drugi član u dif. jedrn.)

Prema tome, vektorski zbroj možemo interpretirati na sljedeći način. Vanjska sila služi dijelom za davanje akceleracije tijelu, dijelom za svladavanje povratne sile opruge i dijelom za svladavanje trenja.

U slučaju  $\omega < \omega_0$  (ispod rezonancije) koji smo razmatrali, možemo reći da se dio povratne sile opruge koristi za davanje akceleracije tijelu, dok vanjska sila svladava razliku  $(\omega_0^2 - \omega^2)A$  i trenje  $\frac{\omega}{\tau} A$ .

Kada je  $\omega \ll \omega_0$  (jako ispod rezonancije), trenje  $\frac{\omega}{\tau} A$  postaje maleno i fazni kut  $\varphi$  također postaje malen (titranje  $u(t)$  je praktički u fazi s vanjskom silom  $F(t)$ ). Tada je  $\frac{F_0}{m} \approx \omega_0^2 A$ , tj. vanjska sila uglavnom služi za svladavanje elastične povratne sile opruge. Dakle, kada je frekvencija prisilnih oscilacija daleko niža od rezonantne, u odzivu harmonijskog oscilatora dominira elastičnost opruge.

U svakom slučaju, između vektora  $(\omega_0^2 - \omega^2)A$  i  $\frac{\omega}{\tau}A$  nalazimo kut  $\frac{\pi}{2}$ , pa vrijedi Pitagorin poučak

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 A^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2$$

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}$$

✓ Dobili smo isti rezultat kao i prije!

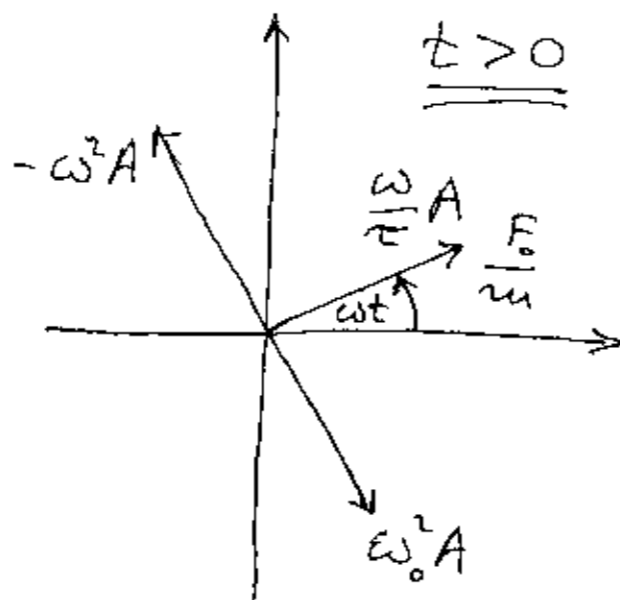
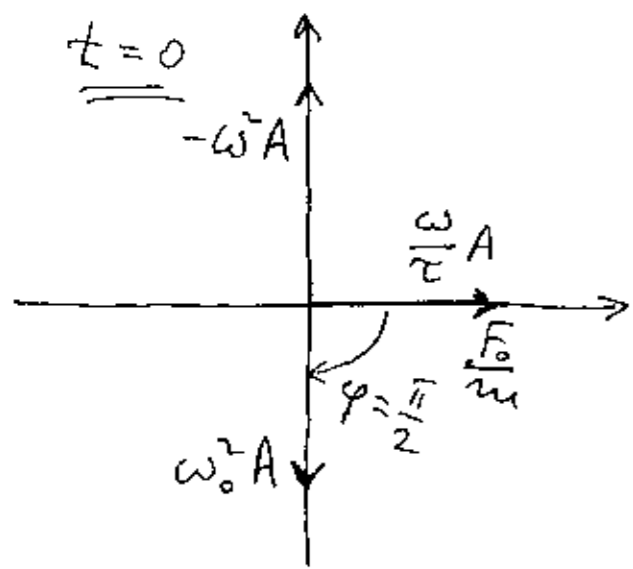
Iz slike također dobivamo

$$\tan \varphi = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \checkmark \quad \text{Rezultat kao i prije!}$$

Razmotrimo sada slučaj rezonancije

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)A = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

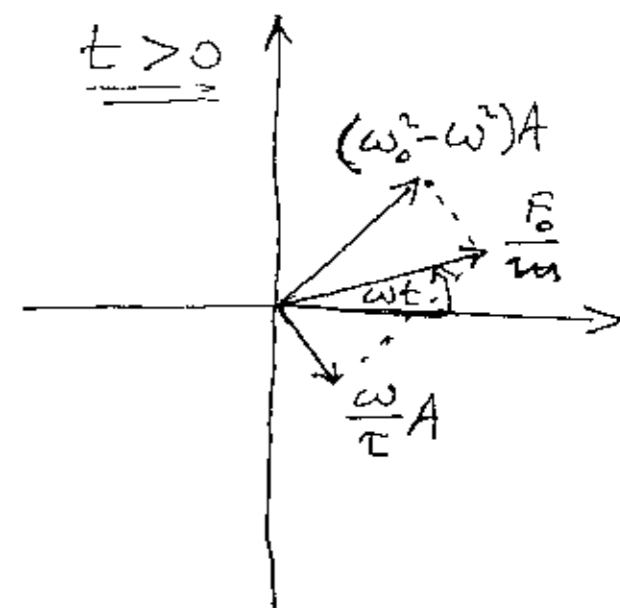
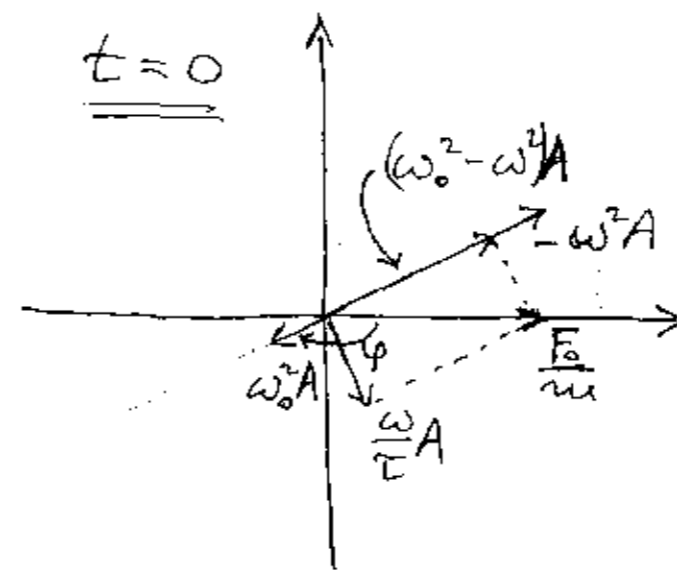


$$\frac{\omega_0}{\tau} A = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A = \frac{F_0 \tau}{m \omega_0} \quad \checkmark \quad \text{rezultat kao prije}$$

U rezonanciji amplituda je najveća.

U rezonanciji je povratna sila opruge  $\omega_0^2 A$  jednaka po iznosu onome što je potrebno za davanje akceleracije tijelu  $\omega^2 A$ . Drugim riječima, vanjska sila nije potrebna za davanje akceleracije tijelu. Vanjska sila se u cijelosti koristi za svladavanje trenja. Harmonijski oscilator se tada ponaša kao otporni sustav.

Razmotrimo još i slučaj  $\omega > \omega_0$  (iznad rezonancije).



Napomena:

Pomak iz položaja ravnoteže  $u(t)$  je u fazi s  $\omega_0^2 A$  i kasni za silom za  $\varphi > \frac{\pi}{2}$ !

U ovom slučaju povratna elastična sila opruge nije dovoljna za davanje akceleracije tijelu (brzo titranje podrazumijeva veliku

akceleraciju!), pa veći dio vanjske sile služi upravo za davanje akceleracije tijelu. Kada harmonijski oscilator prisilno titra frekvencijom iznad rezonantne, u njegovu ponašanju dominira svojstvo inercije tijela.

### Impedancija harmonijskog oscilatora

Impedancija (lat. impedimentum = zapreka) izražava otpor harmonijskog oscilatora uspostavi titranja po frekvenciji  $\omega$  koju nametle vanjska sila. Impedancija se definiše tako da povezuje vanjsku silu i brzinu koju tijelo postiže kod titranja

$$F_0 = Z v_0$$

Ovdje je  $Z$  apsolutna vrijednost impedancije, a  $v_0$  je amplituda brzine.

Za brzinu imamo

$$v(t) = \frac{d}{dt} u(t) = -\omega A \sin(\omega t - \varphi) = \underbrace{\omega A}_{v_0 \text{ amplituda brzine}} \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Brzina ima fazu za  $\frac{\pi}{2}$  ispred pomaka iz položaja ravnoteže  $u(t)$ . Brzina je

najveća kada tijelo prolazi kroz položaj ravnoteže i tada ima iznos  $v_0$ .

Uvrstimo ranije dobiveni izraz za amplitudu  $A$ , pa dobivamo

$$v_0 = \omega A = \omega \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}}$$

$$F_0 = \underbrace{\frac{m}{\omega} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}}_Z v_0$$

$Z$  impedancija harm. osc.

Što je impedancija veća, bit će manja amplituda brzine  $v_0$  uz istu vanjsku silu  $F_0$ . Drugim riječima, ako je impedancija veća, harmonijski oscilator pruža veći otpor uspostavi titranja, pa je rezultantna amplituda brzine  $v_0$  manja. Za dati harmonijski oscilator (zadane veličine  $m, \omega_0, \tau$ ) impedancija se mijenja ovisno o frekvenciji  $\omega$  koju nametle vanjske sile.

$$\text{za } \omega \ll \omega_0 \Rightarrow Z \approx \frac{m\omega_0^2}{\omega} \xrightarrow{\text{za } \omega \rightarrow 0} \infty$$

ispod rezonancije

impedancija postaje jako velika

Za  $\omega = \omega_0 \Rightarrow Z = \frac{m}{\omega_0} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\tau}\right)^2} = \frac{m}{\tau}$   
 u rezonanciji impedancija je najmanja

Za  $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow Z = \frac{m}{\omega} \sqrt{\omega^4 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2} \approx m\omega \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \infty$   
 iznad rezonancije impedancija je velika

Promotrimo još impedanciju u rezonanciji, tj.  $Z = \frac{m}{\tau}$ . Ako u harmonijskom oscilatoru promijenimo tijelo koje titra i stavimo veću masu  $m$ , impedancija se povećava. To znači da je teže uspostaviti titranje ako je masa tijela veća.

Također možemo promijeniti gušćine, npr. tako da ga povećamo. Tada se relaksacijsko vrijeme  $\tau$  smanjuje, pa impedancija postane veća. To opet znači da je teže uspostaviti titranje uz veće gušćine.

### Napomena:

Izvedeni izraz za impedanciju  $Z$  predstavlja njen apsolutni iznos. Ako nas zanimaju fazni odnosi, možemo naći komponente impedancije u fazi s brzinom i pomakom.

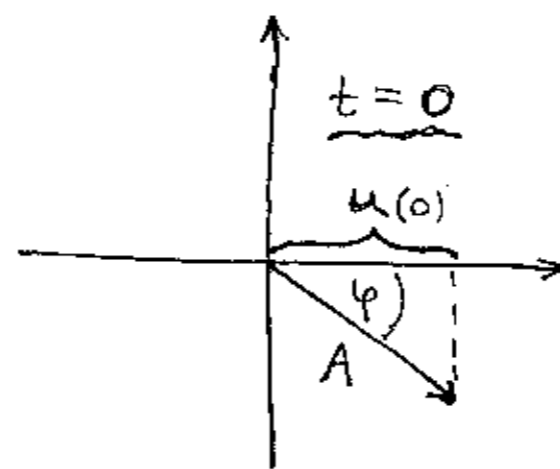
### Apsorpcijska i disperzijska amplituda

Titranje čestice u harmonijskom oscilatoru dano je funkcijom

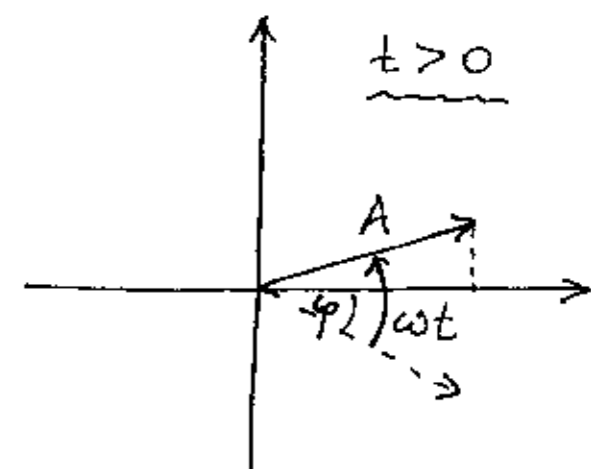
$$u(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

gdje su  $A$  i  $\varphi$  dvije konstante koje smo detaljno analizirali. Umjesto tih dviju konstanti, možemo uvesti druge dvije konstante i dobiti ekvivalentan rezultat za  $u(t)$ .

Podiđimo od prikaza funkcije  $u(t)$  pomoću rotirajućeg vektora duljine  $A$

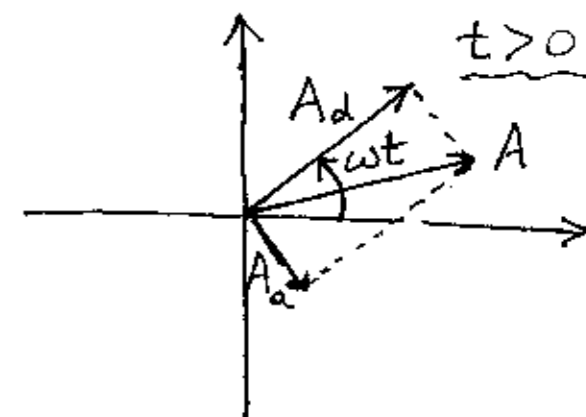
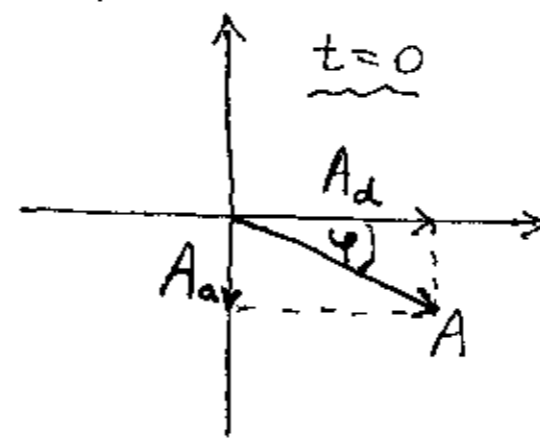


$$u(0) = A \cos \varphi$$



$$u(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

Ovaj vektor možemo rastaviti na dvije komponente s duljinama  $A_d$  i  $A_a$



Zbroj dvaju vektora uvijek je jednak jednome vektoru  $A$ . Isto vrijedi i za njihove projekcije na horizontalnu os, pa je

$$u(t) = A_d \cos \omega t + A_a \sin \omega t$$

Komponenta  $A_d$  (dispersijska amplituda) uvijek je u fazi s vanjskom silom ( $F_0 \cos \omega t$ ).

Apsorpcijska amplituda  $A_a$  kasni za vanjskom silom za  $\frac{\pi}{2}$ .

Gornji izraz možemo dobiti i primjenom trigonometrijske formule za razliku kutova

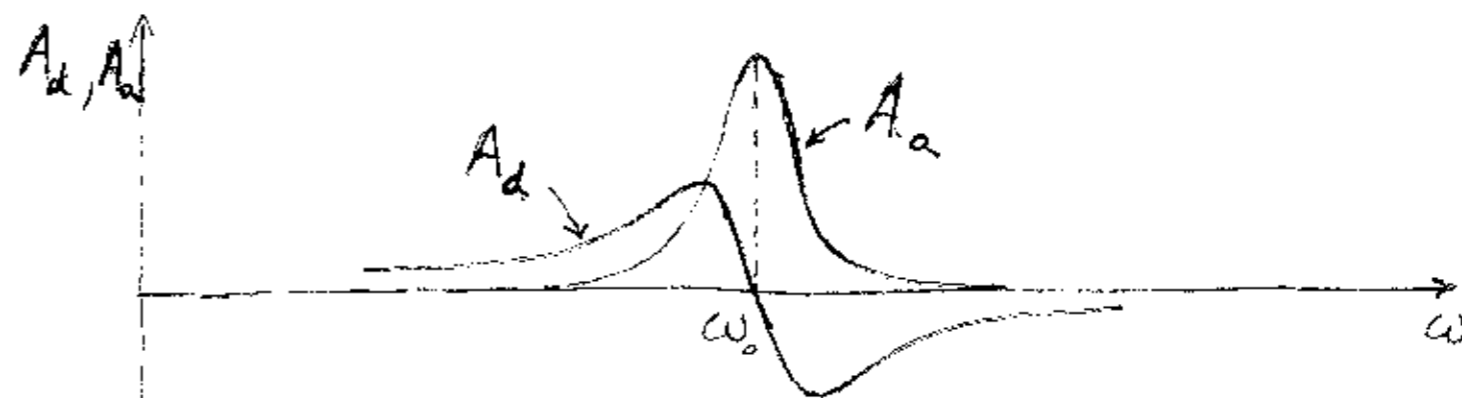
$$u(t) = A \cos(\omega t - \varphi) = \underbrace{A \cos \varphi}_{A_d} \cos \omega t + \underbrace{A \sin \varphi}_{A_a} \sin \omega t$$

Imamo dvije amplitude lako dobijemo iz prije izvedenih izraza

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)A}{\frac{F_0}{m}}, \quad \sin \varphi = \frac{\frac{\omega}{\tau}A}{\frac{F_0}{m}}$$

(iz slike s rotirajućim vektorima  $\frac{F_0}{m}$ ,  $\frac{\omega}{\tau}A$  i  $(\omega_0^2 - \omega^2)A$ )

$A_d = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}$
$A_a = \frac{F_0}{m} \frac{\frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}$



Za svaku frekvenciju  $\omega$  možemo očitati odgovarajuće amplitude  $A_d$  i  $A_a$ .

1)  $\omega \ll \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$  ispod rezonancije

$A_d > 0$  titranje u fazi

$A_a \approx 0$

2)  $\omega = \omega_0$  rezonancija

$A_d = 0$

$A_a = \frac{F_0 \tau}{m \omega_0}$  maksimalno

3)  $\omega \gg \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$  iznad rezonancije

$A_d < 0$  titranje u protufazi

$A_a \approx 0$

Napomena:

Promatranjem titranja lako uočavamo  $A$  i  $\varphi$ , a ne  $A_d$  i  $A_a$ . Ipak,  $A_d$  i  $A_a$  predstavljaju koristan analitički prikaz.

Razlog za naziv "apsorpcijska" amplituda možemo reći ako izračunamo srednju snagu koju vanjska sila (pogon) predaje tijelu

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) v(t) dt$$

$$v(t) = \frac{d}{dt} u(t) = -\omega A_d \sin \omega t + \omega A_a \cos \omega t$$

Vidimo da brzina ima dvije komponente od kojih je druga ( $\omega A_a$ ) u fazi s vanjskom silom  $F_0 \cos \omega t$ . Usrednjavanjem dobivamo

$$\bar{P} = -\omega A_d F_0 \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt}_=0 + \omega A_a F_0 \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt}_=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} \omega F_0 A_a}$$

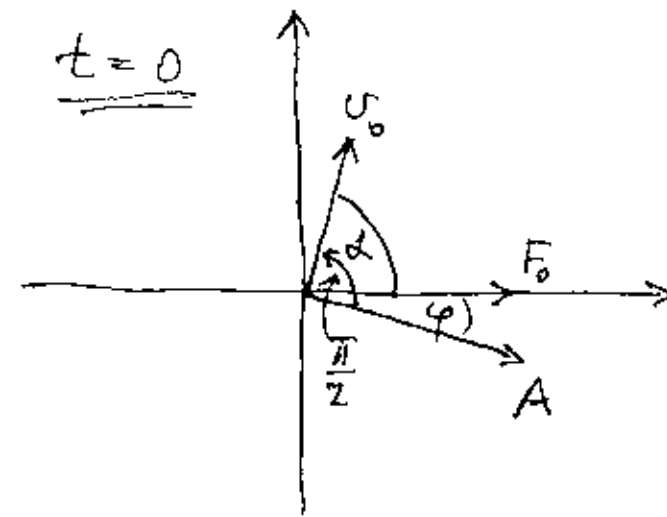
Dakle, snaga koju harmonijski oscilator dobiva od pogonske sile ovisi samo o apsorpcijskoj komponenti amplitude.

Disperzijska komponenta  $A_d$  vezana je uz produkt  $\cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$  koji dva puta mijenja predznak u periodu  $T$ .

To pak znači da vanjske sile vrše najprije pozitivan i negativan rad, tj. najprije predaje i uzima energiju iz harmonijskog oscilatora, te nema usrednjene predaje snage vezano uz  $A_d$ .

Korisno je razmotriti brzinu  $v(t)$  kao projekciju rotirajućeg vektora. Imali smo već ranije izraz

$$v(t) = \frac{d}{dt} u(t) = -\omega A \sin(\omega t - \varphi) = \underbrace{\omega A}_{v_0 \text{ amplituda brzine}} \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})$$



$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$  fazni kut između sile i brzine

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

Napomena:

Rotirajuće vektore na ovoj slici ne smijemo zbrajati jer se radi o različitim fizikalnim veličinama.

Usrednjenu snagu možemo pisati u obliku

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \omega F_0 A_2 = \frac{1}{2} \omega F_0 A \sin \varphi = \frac{1}{2} \omega F_0 A \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}_{\alpha}$$

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} F_0 v_0 \cos \alpha}$$

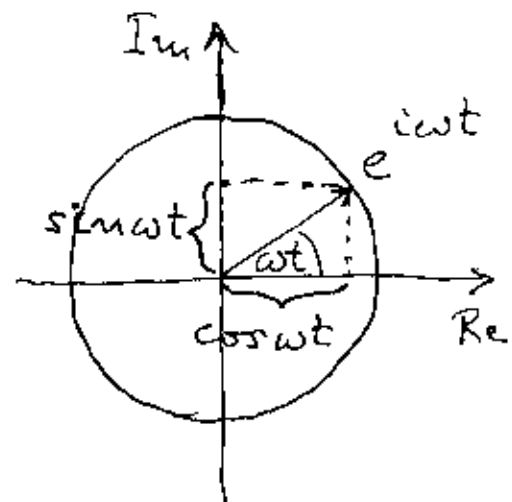
Usrednjena snaga ovisi o kosinusu faznog kuta između sile i brzine.

### Metoda kompleksnih brojeva

Analogno metodi rotirajućih vektora, možemo se poslužiti metodom kompleksnih brojeva prikazanih u kompleksnoj ravnini.

Razmotrimo kompleksan broj

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$



$$\text{Re}[e^{i\omega t}] = \cos \omega t$$

$$\text{Im}[e^{i\omega t}] = \sin \omega t$$

$e^{i\omega t}$  je prikazan jediničnim vektorom koji rotira kutnom brzinom  $\omega$  u kompl. ravnini.

### Napomena:

Vektor u kompleksnoj ravnini nema smjer u realnom prostoru. To je samo spojnica ishodišta s točkom koje predstavlja neki kompleksan broj u kompleksnoj ravnini.

Izvedimo veyšku silu i pomak iz položaja ravnoteže kompleksnim brojevima (oznaka  $\tilde{\phantom{x}}$ )

$$\tilde{F}(t) = F_0 e^{i\omega t}$$

$F_0$  realna veličina

$$\tilde{u}(t) = \tilde{A} e^{i\omega t}$$

$\tilde{A}$  kompleksna amplituda

Pri tome smatramo da su stvarne fizikalne veličine upravo realni dijelovi kompleksnih, tj.  $F(t) = \text{Re}[\tilde{F}(t)]$  i  $u(t) = \text{Re}[\tilde{u}(t)]$ .

Uvrstimo kompleksne veličine u diferencijalnu jednačinu za harmonijski oscilator

$$\frac{d^2 \tilde{u}(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} + \omega_0^2 \tilde{u}(t) = \frac{\tilde{F}(t)}{m}$$

$$-\omega^2 \tilde{A} e^{i\omega t} + i \frac{\omega}{\tau} \tilde{A} e^{i\omega t} + \omega_0^2 \tilde{A} e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 \tilde{A} + i \frac{\omega}{\tau} \tilde{A} + \omega_0^2 \tilde{A} = \frac{F_0}{m}$$

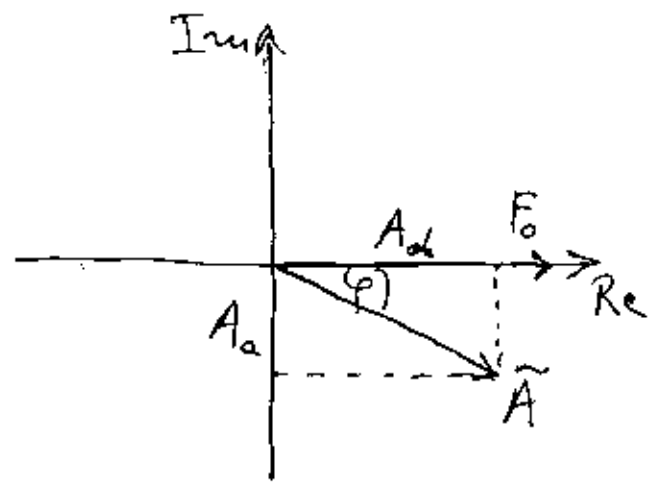
$$\tilde{A} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \frac{\omega}{\tau}} \quad \text{kompleksan broj}$$



Uistinu smo dobili  $\tilde{A}$  kao kompleksnu veličinu. Možemo je rastaviti na realni i imaginarni dio

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \frac{\omega}{\tau}} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i \frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i \frac{\omega}{\tau}} = \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i \frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2} - i \frac{F_0}{m} \frac{\frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2} \\ &= A_d - i A_a\end{aligned}$$

Dobili smo iste izraze za disperzijsku amplitudu  $A_d$  i apsorpcijsku amplitudu  $A_a$  koje smo imali i ranije.



$$\tan \varphi = \frac{A_a}{A_d} = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \checkmark$$

isto kao ranije

$$\tilde{A} = |\tilde{A}| e^{-i\varphi}$$

Modul kompleksne amplitude  $|\tilde{A}|$  možemo izračunati

$$|\tilde{A}|^2 = A_d^2 + A_a^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2]^2} = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}$$

$$|\tilde{A}| = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} \quad \checkmark \quad \text{rezultat kao ranije}$$

Pomak iz položaja ravnoteže možemo pisati u obliku

$$\tilde{u}(t) = \tilde{A} e^{i\omega t} = |\tilde{A}| e^{-i\varphi} e^{i\omega t} = |\tilde{A}| e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Fizičko značenje ima realni dio

$$u(t) = \text{Re}[\tilde{u}(t)] = |\tilde{A}| \cos(\omega t - \varphi)$$

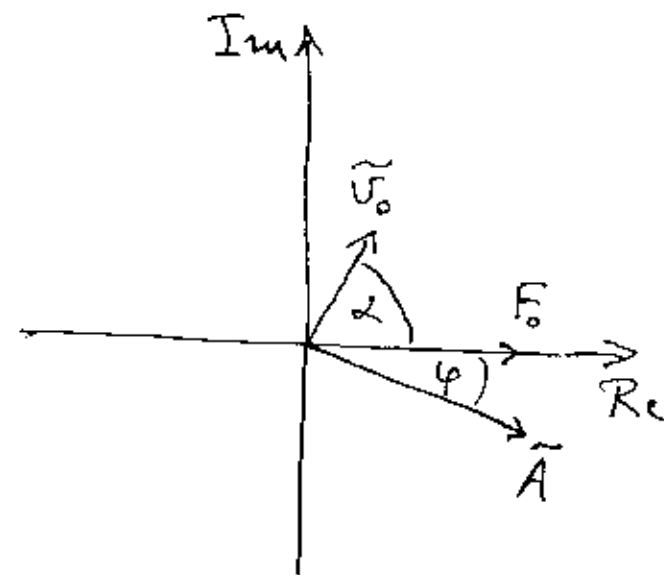
što je isto kao i ranije dobiveni rezultat.

Vidimo da je u kompleksnom prikazu fazi pomak sadržan u kompleksnoj amplitudi  $\tilde{A}$ .

Nadamo brzinu u kompleksnom prikazu

$$\tilde{v}(t) = \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\tilde{A} e^{i\omega t}) = i\omega \tilde{A} e^{i\omega t} = \tilde{v}_0 e^{i\omega t}$$

$\tilde{v}_0$  kompleksna amplituda brzine



$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}i\omega \tilde{A} &= e^{i\frac{\pi}{2}} \omega |\tilde{A}| e^{-i\varphi} \\ &= \omega |\tilde{A}| e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = |\tilde{v}_0| e^{i\alpha}\end{aligned}$$

Množenjem nekog kompleksnog broja s "i" dobiva se kompleksni broj kojemu je faza povećana za  $\frac{\pi}{2}$  (rotacije u smjeru suprotnom od kazaljke na satu).

Možemo uvesti kompleksnu impedanciju  $\tilde{Z}$  koja povezuje kompleksnu silu i brzinu

$$\tilde{F}(t) = \tilde{Z} \tilde{v}(t)$$

$$F_0 e^{i\omega t} = \tilde{Z} i\omega \tilde{A} e^{i\omega t}$$

$$F_0 = \tilde{Z} i\omega \tilde{A}$$

Uvrstimo ranije dobiveni izraz za  $\tilde{A}$

$$F_0 = \tilde{Z} i\omega \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}}$$

$$\tilde{Z} = \frac{m}{i\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}]$$

$$\tilde{Z} = \frac{m}{\omega} \left[ \frac{\omega}{\tau} - i(\omega_0^2 - \omega^2) \right] = Z_a - iZ_d$$

Kompleksna impedancija ima apsorpcijsku i disperzijsku komponentu.

Apsolutna vrijednost impedancije iznosi

$$|\tilde{Z}| = \frac{m}{\omega} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad \checkmark \quad \text{rezultat kao ranije}$$

U kompleksnom obliku možemo pisati

$$\tilde{Z} = |\tilde{Z}| e^{-i\alpha} \quad \text{tg } \alpha = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\frac{\omega}{\tau}}$$

Napomena:

Budući da je  $\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2}$  imamo  $\text{tg } \alpha = \text{ctg } \varphi$ , odnosno  $\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \varphi}$ , što je u skladu s ranijim rezultatom.

Možemo također pisati

$$F_0 = \tilde{Z} \tilde{v}_0 = |\tilde{Z}| e^{-i\alpha} |\tilde{v}_0| e^{i\alpha}$$

$$F_0 = |\tilde{Z}| |\tilde{v}_0|$$

Ovaj je rezultat u skladu s ranijom definicijom impedancije.

Kada tražimo vremenski usrednjenu vrijednost dva kompleksna vektora npr.  $\tilde{C} e^{i\omega t}$  i  $\tilde{D} e^{i\omega t}$  koji rotiraju kutnom brzinom  $\omega$ , moramo biti oprezni.

$$\langle \text{Re}[\tilde{C} e^{i\omega t} \tilde{D} e^{i\omega t}] \rangle \neq \langle \text{Re}[\tilde{C} e^{i\omega t}] \text{Re}[\tilde{D} e^{i\omega t}] \rangle$$

Neka su amplitude tih vektora kompleksne

$$\tilde{C} = |\tilde{C}| e^{i\gamma}, \quad \tilde{D} = |\tilde{D}| e^{i\delta}$$

Trasformiramo usrednjenu vrijednost

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}[\tilde{C} e^{i\omega t} \tilde{D} e^{i\omega t}] \rangle &= |\tilde{C}| |\tilde{D}| \langle \text{Re}[e^{i(2\omega t + \gamma + \delta)}] \rangle \\ &= |\tilde{C}| |\tilde{D}| \langle \cos(2\omega t + \gamma + \delta) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Imamo titranje frekvencijom  $2\omega$ , pa srednja vrijednost unutar perioda  $T$  iznosi 0.

Sasvim drugi rezultat se dobiva usrednjavanjem veličine (fizički ispravno!)

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}[\tilde{C} e^{i\omega t}] \text{Re}[\tilde{D} e^{i\omega t}] \rangle &= \langle \text{Re}[|\tilde{C}| e^{i(\omega t + \gamma)}] \text{Re}[|\tilde{D}| e^{i(\omega t + \delta)}] \rangle \\ &= \langle |\tilde{C}| \cos(\omega t + \gamma) |\tilde{D}| \cos(\omega t + \delta) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} |\tilde{C}| |\tilde{D}| \langle \cos(2\omega t + \gamma + \delta) + \cos(\gamma - \delta) \rangle \\ &= \frac{1}{2} |\tilde{C}| |\tilde{D}| \cos(\gamma - \delta) \end{aligned}$$

Prvi član, koji titra frekvencijom  $2\omega$ , iznosi 0 kod usrednjavanja, dok drugi član ne sadrži vrijeme, tj. predstavlja konstantu.

Dakle, kod usrednjavanja se pojavljuje  $\frac{1}{2}$  i kosinus od  $(\gamma - \delta)$ , što predstavlja faznu razliku kompleksnih vektora  $\tilde{C}$  i  $\tilde{D}$ .

Možemo pokazati da se vremensko usrednjavanje može dobiti također i putem izraza

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{C} \tilde{D}^*] &= \frac{1}{2} \text{Re}[|\tilde{C}| e^{i\gamma} e^{i\omega t} |\tilde{D}| e^{-i\delta} e^{-i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}[|\tilde{C}| |\tilde{D}| e^{i(\gamma - \delta)}] = \frac{1}{2} |\tilde{C}| |\tilde{D}| \cos(\gamma - \delta) \end{aligned}$$

Ovakav zapis je elegantniji, pa ga možemo primijeniti za usrednjenu snagu

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{F}(t) \tilde{U}^*(t)]$$

Zgodno je još uvrstiti izraz za impedanciju  $\tilde{F}(t) = \tilde{Z} \tilde{U}(t) = (Z_a - iZ_d) \tilde{U}(t)$ , pa dobivamo

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{2} \text{Re}[(Z_a - iZ_d) \tilde{U}(t) \tilde{U}^*(t)] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}[(Z_a - iZ_d) |\tilde{U}_0|^2] = \frac{1}{2} |\tilde{U}_0|^2 Z_a \end{aligned}$$

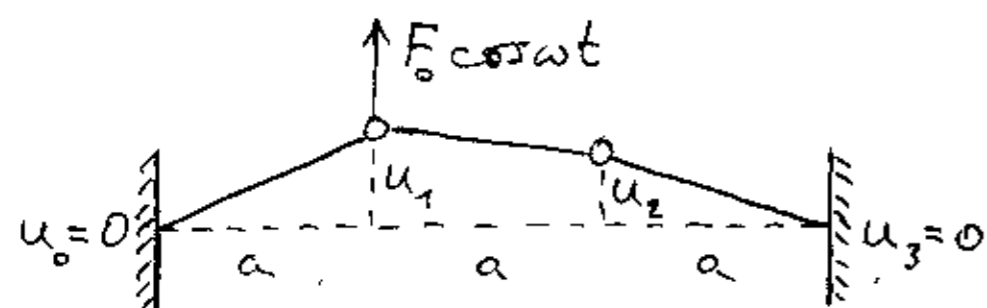
Prisjetimo se da je  $|\tilde{U}_0| = \omega |\tilde{A}|$ , pa imamo

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \omega^2 |\tilde{A}|^2 Z_a$$

Usrednjena snaga ovisi samo o amplitudnoj impedanciji.

## 2.2. Prisilno titranje sustava s dvije čestice

Neka vanjska periodička sila djeluje ravno na prvu česticu



Jednadžbe gibanja za dvije čestice glase

$$m \frac{d^2 u_1}{dt^2} = - [K(u_1 - u_0) + K(u_1 - u_2)] - b \dot{u}_1 + F_0 \cos \omega t$$

$$m \frac{d^2 u_2}{dt^2} = - [K(u_2 - u_1) + K(u_2 - u_3)] - b \dot{u}_2$$

### Zapažanje:

U svakoj od ovih jednadžbi pojavljuju se  $u_1$  i  $u_2$ . To znači da gibanje  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  nisu nezavisna.

Tako  $F_0 \cos \omega t$  djeluje izravno ravno na  $u_1(t)$ , posredno se njen utjecaj može osjetiti i na  $u_2(t)$ .

Isprobajmo je li moguće da sustav titra u prvom modu. Tada može biti  $u_1 = u_2$ , pa gornja jedn. postaje

$$\underbrace{\frac{d^2 u_1}{dt^2}}_{= \frac{1}{\tau^2}} + \underbrace{\frac{b}{m} \frac{du_1}{dt}}_{= (\omega^{(1)})^2} + \frac{K}{m} u_1 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Ove dif. jedn. je po formi ista kao za tjerani harmonijski oscilator iz prethodnog odjeljka 2.1.

Razlika je u tome što se sada kao vlastita uokvencija oscilatora pojavljuje  $\omega^{(1)}$ , tj. frekvencija prvog moda.

Druge čestice titra kao i prva jer je  $u_1 = u_2$ .

Gornja nehomogena dif. jedn. ima po formi isto rješenje kao u prethodnom odjeljku 2.1.

$$u(t) = u_H(t) + u_P(t) \quad \text{— stacionarno rješenje}$$

(eksponencijelno  
truje u vremenu)

Ovdje nas interesira stacionarno titranje (nakon  $t \gg \tau$ )

$$u(t) = A^{(1)} \cos(\omega t - \varphi^{(1)})$$

$$A^{(1)} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{[(\omega^{(1)})^2 - \omega^2]^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \quad \text{tg } \varphi^{(1)} = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{(\omega^{(1)})^2 - \omega^2}$$

### Napomena:

Indeks "1" za  $A^{(1)}$  i  $\varphi^{(1)}$  označava da se dobivene amplituda i fazi pomak odnose na titranje u prvome modu. Te veličine vrijede jednako za obje čestice u prvome modu.

Dakle, u stacionarnome stanju vanjska sila tjera sustav na titranje u prvome modu s time da rezultirajuća amplituda i fazi pomak ovise o razlici frekvencije  $\omega$  vanjske sile i rezonantne frekvencije prvoga moda  $\omega^{(1)}$ .

Što je s drugim modom? Pobuduje li vanjska sila i titranje u drugome modu?

Ispitajmo sada je li moguće da sustav titra u drugome modu. Tada mora biti  $u_1 = -u_2$ , pa nam jednačina gibanja za prvu česticu postaje

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{du_1}{dt} + \frac{3K}{m} u_1 = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\frac{1}{\tau}}$ 
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{(\omega^{(2)})^2}$

U stacionarnom titranju imamo

$$u(t) = A^{(2)} \cos(\omega t - \varphi^{(2)})$$

$$A^{(2)} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{[(\omega^{(2)})^2 - \omega^2]^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} \quad \text{tg } \varphi^{(2)} = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{(\omega^{(2)})^2 - \omega^2}$$

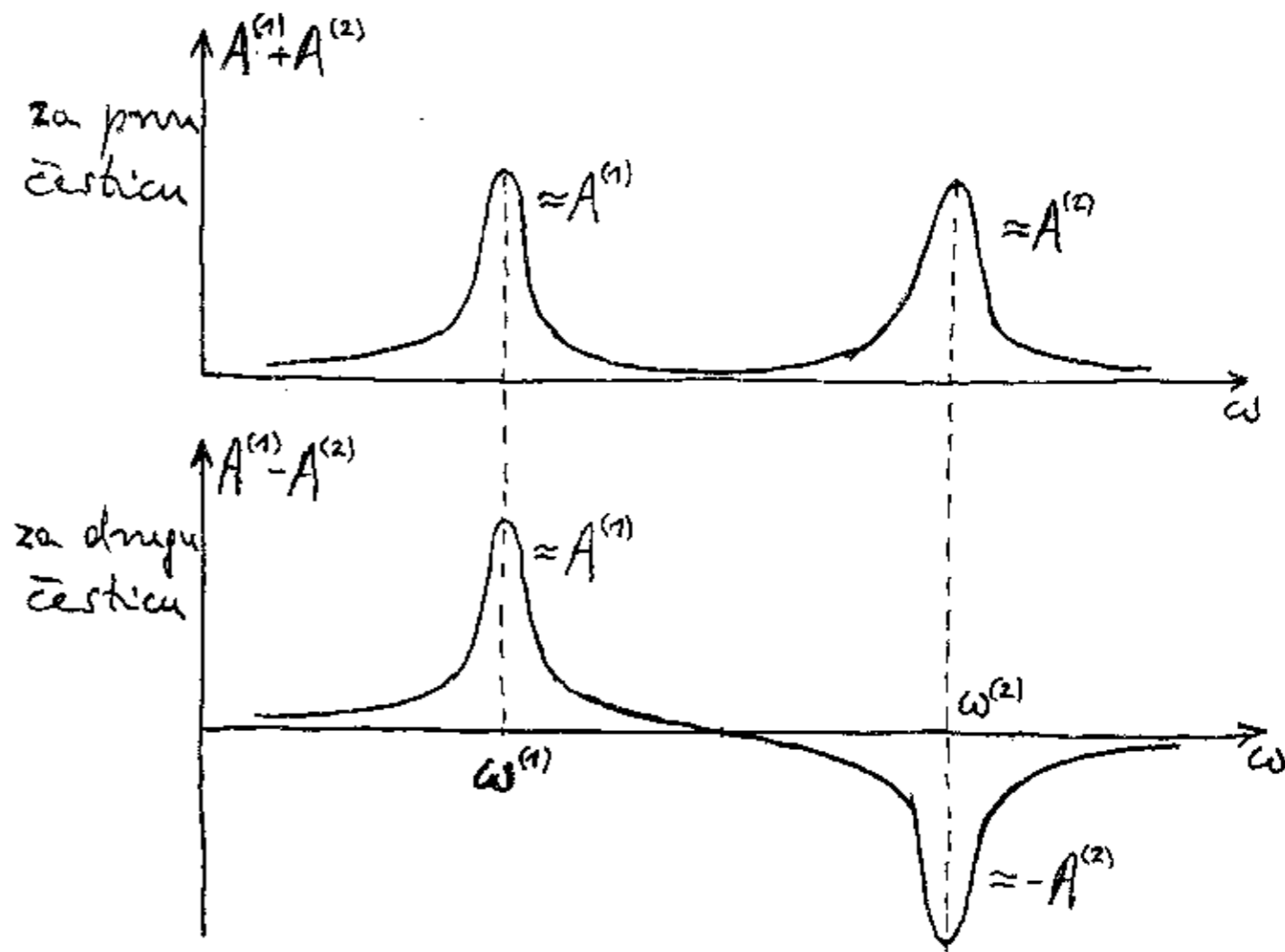
Dakle, vanjska sila tjera sustav i na titranje u drugome modu. Rezultirajuća amplituda i fazi pomak ovise o razlici frekvencije  $\omega$  i  $\omega^{(2)}$  (rezonantne frekvencije drugoga moda).

Napomena:

U gornjem zapisu za  $u(t)$  mislimo stavljali indekse "1" ili "2" za dvije čestice. Podrazumijeva se da je u drugome modu  $u_1 = u$ , a  $u_2 = -u$ .

Zaključujemo da u stacionarnom stanju vanjska sila tjera oba moda, odnosno ukupno titranje je superpozicija dvaju modova. Titranje svakog moda je prisilno, tj. na frekvenciji vanjske sile  $\omega$  (a ne po vlastitoj frekvenciji moda).

Ako mijenjamo frekvenciju popunske sile  $\omega$  možemo postići uzastopne rezonancije za prvi mod ( $\omega = \omega^{(1)}$ ) i drugi mod ( $\omega = \omega^{(2)}$ ).



Kod bilo koje frekvencije pogonske sile  $\omega$  prisilno titraju oba moda na toj frekvenciji ali amplitude su ina različite.

Ako je  $\omega$  u blizini  $\omega^{(1)}$ , onda dominira prvi mod, tj. amplituda  $A^{(1)}$  je velika a  $A^{(2)}$  se može zanemariti jer je velika između  $\omega$  i  $\omega^{(2)}$  tada velika.

Suprotno se zbiva kada je  $\omega$  u blizini  $\omega^{(2)}$ . Tada je  $A^{(1)} \ll A^{(2)}$  pa  $A^{(1)}$  možemo zanemariti.

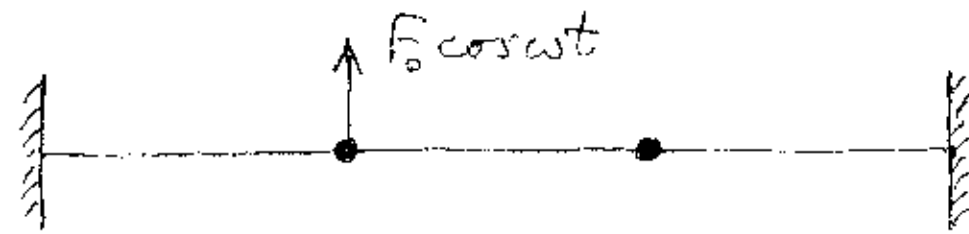
### 21. pokus:

uzastopne rezonancije dvaju modova

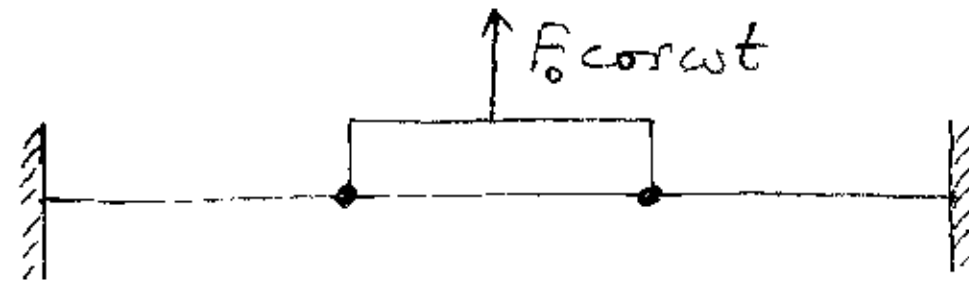
### Napomena:

Širina rezonancije za svaki mod ovisi o gušćini. Za opažanje razlučenih rezonancija dvaju modova potrebno je da širina rezonancije  $\Delta\omega$  bude znatno manja od razlike dviju rezonantnih frekvencija  $\omega^{(2)} - \omega^{(1)}$ .

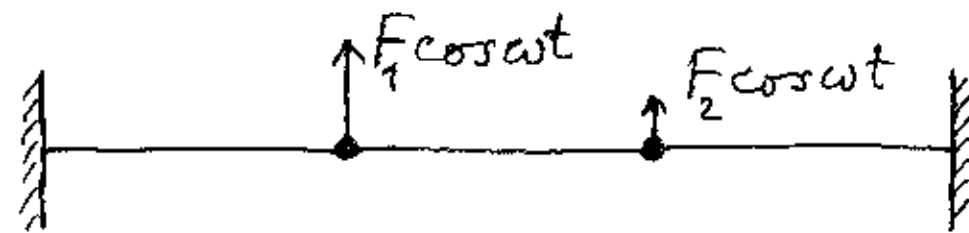
### Spreza vanjske sile i sustava



Možemo pobuditi oba moda jer je gibanje prve čestice neophodno za oba moda, a druga se čestica može postaviti tako da imamo jedan ili drugi mod (u ovisnosti o frekvenciji).



Očito je da na ovaj način ne možemo pobuditi drugi mod.



Prvi mod se pobuduje većom silom ( $F_1 + F_2$ ) a drugi mod manjom ( $F_1 - F_2$ ).

### Zaključak:

Pobudivene modove ovisi o sprezi vanjske sile i sustava.

### 2.3. Principno titranje sustava s više čestica

Za sustav od  $N$  čestica imamo  $N$  modova  
 $n=1, \dots, N$ .

U stacionarnom stanju svi modovi titraju istodobno nametnutom frekvencijom  $\omega$ .  
Amplituda pojedinačnog moda ovisi o tome  
koliko je  $\omega$  daleko od rezonantne  
frekvencije toga moda.

Za  $\omega = \omega^{(n)}$  najvećom amplitudom titra  
 $n$ -ti mod a ostali se jedva primijete.

25. pokus:

rezonancije u sustavu s tri čestice

#### Princip mehaničkog filtra

Razmotrimo titranje triju čestica  
za slučajeva:

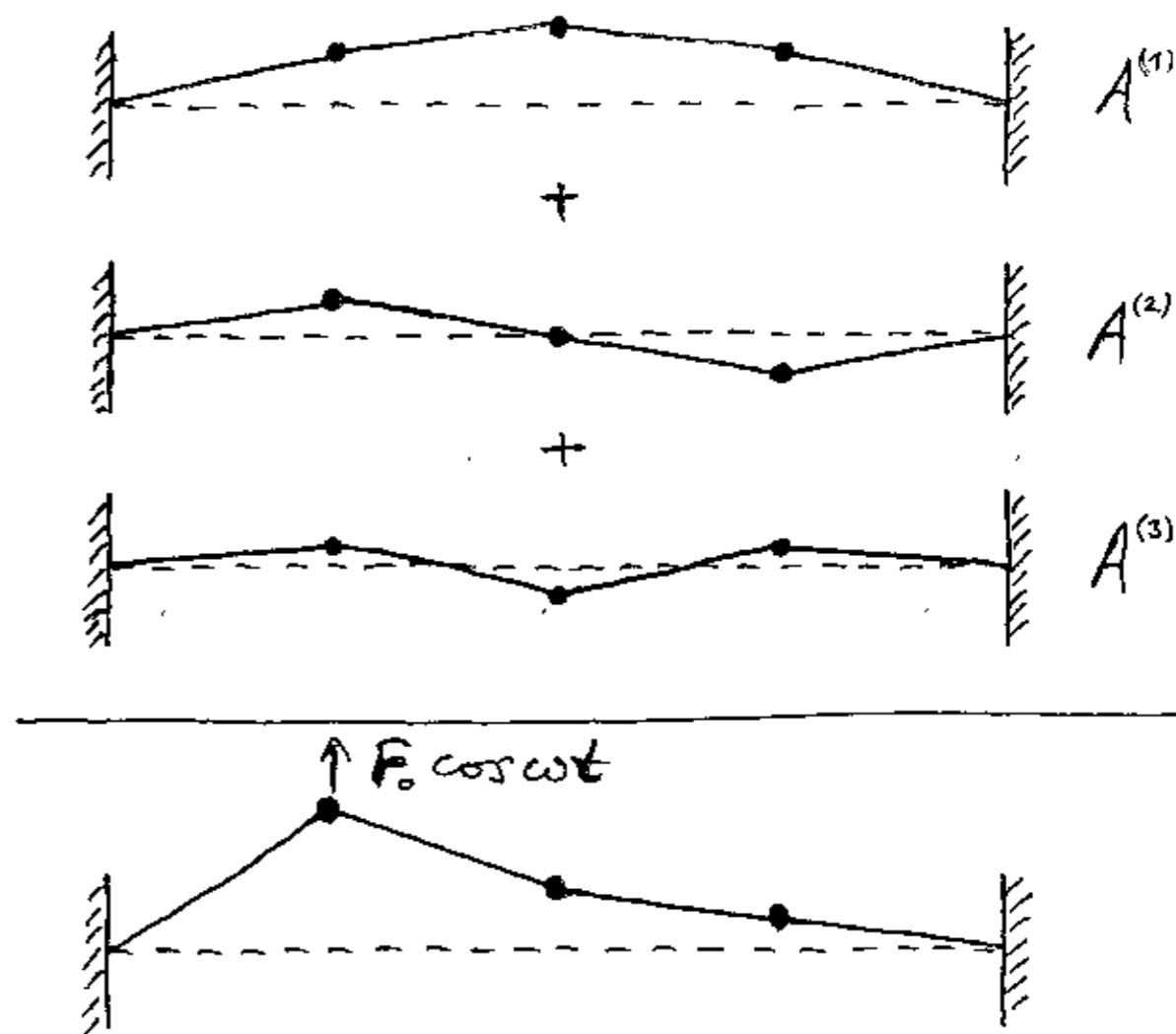
1)  $\omega \ll \omega^{(1)}$  ispod najdonje rezonancije

Odnos amplituda modova je

$$A^{(1)} > A^{(2)} > A^{(3)}$$

(jer je  $\omega$  najbliže do  $\omega^{(1)}$ , zatim  
do  $\omega^{(2)}$ , a najdalje od  $\omega^{(3)}$ )

Ukupno titranje daje zbroj triju modova



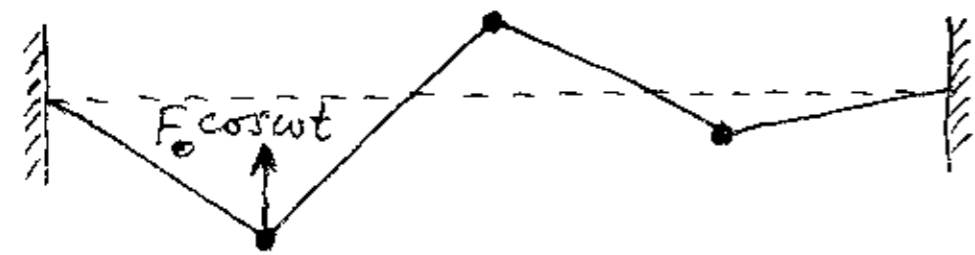
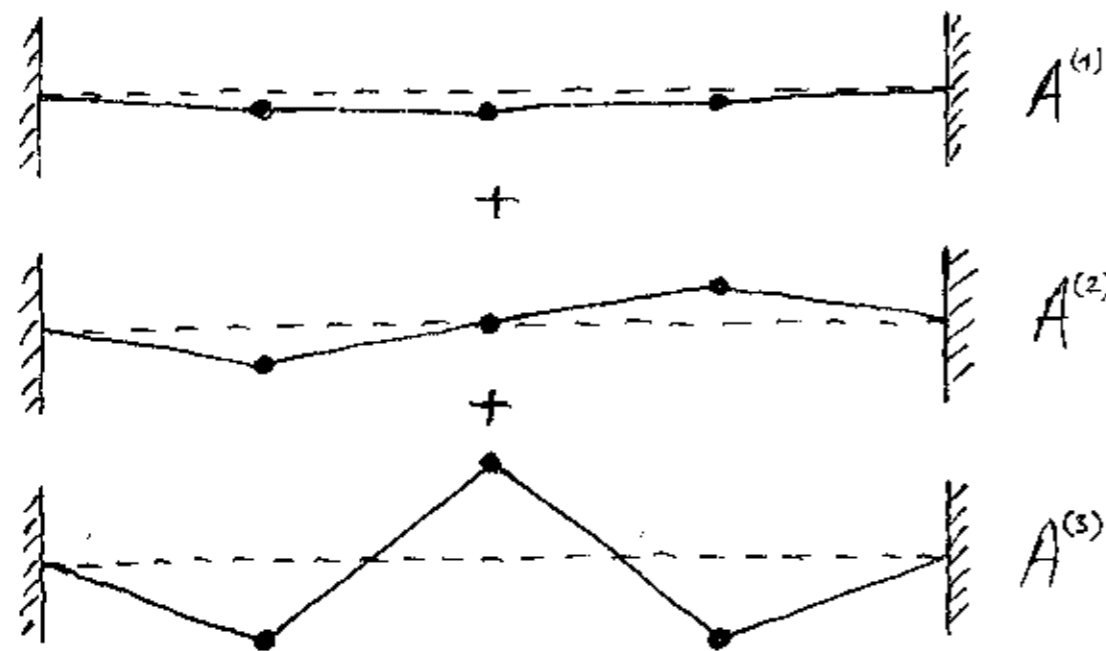
Amplitude čestice opadaju.

2)  $\omega \gg \omega^{(3)}$  iznad najgornje rezonancije

Amplitude su negativne (u protufazi s  
vanjskom silom), a odnos je

$$|A^{(1)}| < |A^{(2)}| < |A^{(3)}|$$

(jer je  $\omega$  najbliže do  $\omega^{(3)}$ , zatim do  $\omega^{(2)}$ ,  
a najdalje od  $\omega^{(1)}$ )



Cik-cak konfiguracija s amplitudama koje opadaju po iznosu.

26. pokus:

oblik titranja za  $\omega \ll \omega^{(1)}$  i  $\omega \gg \omega^{(3)}$

Općenito, sustav od  $N$  čestica vezanih oprugama djeluje kao mehanički filter za sve frekvencije  $\omega \ll \omega^{(1)}$  (ispod najdonje rezonancije) i za sve frekvencije  $\omega \gg \omega^{(N)}$  (iznad najgornje rezonancije).

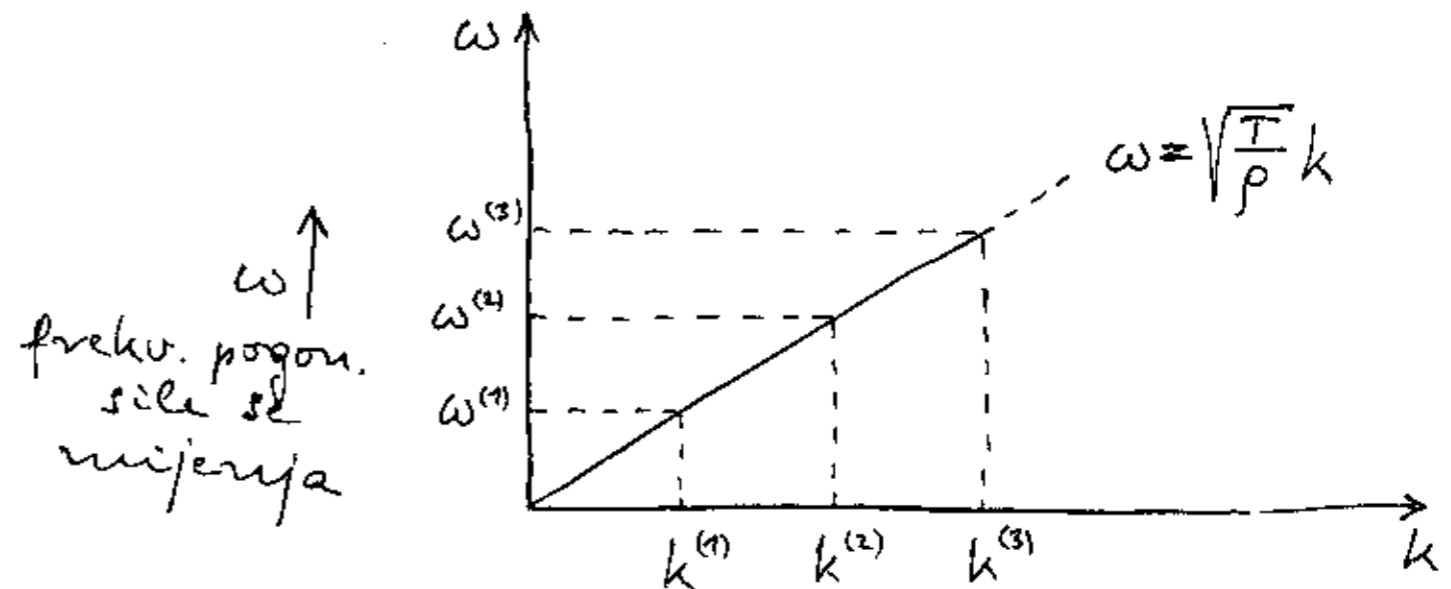
Mehanički filteri (u složenijoj izvedbi) služe za izolaciju od neželjenih vibracija iz nekog izvora.

Primjeri: postolje pogonskih strojeva, kontakt s drugim uređajima, postolje za vrlo osjetljive uređaje.

Možemo kombinirati razne filtere da eliminiramo žive područje frekvencija.

## 2.4. Prisilno titranje elastične niti (kontinuum)

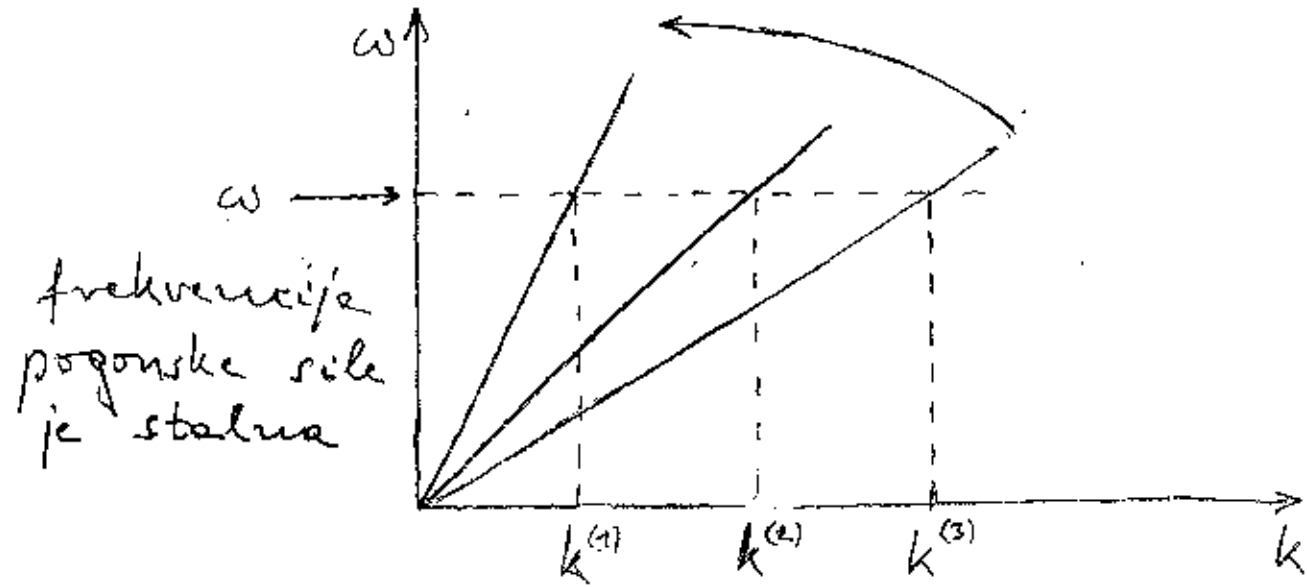
Dispersijska relacija za elastičnu nit





Ako povećavamo frekvenciju pogonske sile možemo postići uzastopne rezonancije na frekvencijama  $\omega^{(1)}$ ,  $\omega^{(2)}$ , itd.

Alternativno možemo držati  $\omega = \text{konst.}$  te vastirati elastičnu <sup>nit</sup> tako da se  $\sqrt{\frac{I}{\rho}}$  povećava



27. pokus:

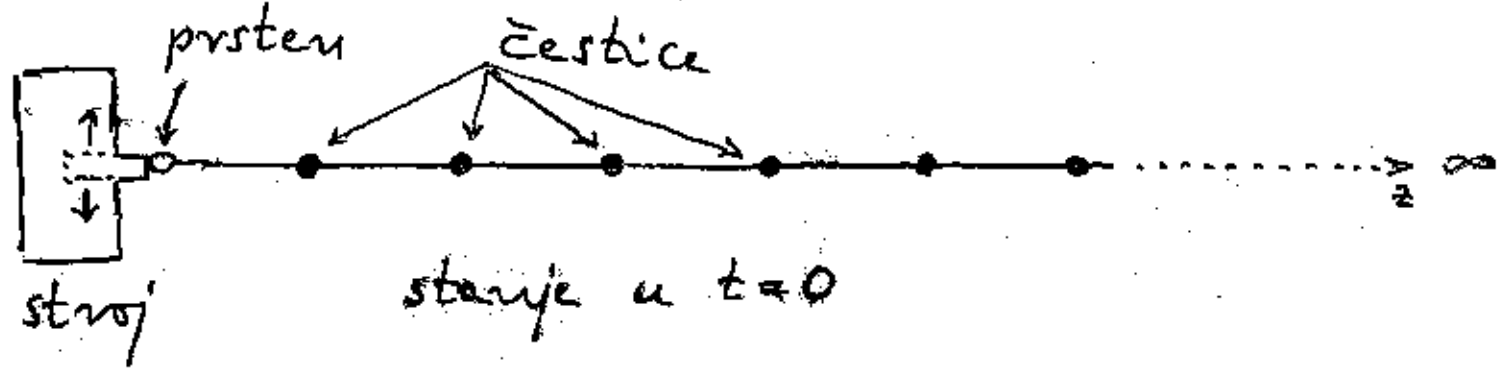
uzastopne rezonancije modova u elastičnoj niti

### 3. VALOVI U JEDNOJ DIMENZIJI

#### 3.1. Valno gibanje

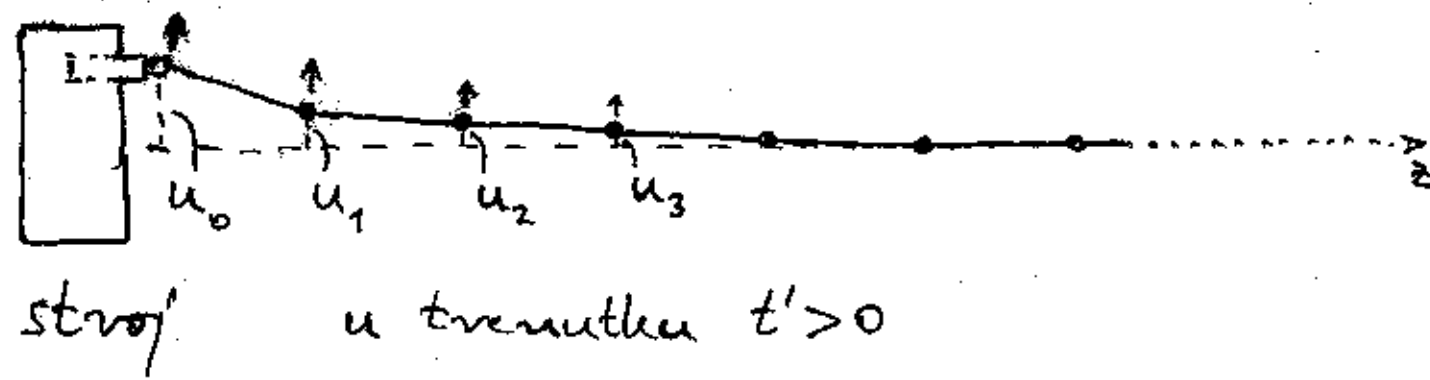
U prethodnim poglavljima razmatrali smo titranje u sustavima koji su bili ograničeni na dva kraja.

Razmatramo sada sustav jednakičestice vezanih oprugama koji počinje od jednog kraja i proteže se u beskonačnost.



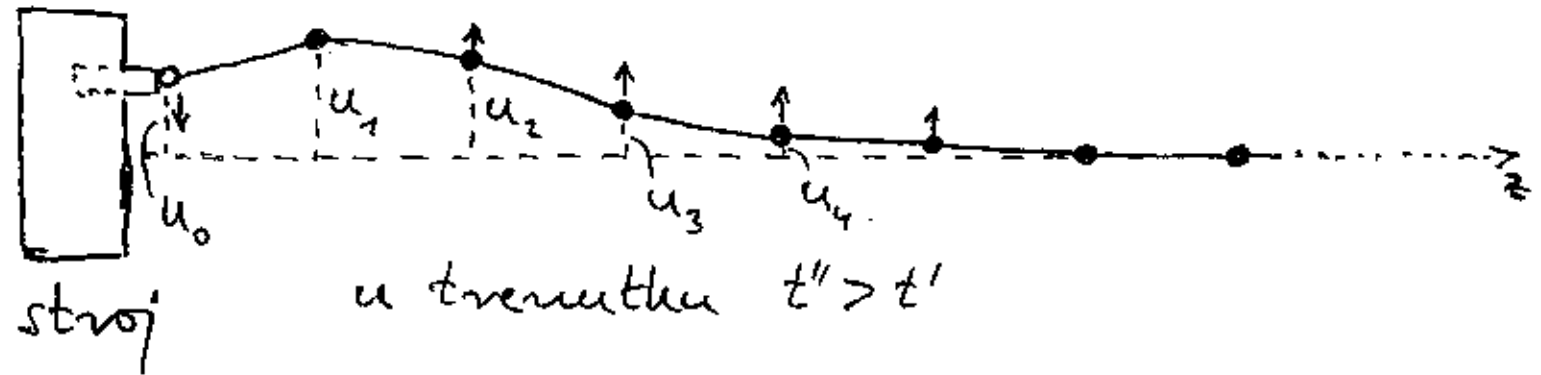
Neka vanjska periodička sila pomiče prsten tako da on izvodi periodičko gibanje

$$u_0(t) = A \sin \omega t$$



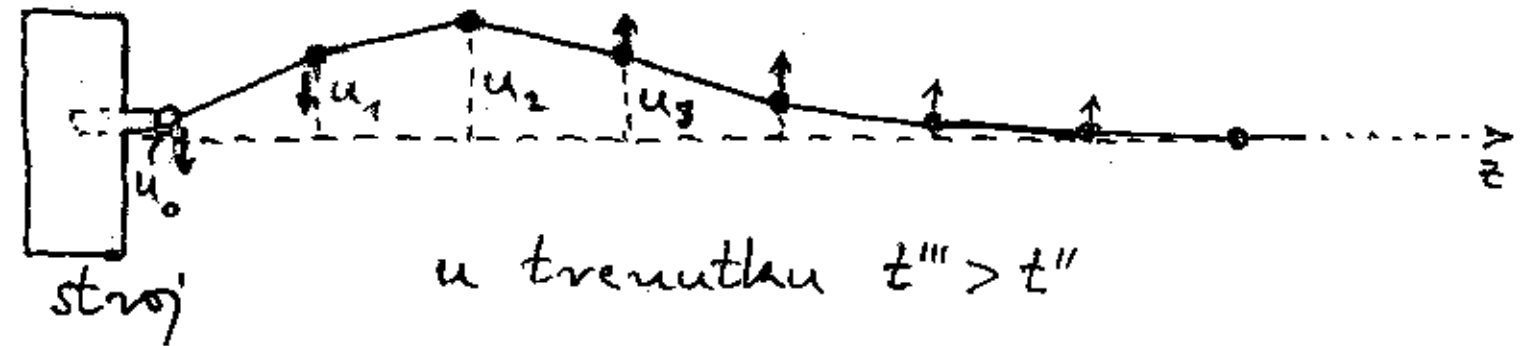
Strelice označavaju trenutni smjer kretanja prstena i pojedinih čestica.

U nekom kasnijem trenutku  $u_0$  dosegne svoju maksimalnu vrijednost  $A$  i zatim se smanjuje



Prsten se približava položaju ravnoteže. Prva čestica je dosegla maksimalni otklon  $u_1 = A$  (isti otklon koji je prsten imao u neko ranijem trenutku). Druga čestica se još udaljava od položaja ravnoteže, itd.

Nakon toga počinje se i prva čestica vraćati prema položaju ravnoteže a druga čestica dosegne maksimalni otklon  $u_2 = A$



Treća čestica se još udaljava od položaja ravnoteže.

Proces se nastavlja. Prsten prelazi na drugu stranu ( $u_0 < 0$ ), prva čestica ga slijedi s kašnjenjem a druga čestica slijedi prvu, itd.

Prostern se pod utjecajem neke periodičke pogonske sile giba od  $u_0 = A$  do  $u_0 = -A$  i natrag, tj.

$$u_0(t) = A \sin \omega t$$

Prva čestica izvodi isto gibanje ali s nekim vremenskim kašnjenjem  $\Delta t$

$$u_1(t) = A \sin \omega(t - \Delta t) = A \sin(\omega t - \Delta \varphi)$$

Vremensko kašnjenje je ekvivalentno faznom pomaku  $\Delta \varphi = \omega \Delta t$ .

Sve su čestice ekvivalentne pa se titranje prenosi od čestice do čestice na isti način. Stoga u valnom titranju sve čestice titraju jednakom amplitudom i istom frekvencijom ali s vremenskim kašnjenjem uzastopnih čestica

$$u_2(t) = A \sin \omega(t - 2\Delta t) = A \sin(\omega t - 2\Delta \varphi)$$

⋮

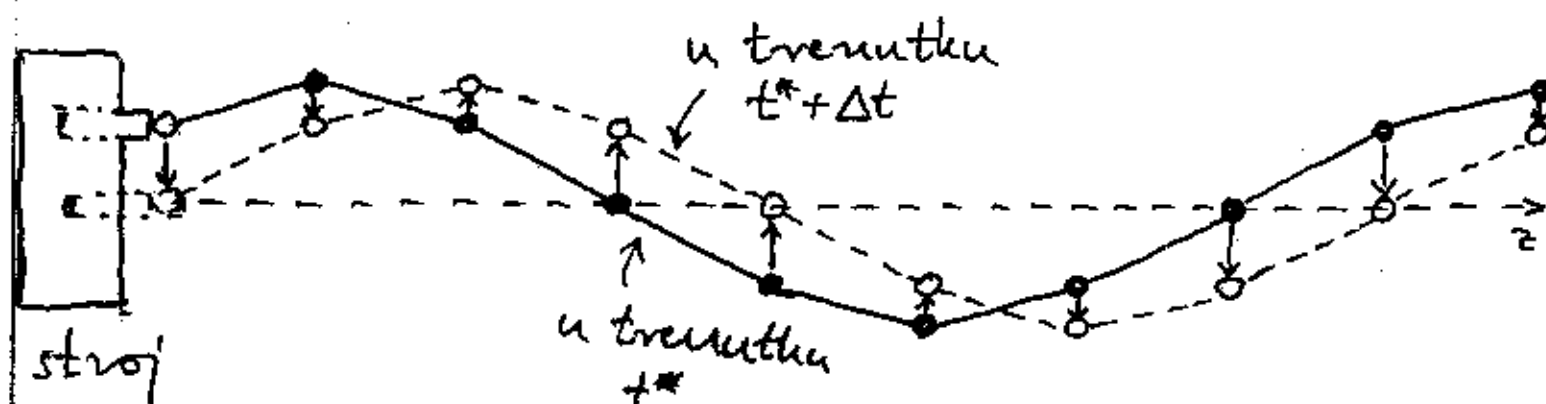
$$u_i(t) = A \sin \omega(t - i\Delta t) = A \sin(\omega t - i\Delta \varphi)$$

⋮

Titranje svake čestice kasni za  $\Delta t$  prema prethodnoj čestici. Ukupno kašnjenje  $i$ -te čestice prema prostoru iznosi  $i\Delta t$ .

Nakon dovoljno dugog vremena od uključivanja pogonske sile titranje se proširi do čestice koje su jako daleko duž osi  $z$ . Tamo imamo početni uspon titranja koje nas sada ne zanima.

U dijelu sustava u kojemu je uspostavljeno potpuno valno gibanje možemo prikazati stanje u trenutku  $t^*$  i  $t^* + \Delta t$



Strelice označavaju pomake pojedinih čestica u intervalu vremena  $\Delta t$ .

Novi otklon pojedine čestice iz položaja ravnoteže jednak je prijašnjemu otklonu prethodne čestice u nizu, tj:

$$u_i(t^* + \Delta t) = u_{i-1}(t^*)$$

Ovakav odnos slijedi iz matematičke formule

$$u_i(t^* + \Delta t) = A \sin \omega(t^* + \Delta t - i\Delta t) = A \sin \omega[t^* - (i-1)\Delta t] = u_{i-1}(t^*)$$

Napomena:

Radi jednostavnosti prikaza uzeli smo primjer u kojemu je  $\Delta t$  upravo kašnjenje uzastopnih čestica.

Pogonska sila koja pokreće prsten predstavlja izvor vala. Val se širi u valnom sredstvu koje predstavlja niz čestica vezanih oprugama.

Napomena:

Čestica ne putuju duž osi  $z$ . Svaka čestica titra oko svojeg položaja ravnoteže.

Ovo što oho opaža kao širenje vala duž osi  $z$  je zapravo ponicanje forme vala duž osi  $z$  koje nastaje zbog vremenskog kašnjenja u titranjima uzastopnih čestica u nizu.

Položaj  $i$ -te čestice duž osi  $z$  je  $z_i = ia$  pa možemo pisati za njeno fazno kašnjenje prema izvoru  $u_0(t)$

$$i\Delta\varphi = \frac{z_i}{a}\Delta\varphi = kz_i$$

Stoga možemo reći da je val prikazan funkcijom

$u(z, t) = A \sin(\omega t - kz)$

 valna funkcija

Ako gledamo ne val u nekom danom trenutku (npr.  $t = t_1$ ) onda imamo samo jednu varijablu  $z$ , tj. otkloni pojedinih čestica  $u_i$  ovise o koordinatama  $z_i$  tih čestica.

Prostorni period valne funkcije naziva se valna duljina  $\lambda$ . Ako se pomaknemo duž osi  $z$  za  $\Delta z = \lambda$ , možemo dobiti

$$k\lambda = 2\pi \implies k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ (kretni valni broj)}$$

Pojedina čestica nalazi se na određenom položaju  $z_i$ , pa je njeno titranje

$$u_i(t) = A \sin(\omega t - kz_i), \quad z_i = ia$$

Sve čestice titraju istom amplitudom i frekvencijom ali različito kasne.

Napomena:

Kod modova su imali

$$u^{(n)}(z_i, t) = A^{(n)} \sin k^{(n)} z_i \cos \omega^{(n)} t$$

U danome modu čestice titraju bez međusobnog faznog kašnjenja, a amplitude su im različite  $A_i^{(n)} = A^{(n)} \sin k^{(n)} z_i$ .

Da li kod valova postoje rezonancije?

Kod modova su zbog rubnih uvjeta imali samo određene vrijednosti za  $k$ :  
 $k^{(1)}L = \pi, \quad k^{(2)}L = 2\pi, \quad \dots, \quad k^{(n)}L = n\pi$

Kod valova imamo na izvoru  $u_0 = A \sin \omega t$  što nije konstantan rubni uvjet, a sustav je (po pretpostavci) beskonačan pa ni s te strane nema rubnog uvjeta. Stoga ne postoje rezonancije.

Valni broj  $k$  <sup>može</sup> poprimiti kontinuirano sve vrijednosti u intervalu

$$0 \leq k \leq \frac{\pi}{a}$$

$k=0 \Rightarrow ka=0$  nema faznog kašnjenja između susjednih čestica  
 $\lambda = \infty$  beskonačna valna duljina

$ka \ll 1$  maleno fazno kašnjenje između susjednih čestica  
 $\lambda \gg a$  dugovalni slučaj  
 mnogo čestica unutar  $\lambda$

$ka = \pi$  fazno kašnjenje između susjednih čestica iznosi polovicu perioda (cik-cak konfiguracija)  
 $k = \frac{\pi}{a}$  maksimalna vrijednost

Što bi značilo da uzmemo  $k > \frac{\pi}{a}$ ?



$k > \frac{\pi}{a}$        $k < \frac{\pi}{a}$

kašnjenje veće od  $\pi$  je umjetno

Kod modova su dozvoljeni  $k^{(n)}$  bili povezani s frekvencijama  $\omega^{(n)}$  putem disperzijske relacije.

Koje su frekvencije kod valova moguće i da li su vezane s valnim brojem  $k$ ?

Jednadžba gibanja za  $i$ -tu česticu

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = -mg \frac{u_i}{l} - [K(u_i - u_{i-1}) + K(u_i - u_{i+1})]$$

$$u_i(t) = A \sin(\omega t - k z_i), \quad z_i = i a$$

$$-m \omega^2 u_i = -mg \frac{u_i}{l} - K(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1})$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{K}{m} \left( 2 - \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{u_i} \right)$$

$$u_{i-1} = A \sin[\omega t - k(i-1)a] =$$

$$= A \sin(\omega t - k i a) \cos ka + A \cos(\omega t - k i a) \sin ka$$

$$u_{i+1} = A \sin[\omega t - k(i+1)a] =$$

$$= A \sin(\omega t - k i a) \cos ka - A \cos(\omega t - k i a) \sin ka$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{K}{m} (2 - 2 \cos ka)$$

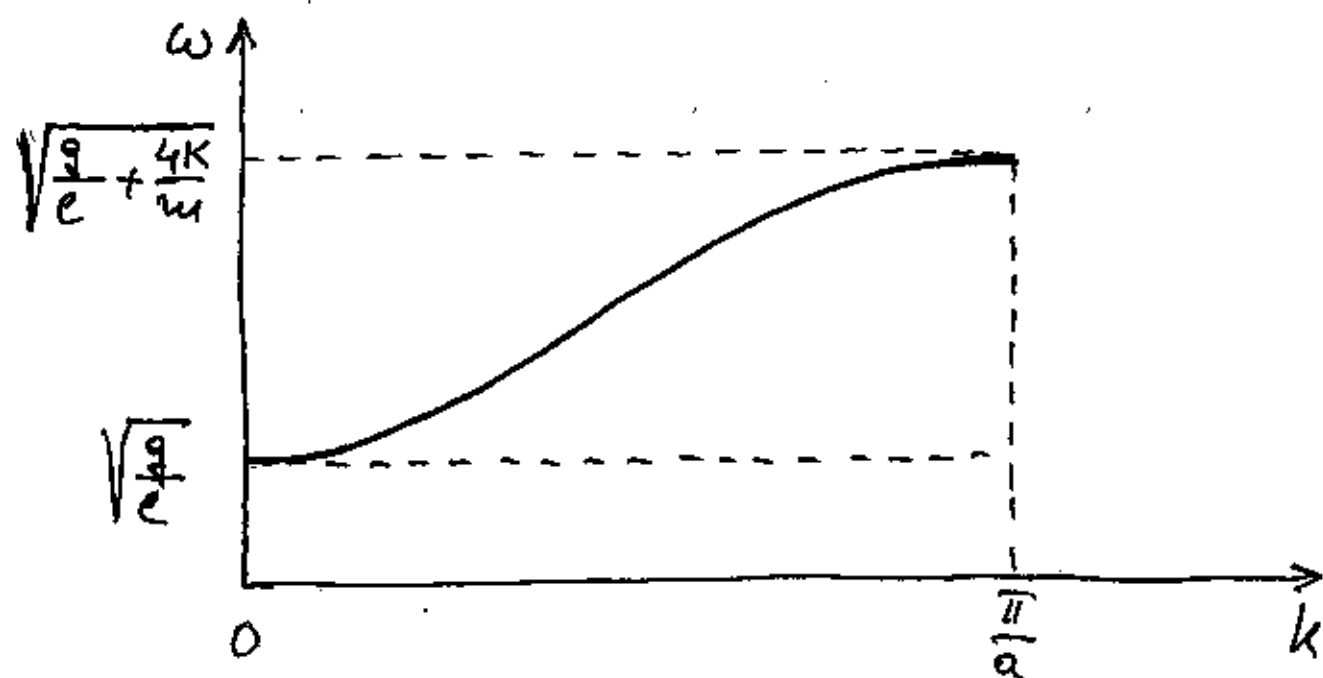
Ishodimo trigonomet. relaciju

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}}$$

dispersionjska  
relacija

Dakle, ujet da  $u_i(t) = A \sin(\omega t - kz_i)$  bude rjesenje jednadzbe gibanja jer da  $\omega$  i  $k$  budu vezani dispersionjskom relacijom.



Za svaki mogući  $k$  od  $0$  do  $\frac{\pi}{a}$  postoji odgovarajuća frekvencija između  $\omega_{\min}$  i  $\omega_{\max}$ .

U praksi uvijek imamo izvor koji titra nekom frekvencijom  $\omega$ .

Ako je  $\omega$  unutar intervala  $\omega_{\min}$  do  $\omega_{\max}$ , nastaje valno gibanje s prepadnim valnim brojem  $k$ .

Što se zbiva ako je  $\omega$  izvan tog intervala?

1)  $\omega < \omega_{\min}$

Ne postoji odgovarajuće  $k$  prema dispersionjskoj relaciji. Dakle, nema međusobnog kašnjenja čestice, a to znači da nema valnog gibanja.

Budući da izvor ipak titra

$$u_0(t) = A \sin \omega t$$

može titrati prva čestica i daljnje čestice bez kašnjenja ali eventualno drugim amplitudama

$$u_1(t) = A_1 \sin \omega t$$

$$\vdots$$

$$u_i(t) = A_i \sin \omega t$$

$$\vdots$$

Uvrštavanjem u jedn. gibanja dobivamo

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{K}{m} \left( 2 - \frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i} \right)$$

Ujet  $\omega < \omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{l}}$  može biti ostvaren kada amplitude zadovoljavaju

$$\frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i} > 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{2} > A_i$$

amplitude se smanjuju

Svaka čestica igra ulogu izvora za slijedeće čestice. To znači da ovaj amplituda uzastopnih čestica mora biti konstantan. Uvedimo ovaj

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = e^{-\alpha a} \Rightarrow \boxed{A_i = A e^{-\alpha z_i}}, \quad z_i = ia$$

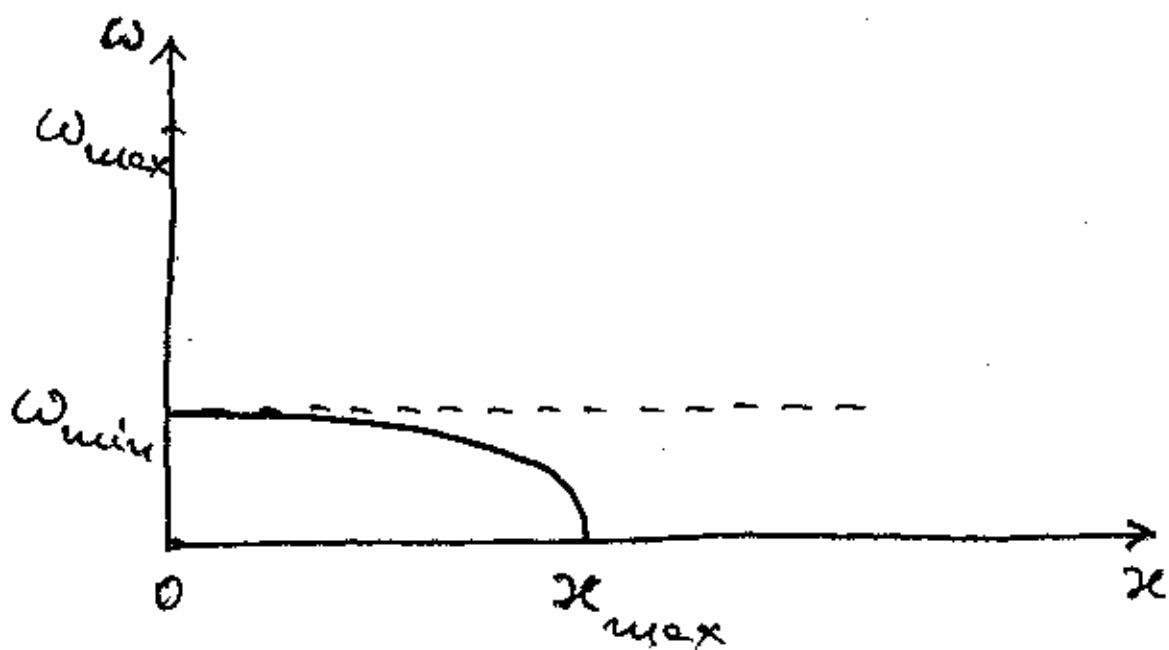
$\alpha$  - konstanta atenuacije (opadanje) (grč. kapa)

$$\frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i} = \frac{A e^{-\alpha(i-1)a} + A e^{-\alpha(i+1)a}}{A e^{-\alpha ia}} = e^{\alpha a} + e^{-\alpha a} = 2 \cosh \alpha a > 2 \quad \checkmark$$

(jer je  $\cosh \alpha a > 1$  za svaki  $\alpha a > 0$ )

Iz koristeći relaciju  $\cosh \alpha a - 1 = 2 \sinh^2 \frac{\alpha a}{2}$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \frac{4K}{m} \sinh^2 \frac{\alpha a}{2}}$$



Za  $\omega \rightarrow \omega_{\min}$  pojavljuju se rješenja za  $k \rightarrow 0$  (nema kašnjenja,  $\lambda \rightarrow \infty$ ) i  $\alpha \rightarrow 0$  (nema opadanja amplitude).

Za  $\omega \rightarrow 0$  (statički slučaj) imamo maksimalno opadanje amplitude

$$\frac{g}{\ell} - \frac{4K}{m} \sinh^2 \frac{\alpha a}{2} = 0 \Rightarrow \alpha_{\max} = \frac{2}{a} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{mg}{4K\ell}}$$

Maksimalna konstanta atenuacije ovisi o parametrima sustava.

$$2) \quad \omega > \omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{4K}{m}}$$

Niti u ovom slučaju ne postoji  $k$ , pa nema kašnjenja ni valnog gibanja.

Amplitude moraju zadovoljavati

$$\frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i} < -2$$

To je zadovoljeno ako je

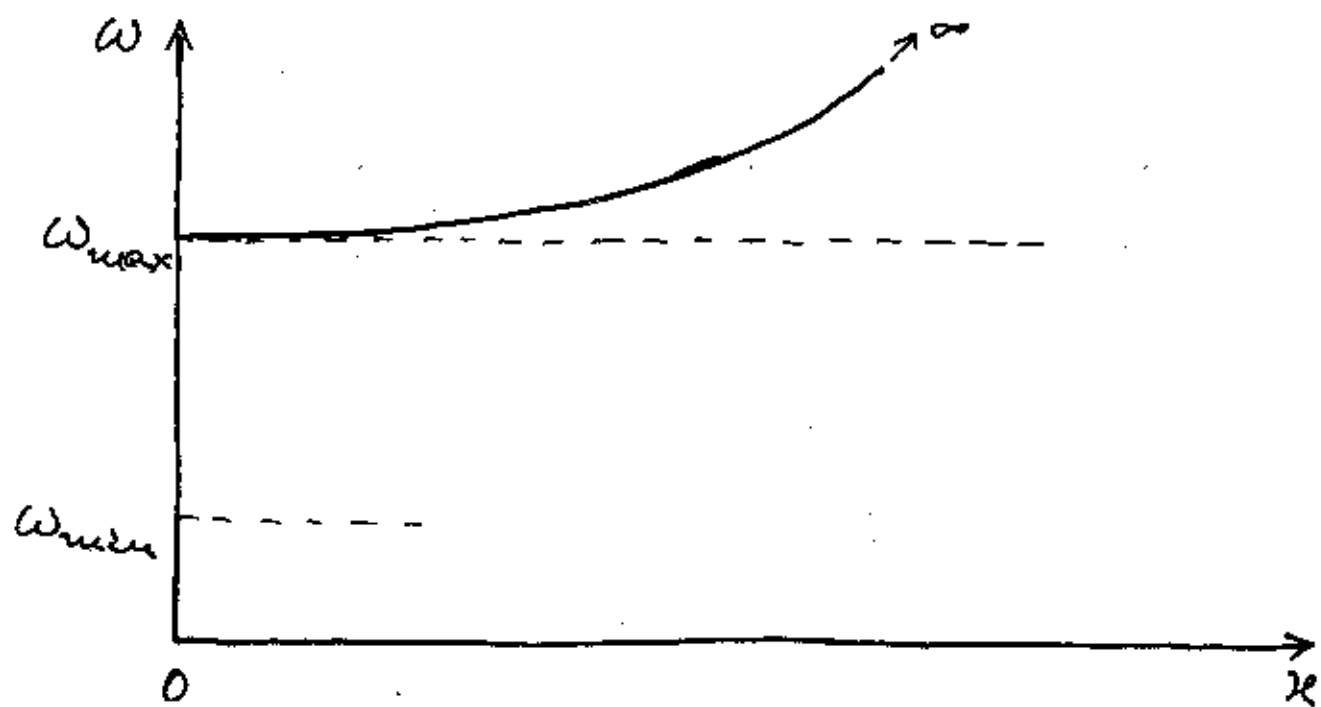
$$\boxed{A_i = A (-1)^i e^{-\alpha z_i}} \quad z_i = ia$$

Amplitude daju cik-cak konfiguraciju s opadajućim iznosima.

$$\frac{A_{i+1} + A_{i+1}}{A_i} = -(e^{x_a} + e^{-x_a}) = -2 \cosh x_a < -2 \checkmark$$

Ishovistinus relacija  $\cosh x + 1 = 2 \cosh^2 \frac{x}{2}$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{4k}{m} \cosh^2 \frac{x_a}{2}}$$



Za  $\omega \rightarrow \omega_{\max}$  spajaju se vještarija za  $k \rightarrow \frac{\pi}{a}$  (val s cik-cak konfiguracijom) i  $x \rightarrow 0$  (cik-cak konfiguracija bez atenuacije).

Za  $\omega \rightarrow \infty$  konstante atenuacije jako raste. Kod dovoljno visokih frekvencija praktički bitna samo izvori.

Zaključak:

Za  $\omega < \omega_{\min}$  ili  $\omega > \omega_{\max}$  izvor ne može emitirati val u sredstvo.

30. pokus:

$0 < \omega < \omega_{\min}$  opadajuća amplituda

$\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$  emitiranje vala

$\omega > \omega_{\max}$  cik-cak opadajuća amplituda

Fazna brzina vala

Neka se u sredstvu širi val

$$u(z, t) = A \sin(\omega t - kz)$$

Pogledajmo česticu na nekom mjestu  $z'$ . Ona titra frekvencijom  $\omega$  u vremenu ( $t$  je varijabla u gornjoj funkciji).

U nekom trenutku  $t'$  čestica će imati fazu titranja (argument sinusne funkcije)

$$\varphi = \omega t' - kz'$$

Neka druga čestica na položaju  $z'' > z'$  titra s kašnjenjem. To znači da će postići danu fazu  $\varphi$  u nekom kasnijem trenutku  $t'' > t'$ , tj.

$$\omega t' - kz' = \varphi = \omega t'' - kz''$$

Napomena:

Faza  $\varphi$  može imati bilo koji iznos. Okom najlakše pratimo fazu  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  koja predstavlja maksimum valnog titranja.



Srednjenjem dobivamo

$$k(z'' - z') = \omega(t'' - t')$$

$$v_{\varphi} = \frac{z'' - z'}{t'' - t'} = \frac{\omega}{k} \quad \text{fazna brzina}$$

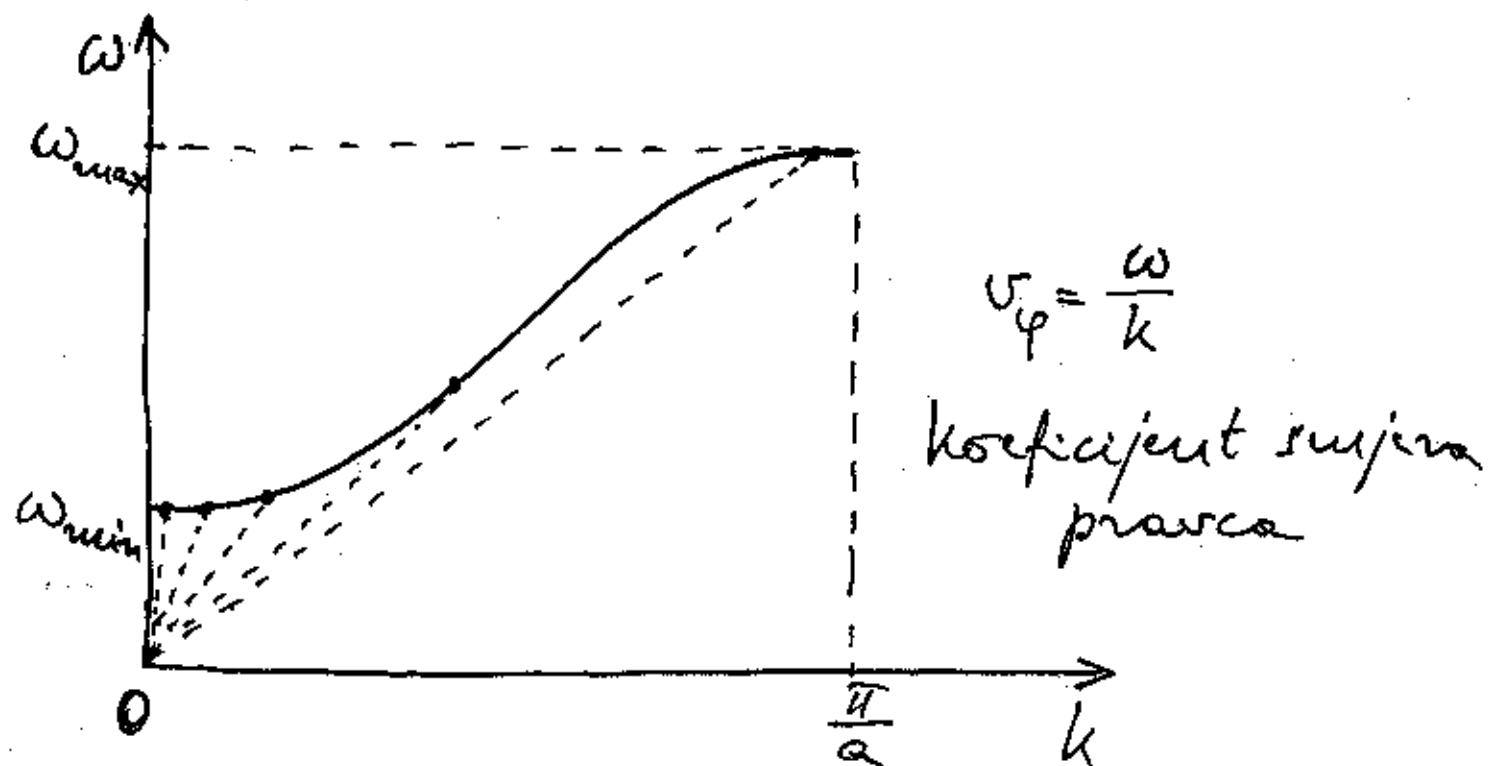
Fazna brzina pokazuje kojom brzinom putuje neka faza (npr. maksimum) titranja čestice u valu.

Budući da je  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$  te  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , imamo ekvivalentne zapise

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}$$

Faznu brzinu možemo izravno odrediti iz disperzijske relacije.

Za slučaj čestica na ravnolikom vezanju opružama



Svaka točka na disperzijskoj krivulji predstavlja par vrijednosti  $(k, \omega)$  za neki mogući val.

Ako ishodiste spojimo s dotičnom točkom na disperzijskoj krivulji dobijemo pravac kojemu je koeficijent slijera  $\frac{\omega}{k}$ , tj. upravo fazna brzina.

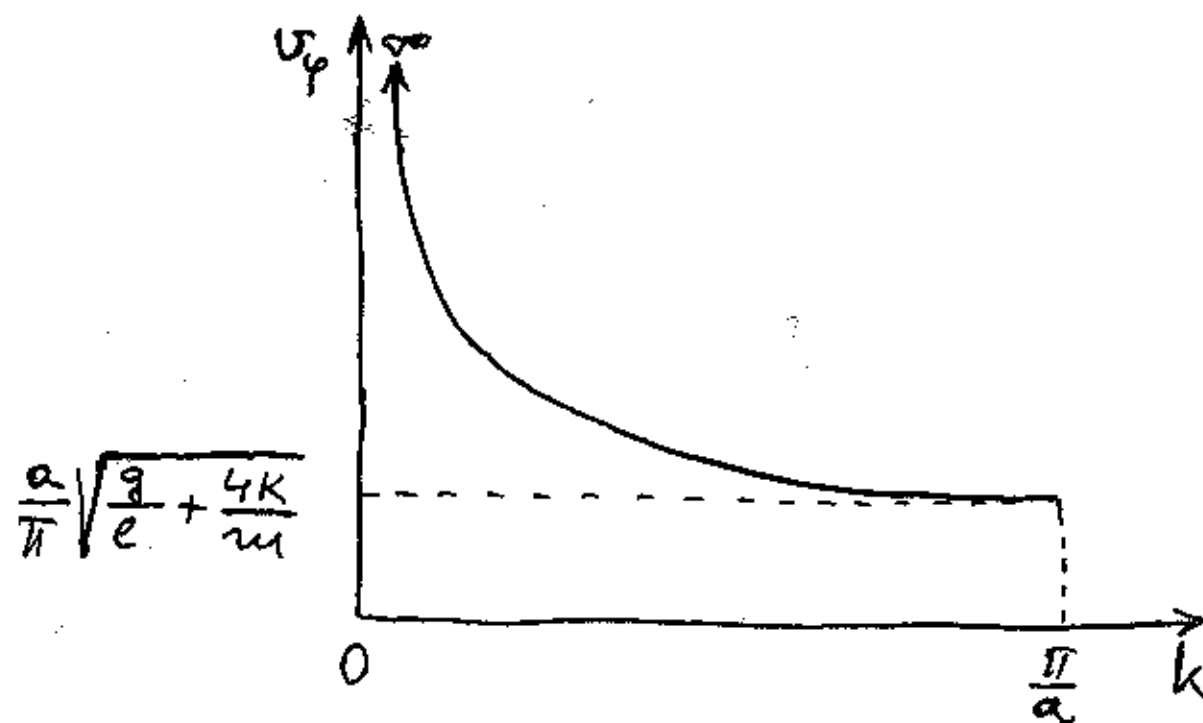
Kada je frekvencija izvora  $\omega$  blizu  $\omega_{max}$  onda nastali val ima najmanju faznu brzinu (najmanji nagib pravca).

Smanjivanjem frekvencije povećava se fazna brzina vala (veći nagib pravca).

Kada frekvencija teži prema  $\omega_{min}$ , fazna brzina raste u beskonačnost (nagib pravca postaje beskonačan).

Faznu brzinu možemo prikazati analitički

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}}$$



Za  $k \rightarrow 0$  imamo  $v_\varphi \rightarrow \infty$ .

Nije li to protivno posebnostima teorije relativnosti ( $v_\varphi > c$ )?

Ne, jer se nikakva čestica ne giba brzinom  $v_\varphi$  duž osi z.

Svaka čestica bitna oko svog položaja ravnoteže i njena brzina ni u kojemu trenutku ne dostiže c.

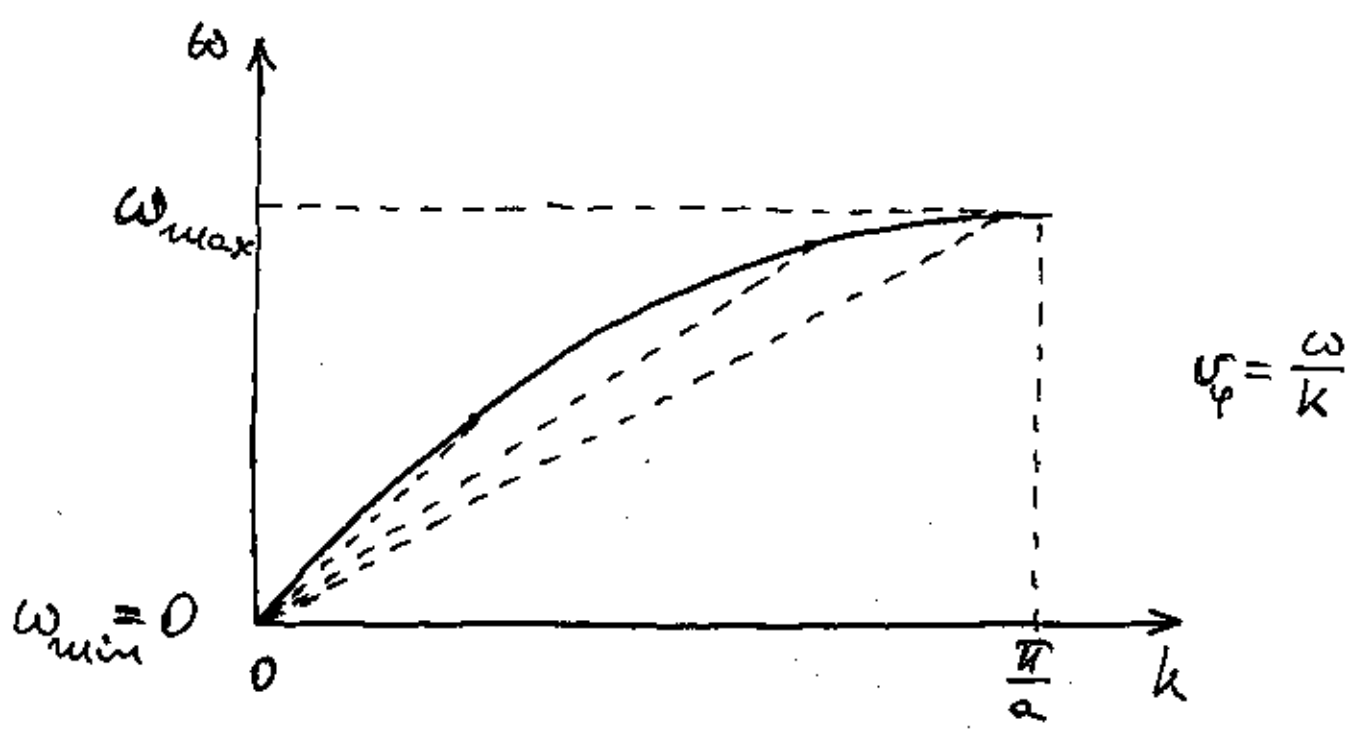
Fazna brzina  $v_\varphi$  samo govori o faznom kašnjenju. Za  $k \rightarrow 0$  kašnjenje je jako maleno. Ako je čestica na mjestu  $z'$  u trenutku  $t'$  u fazi  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (valni maksimum), onda je čestica na velikoj udaljenosti  $z''$  od nje zapravo jako blizu faze  $\frac{\pi}{2}$  te za kratko vrijeme ( $t'' - t'$ ) dostigne točno  $\frac{\pi}{2}$  (jer bitna frekvencijom  $\omega$ ).

Kada gledamo val čini nam se kao da je maksimum u kratkom vremenu propustava veliku udaljenost ali zapravo se ništa materijalnoga ne giba u tome smjeru.

31. potpis:  
promatranje faze brzine

Za čestice na podlozi bez trenja (ili  $l \rightarrow \infty$ )

$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin \frac{ka}{2} \quad \text{dispersijska relacija}$$



Smanjivanjem frekvencije povećava se fazna brzina (nagib pravca).  
Kada frekvencija izvora postaje jako malena ( $\omega \rightarrow 0$ ) fazna brzina vala teži konačnoj vrijednosti (nagib tangente na dispersijsku krivulju u ishodištu).

Analiitički imamo za  $k \rightarrow 0$

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{4K}{m}} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{ka}{2}}{k} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \frac{a}{2} = a \sqrt{\frac{K}{m}}$$

U fizikalnoj interpretaciji možemo reći da za  $k \rightarrow 0$  (sve manje kašnjenje) imamo ujedno  $\omega \rightarrow 0$  (sve sporije titranje) pa starije iste faze putuje konačnom brzinom.

## Val u kontinuumu

$ka \ll 1$  aproksimacija kontinuumu  
(zamisljeno da  $a \rightarrow 0$ )

$Ka \rightarrow T$  napetost niti

$\frac{m}{a} \rightarrow \rho$  linearna gustoba niti

U elastičnoj niti pojedine čestice nisu obješene na vijakale ( $\omega_{\min} = 0$ ).

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = -[K(u_i - u_{i-1}) + K(u_i - u_{i+1})]$$

⇓ (kao kod modova)

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{T}{\rho} \frac{d^2 u}{dz^2} \quad \text{valna jednačina}$$

$$u(z, t) = A \sin(\omega t - kz) \quad \text{valna funkcija}$$

Čestice su gusto raspoređene po  $z$  smatramo kontinuumom (a ne  $z_i = ia$  kao kod čestica s većim razmakom).

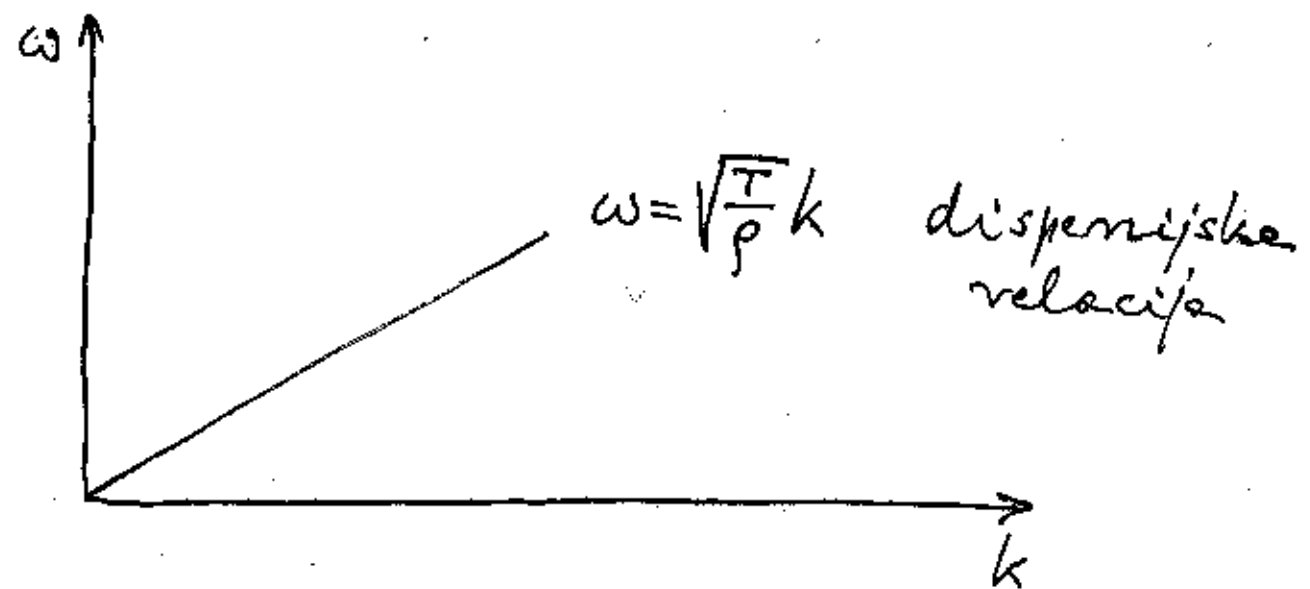
Dispersijsku relaciju dobijemo:

a) uvrštavanjem  $u(z, t)$  u dif. jedr.

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k$$

b) ili iz diskretnog slučaja

$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin \frac{ka}{2} \xrightarrow{ka \ll 1} \omega \approx \sqrt{\frac{4K}{m}} \frac{ka}{2} = \sqrt{\frac{Ka}{m}} k = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k$$



Fazna brzina u kontinuumu

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (\text{koef. nagiba disp. rel.})$$

Također iz diskretnog slučaja

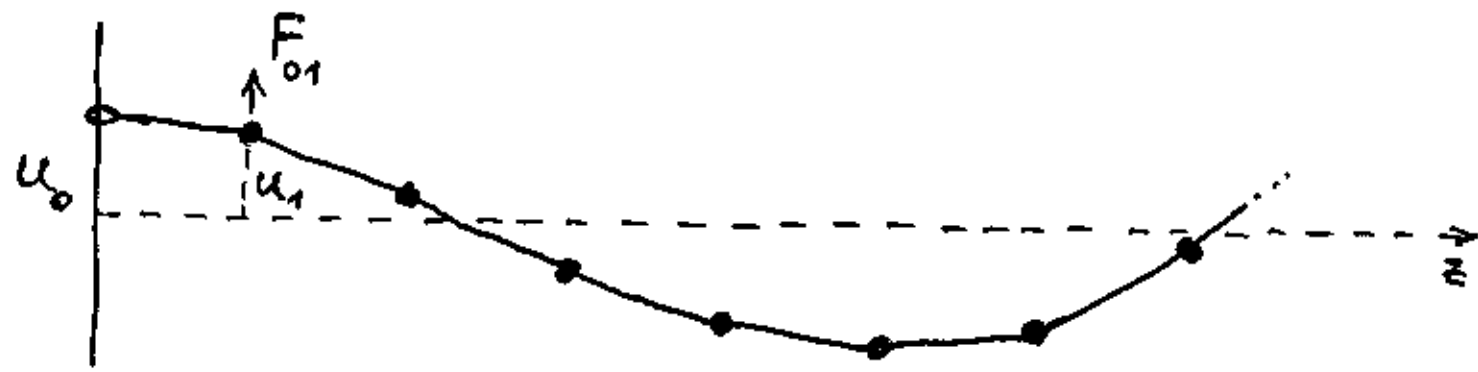
$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \frac{\sin \frac{ka}{2}}{k} \xrightarrow{ka \ll 1} v_{\varphi} \approx \sqrt{\frac{4K}{m}} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

U kontinuumu fazna brzina ne ovisi o frekvenciji (odnosno  $k$ ).

Fazna brzina ovisi o parametrima elastičnog sredstva ( $T, \rho$ ).

### 3.2. Impedancija

Kolika je sila potrebna da tjera val ?



Izvor vala je spojen putem opruge na prvu česticu i djeluje na nju silom

$$F_{01} = K(u_0 - u_1) = KA [\sin \omega t - \sin(\omega t - ka)]$$

Možemo povezati silu kojom izvor djeluje na prvu česticu s odzivom te čestice, tj. njenim gibanjem.

U tu svrhu možemo transformirati

$$\begin{aligned} \sin \omega t &= \sin[(\omega t - ka) + ka] = \\ &= \sin(\omega t - ka) \cos ka + \cos(\omega t - ka) \sin ka \end{aligned}$$

$$F_{01} = -K(1 - \cos ka) \underbrace{A \sin(\omega t - ka)}_{u_1(t)} + K \sin ka \underbrace{A \cos(\omega t - ka)}_{\frac{1}{\omega} \frac{du_1}{dt}}$$

$$F_{01} = \underbrace{-K(1 - \cos ka)}_{Z_d} u_1 + \underbrace{\frac{K \sin ka}{\omega}}_{Z_a} \frac{du_1}{dt}$$

$Z_d$  disperzijska impedancija       $Z_a$  apsorpcijska impedancija

Impedancija valnog sredstva povezuje pogonsku silu izvora s odzivom prve čestice.

Gibanje prve čestice kasni za pogonskom silom izvora. Stoga sila ima komponentu u fazi s otklonom prve čestice  $u_1(t)$  i komponentu koja je u fazi s brzinom prve čestice  $\frac{du_1}{dt}$ . Faktori proporcionalnosti su  $Z_d$  i  $Z_a$  za pojedine komponente.

Za danu veličinu pogonske sile odziv prve čestice bit će manji ako je impedancija veća.

Prema tome postavljamo definiciju impedancije

Impedancija valnog sredstva je veličina koja nam kaže koliko je teško uspostaviti valno gibanje u sredstvu, odnosno koliko se valno sredstvo opire stvaranju vala.

Lat. impedimentum = zapreka

## Vaino translacijsko svojstvo

Izvor tjera prvu česticu silom  $F_{01}$ , a prva čestica tjera drugu silom  $F_{12}$  koja je ista po formi kao  $F_{01}$  ali s fazovim kašnjenjem

$$F_{12} = K(u_1 - u_2) = KA[\sin(\omega t - ka) - \sin(\omega t - 2ka)] = \\ = Z_d u_2 + Z_a \frac{du_2}{dt}$$

( $Z_d$  i  $Z_a$  isti kao za  $F_{01}$ )

Dakle, prva čestica djeluje kao izvor vala od druge čestice pa dalje.

Opcenito,  $i$ -ta čestica djeluje kao izvor vala silom na  $(i+1)$ -vu česticu

$$F_{i+1} = Z_d u_{i+1} + Z_a \frac{du_{i+1}}{dt}$$

Ova jednačina definiira općenito komponente impedancija  $Z_d$  i  $Z_a$ .

Prema trećem Newtonovom zakonu  $(i+1)$ -va čestica djeluje na  $i$ -tu česticu silom

$$F_{i+1i} = -F_{i+1}$$

## Savršeni zatvoretak valnog sredstva

Neka se valno sredstvo zatvara sa  $i$ -tom česticom. Ako postavimo neki uređaj koji djeluje na  $i$ -tu česticu silom  $F_s(t)$  koja je jednaka onoj koju bi davala  $(i+1)$ -va čestica na  $i$ -tu česticu u slučaju beskonačnog valnog sredstva, tj:

$$F_s = F_{i+1i}$$

onda  $i$ -ta čestica ne bi mogla varirati da li se na nju postavlja beskonačno valno sredstvo ili pak na nju djeluje dotični uređaj.

Val se širi od izvora do  $i$ -te čestice a zatim ga postavljenu uređaj upije. U tom slučaju postavljenu uređaj predstavlja savršeni zatvoretak valnog sredstva.

Nastavimo potrebnu silu  $F_s(t)$  na  $i$ -tu česticu.

$$F_s = F_{i+1i} = K(u_{i+1} - u_i) = KA\{\sin[\omega t - k(i+1)a] - \sin(\omega t - kia)\}$$

$$\sin[\omega t - k(i+1)a] = \sin(\omega t - kia)\cos ka - \cos(\omega t - kia)\sin ka$$

$$F_s = -K(1 - \cos ka) \underbrace{A \sin(\omega t - kia)}_{u_i(t)} - K \sin ka \underbrace{A \cos(\omega t - kia)}_{\frac{1}{\omega} \frac{du_i}{dt}}$$

$$F_s = Z_d u_i - Z_a \frac{du_i}{dt}$$

## Napomena:

$F_{i+1}$  je sila kojom prethodna čestica djeluje na sljedeću u nizu i uzrokuje valno gibanje. Nju smo analitički povezali s  $u_{i+1}$  i  $\frac{du_{i+1}}{dt}$ .

$F_s = F_{i+1}$  je sila reakcije po trećem Newtonovu zakonu kojom sljedeća čestica djeluje na prethodnu. Ona predstavlja odupiranje valnog sredstva uspostavi valnog gibanja. Nju smo analitički povezali s  $u_i$  i  $\frac{du_i}{dt}$ .

## Dodatak uz napomenu:

Ako djelujemo vanjskom silom  $\vec{F}$  na slobodno tijelo mase  $m$  onda ono dobiva akceleraciju  $\vec{a}$  prema drugome Newtonovu zakonu  $\vec{F} = m\vec{a}$ . No tijelo istodobno djeluje silom reakcije  $-\vec{F}$  na uzročnika vanjske sile, tj. tijelo se odupire stalnom povećavanju brzine ( $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ ).

Potpuno je pogrešno zbrajati sile akcije i reakcije, tj.  $\vec{F} + (-\vec{F}) = 0$  i reći da tako dobivamo "ravnotežu".

Zbrajati se mogu samo sile koje djeluju na jedno te isto tijelo. U gornjem slučaju  $\vec{F}$  djeluje na tijelo mase  $m$  a reakcija  $-\vec{F}$  djeluje na uzročnika vanjske sile (neko drugo tijelo).

Da li neki uređaj djelovao kao savršeni zavrtetak potrebno je da na kraj valnog sredstva (tj. na  $i$ -tu česticu) djeluje nekom elastičnom silom koja vraća  $i$ -tu česticu u položaj ravnoteže

$$F_{el} = Z_d u_i = -K(1 - \cos ka) u_i$$

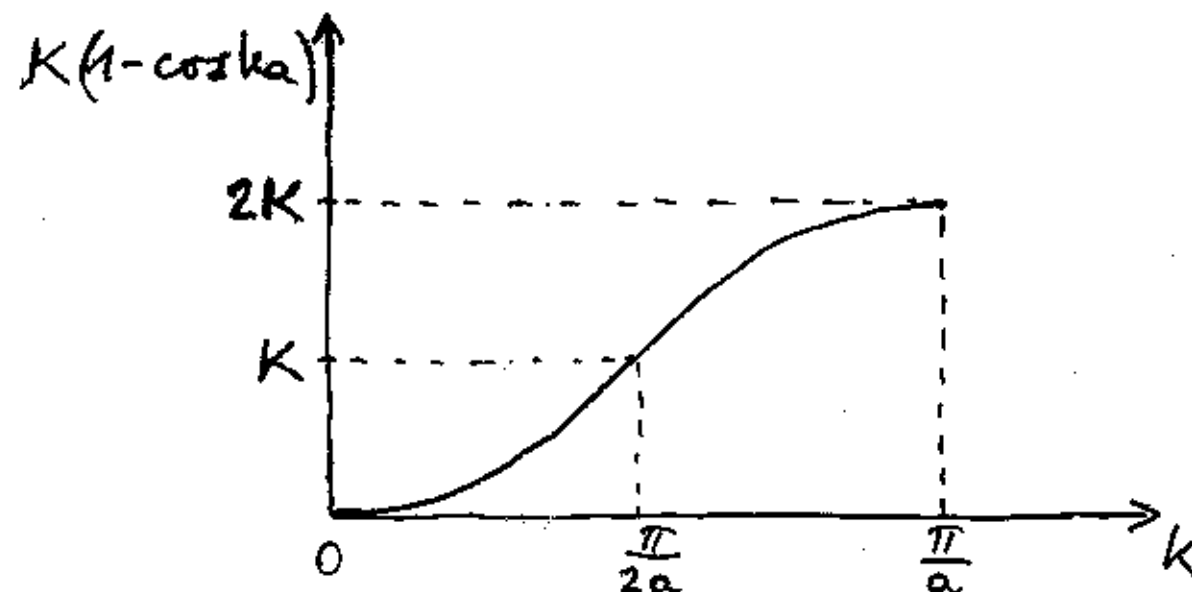
i nekom silom trenja

$$F_{tr} = -Z_a \frac{du_i}{dt} = -\frac{K \sin ka}{\omega} \frac{du_i}{dt}$$

Sila trenja je proporcionalna brzini čestice na koju djeluje kao kod gušćeg harmonijskog oscilatora ( $F_{tr} = -bv$ ).

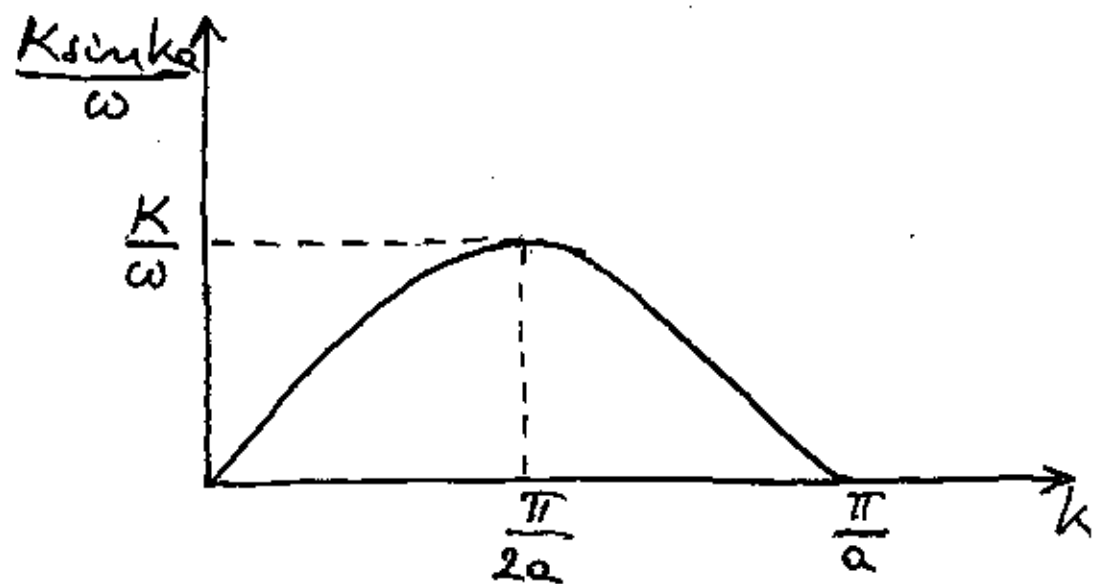
Vidimo da  $F_{el}$  i  $F_{tr}$  ovise o valnom broju  $k$ . Stoga za svaku frekvenciju vala (odnosno pripadni valni broj) moramo izvršiti ugatanje uređaja tako da djeluje kao savršeni zavrtetak.

Za koeficijent u  $F_{el}$  imamo ovisnost



Kod koeficijenta u  $F_{tr}$  pojavljuje se i  $\omega$  kao varijabla. Zato bi trebalo uzeti u obzir disperzijsku relaciju  $\omega(k)$ .

U slučaju nijkala vezanih oprugama  $\omega$  se mijenja od  $\omega_{min}$  do  $\omega_{max}$  pa imamo ovisnost



Razmotrimo neke slučajeve:

1)  $ka \ll 1$  dugovalni slučaj ( $\omega \approx \omega_{min}$ )

$F_{el} \approx 0$  praktički nije potrebna el. sila

$b = \frac{K}{\omega} ka \ll \frac{K}{\omega}$  dovoljan je malen koeficijent trenja

2)  $ka = \frac{\pi}{2}$

$F_{el} = -Ku_i$  potrebna je elastična sila kao da  $i$ -tu česticu vezemo oprugom konstante  $K$  za čvrsti (nepomični) kraj na  $z_{i+1}$ .

$b = \frac{K}{\omega}$  potreban je maksimalan koeficijent trenja

3)  $ka \approx \pi$  blizu cik-cak konfiguracije

$F_{el} = -2Ku_i$  potrebna je maksimalna el. sila (dije opruge vezane za čvrsti kraj na  $z_{i+1}$ )

$b = \frac{K}{\omega} (\pi - ka) \ll \frac{K}{\omega}$  dovoljan je malen koeficijent trenja

32. pokus:

ugadanje završetka valnog sredstva

## Prijenos snage putem vala

Izvor djeluje na prvu česticu silom

$$F_{01} = Z_d u_1 + Z_a \frac{du_1}{dt}$$

Snaga koju izvor predaje prvoj čestici iznosi

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T F_{01} v_1 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ Z_d u_1 + Z_a \frac{du_1}{dt} \right] \frac{du_1}{dt} dt$$

Iskoristimo relacije

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t - ka) \cos(\omega t - ka) dt = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - ka) dt = \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 Z_a$$

Snaga koju izvor emitira u valno sredstvo proporcionalna je apsorpcijskoj impedanciji  $Z_a$  valnog sredstva te kvadratu amplitude titranja i kvadratu frekvencije.

Gdje se ta snaga troši?

Prva čestica djeluje kao izvor vala na drugu i predaje joj snagu

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T F_{12} v_2 dt = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 Z_a$$

Dakle, snaga koju izvor emitira prenosi se od čestice do čestice.

Neke je  $i$ -ta čestica zadržava te ne rje u stran savršeni završetak. On djeluje na  $i$ -tu česticu silom  $F_s$  i time joj prenosi snagu

$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T F_s v_i dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ Z_d u_i - Z_a \frac{du_i}{dt} \right] \frac{du_i}{dt} dt = -P$$

Vidimo da savršeni završetak apsorbira (predznak minus) svu snagu koju izvor emitira.

Valno sredstvo ne troši snagu nego je samo prenosi od izvora do savršenog završetka kao potrošača.



## Impedancija kontinuuma

$ka \ll 1$  aproksimacija kontinuuma

$$Z_d = -K(1 - \cos ka) \approx 0$$

$$Z_a = \frac{K \sin ka}{\omega} \approx Ka \frac{k}{\omega} = T \sqrt{\frac{\rho}{T}} = \sqrt{T\rho}$$

Dakle, u kontinuumu imamo samo apsorpcijsku impedanciju koja je neovisna o frekvenciji  $\omega$  (odnosno valnom broju  $k$ ) te ovisi samo o parametrima sredstva ( $T, \rho$ ).

Kod kontinuuma obično izostavlja se indeks "a" u impedanciji.

Svaka točka elastičnog kontinuuma djeluje na nastavak silom

$$F = Z \frac{du}{dt}$$

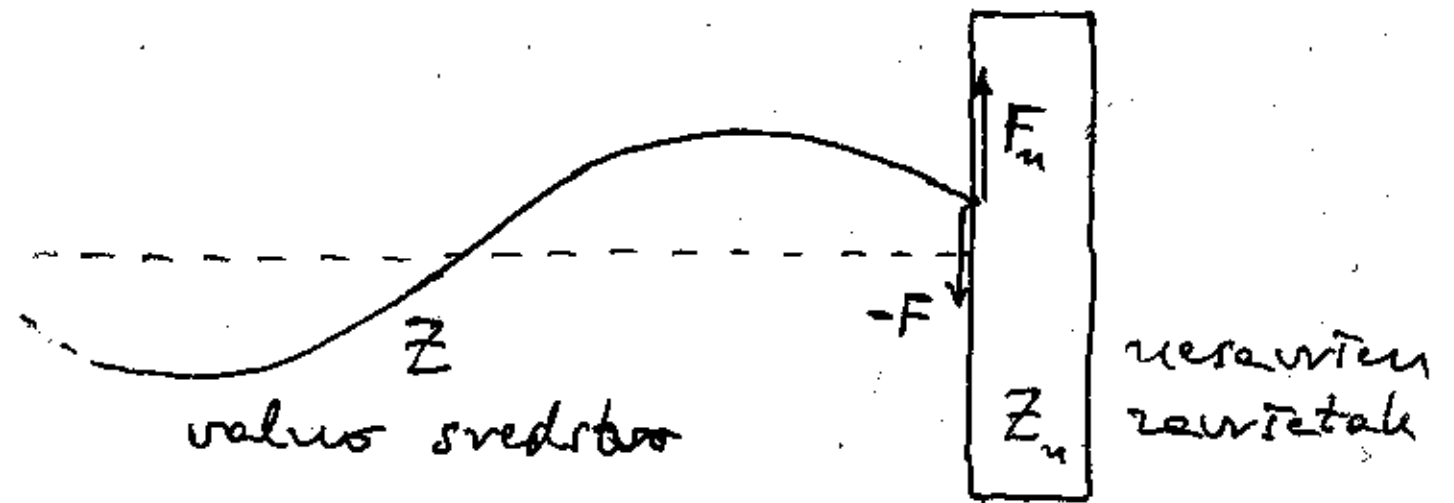
čime je definirana impedancija koja za dato sredstvo iznosi

$$Z = \sqrt{T\rho}$$

## 3.3. Refleksija i transmisija valova

Ograničimo razmatranje na kontinuum kao valno sredstvo (najčešći slučaj u praksi)

Neka se na kraju valnog sredstva nalazi nesavršen završetak koji ima (apsorpcijsku) impedanciju  $Z_n \neq Z$ .



Ako se neka točka valnog sredstva giba brzinom  $\frac{du}{dt}$  onda na nastavak valnog sredstva djeluje sila  $F = Z \frac{du}{dt}$ , a nastavak djeluje silom reakcije  $-F$  na prethodni dio. Ovakav odnos morao bi vrijediti i za zadnju točku valnog sredstva. Međutim, ako je zadnja točka vezana na nesavršen završetak impedancije  $Z_n$ , onda bi njeno gibanje brzinom  $\frac{du}{dt}$  značilo da valno sredstvo djeluje na nesavršeni završetak silom  $F_n = Z_n \frac{du}{dt}$  umjesto sile  $F$ .

Očito je da sile  $F_n$  i  $-F$  ne zadovoljavaju III. Newtonov zakon.

Zbog različite sile  $F_n$  i  $F$  javlja se reflektirani val, tj. dio sile  $F_n$  služi kao izvor vala koje se vraća od nesavršenog završetka.

Razmotrimo cijeli problem analitički. Neka se duž pozitivnog smjera osi  $z$  širi upadni val

$$u_u(z, t) = A_u \sin(\omega t - kz)$$

a duž negativnog smjera se širi reflektirani val

$$u_r(z, t) = A_r \sin(\omega t + kz)$$

Napomena:

Kod vala koji se širi duž negativnog smjera osi  $z$  imamo fazu kašnjenja  $+kz$  jer čestice na manjem  $z$  kasne za onima na većem  $z$ .

Npr. čestica na nekom  $z < 0$  kasni u fazi za  $+kz = -k|z|$  za česticom na  $z = 0$ .

Svaka čestica u valnom sredstvu bitna superpozicijom upadnog i reflektiranog vala

$$u(z, t) = u_u(z, t) + u_r(z, t)$$

To se odnosi i na zadržu česticu u valnom sredstvu. Neka se ona nalazi na  $z = 0$  pa je njeno ukupno gibanje dato

$$u = u_u + u_r = (A_u + A_r) \sin \omega t$$

Zadržu čestica djeluje stoga na nesavršeni završetak silom

$$F_n = Z_n \frac{du}{dt} = Z_n \omega (A_u + A_r) \cos \omega t$$

Prema III. Newtonovom zakonu nesavršeni završetak djeluje silom  $-F_n$  na zadržu česticu valnoga sredstva. Dio te sile služi kao sila reakcije na upadni val a drugi dio za pokretanje reflektiranog vala, tj.

$$-F_n = -Z \frac{du_u}{dt} + Z \frac{du_r}{dt}$$

Sredstvenjem dobivamo

$$-Z_n (A_u + A_r) = -Z A_u + Z A_r$$

$$A_r (Z + Z_n) = A_u (Z - Z_n)$$

Koeficijent refleksije iznosi

$$R = \frac{A_r}{A_u} = \frac{Z - Z_n}{Z + Z_n}$$

Razmotrimo posebne slučajeve:

1)  $z_n = 0$  završetka uopće nema (slobodan kraj)

$$R = \frac{z - z_n}{z + z_n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_r = A_u}$$

Kod refleksije na slobodnom kraju amplituda reflektiranog vala ima isti iznos i predznak kao amplituda upadnog vala.

Gibanje zadrje čestice u valnom sredstvu

$$u_u + u_r = A_u \sin \omega t + A_r \sin \omega t = 2A_u \sin \omega t$$

Ukupna amplituda titranja zadrje čestice iznosi  $2A_u$ .

Gibanje čestice na općenitom položaju  $z$  valnog sredstva iznosi

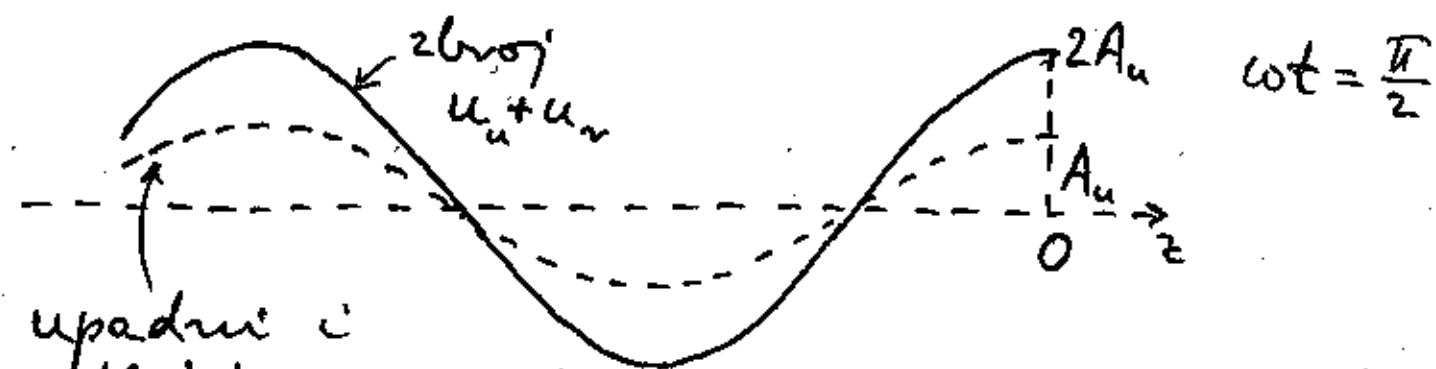
$$\begin{aligned} u_u(z, t) + u_r(z, t) &= A_u [\sin(\omega t - kz) + \sin(\omega t + kz)] = \\ &= 2A_u \cos kz \sin \omega t \end{aligned}$$

Sve čestice titraju istom frekvencijom i u fazi a amplituda ovisi o položaju  $z$ .

Čestice za koje je  $\cos kz = \pm 1$  titraju amplitudom  $2A_u$  (trubuh) a one za koje je  $\cos kz = 0$  uopće ne titraju (čvor).

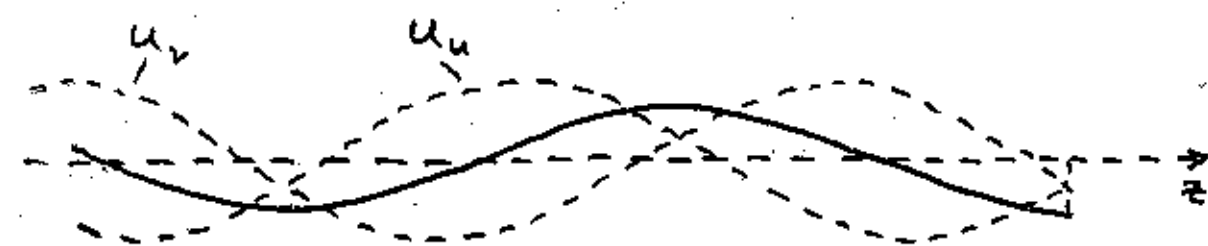
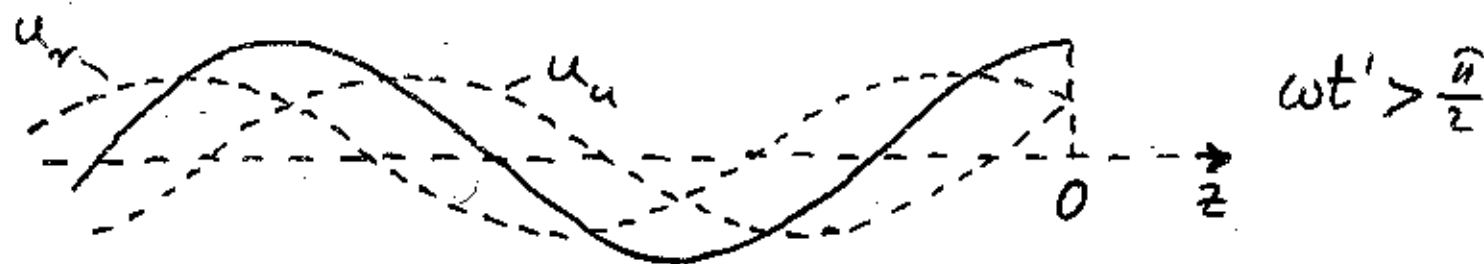
Superpozicija dva vala istih frekvencija i amplituda koji se šire u suprotnim smjerovima ekvivalentna je modu. Naziva se još i stojni val.

Pogledajmo gibanje tih valova i njihov zbroj u raznim vremenskim trenucima



upadni i reflektirani val se u ovoj trenutku poklapaju

$$u_u = A_u \sin\left(\frac{\pi}{2} - kz\right) = A_r \sin\left(\frac{\pi}{2} + kz\right) = u_r$$



↑ trubuh    ↑ čvor    ↑ trubuh    ↑ čvor    ↑ trubuh

U čvoru se  $u_u$  i  $u_r$  uvijek poništavaju a u trubuhu se uvijek zbrajaju.

2)  $\underline{Z_n = Z}$  savršeni završetak za dano  
vlasno sredstvo

$$R = \frac{Z - Z_n}{Z + Z_n} = 0 \Rightarrow \boxed{A_r = 0}$$

nema reflektiranog vala

Savršeni završetak upije cjelokupan  
upadni val.

3)  $\underline{Z_n = \infty}$  završetak pruža beskonačno  
velik otpor gibanju zadnje čestice  
(zadnja čestica je zapravo učvršćena)

$$R = \frac{Z - Z_n}{Z + Z_n} = -1 \Rightarrow \boxed{A_r = -A_u}$$

Kod refleksije na učvršćenome kraju amplituda  
reflektiranoga vala ima isti iznos ali  
suprotan predznak od amplitude upadnoga  
vala.

Gibanje zadnje čestice iznosi  
 $u_u + u_r = A_u \sin \omega t + A_r \sin \omega t = 0$  ✓ učvršćen kraj

Gibanje čestice na općenitom položaju  $z$   
 $u_u(z,t) + u_r(z,t) = A_u [\sin(\omega t - kz) - \sin(\omega t + kz)] =$   
 $= -2A_u \sin kz \cos \omega t$

Također dobivamo stojni val (mod).

Dakle, ako se impedancija završetka  
mijenja od 0 do  $\infty$  imamo

$$\boxed{-1 \leq R \leq 1}$$

↑  
čvrst kraj

↑  
slobodan kraj

U općenitom slučaju (tj. za  $R \neq \pm 1$ ) imamo  
djelomičan stojni val.

Na nekim mjestima imamo maksimalnu  
amplitudu u iznosu

$$A_{\max} = |A_u| + |A_r| = |A_u| (1 + |R|)$$

Na drugim mjestima amplituda je minimalna

$$A_{\min} = |A_u| - |A_r| = |A_u| (1 - |R|) \neq 0$$

no nije potpuno nula (nema čvora).

Možemo definirati veličinu koja se zove  
omjer stojnog vala (OSV)

engl. standing wave ratio (SWR)

$$OSV = \frac{A_{\max}}{A_{\min}} = \frac{1 + |R|}{1 - |R|}$$

## Transmisija vala

Razmatramo i ovdje samo slučaj kontinuuma  
Od izvora u nekoj točki  $z < 0$  do točke  $z = 0$   
nalazi se valno sredstvo impedancije  $Z$ , a  
na njega se nastavlja drugo valno sredstvo  
impedancije  $Z'$ .

U spojnoj točki drugo valno sredstvo  
djeluje silom reakcije na prvo sredstvo kao  
i to bi djelovao zatvorenih impedancije  $Z'$ .  
Stoga dolazi do refleksije

$$R = \frac{Z - Z'}{Z + Z'}$$

Gibanje spojne čestice u  $z = 0$  iznosi

$$u_u + u_v = A_u \sin \omega t + A_v \sin \omega t = \\ = A_u (1 + R) \sin \omega t$$

Gibanje te čestice djeluje kao izvor za  
transmitirani val u drugome sredstvu

$$u_t(z, t) = A_t \sin(\omega t - k'z)$$

Sve čestice u drugome sredstvu titraju istom  
amplitudom kao izvor, tj.

$$A_t = A_u (1 + R)$$

## Definiramo koefficient transmisije

$$T = \frac{A_t}{A_u} = 1 + R$$

Budući da je koefficient refleksije imamo  
 $-1 \leq R \leq 1$ , onda je

$$0 \leq T \leq 2$$

Za  $R = -1$  (refleksija na učvršćenome kraju)  
dobivamo  $T = 0$  (tj. nema transmisije).

Slučaj  $R = 0$  (nema refleksije) ostvaren je kada  
se nastavlja isto sredstvo pa je  $T = 1$ .

Za  $R \approx 1$  (refleksija na gotovo slobodnome kraju,  
ostvarenje se kada drugo sredstvo ima vrlo  
malenu impedanciju ( $Z' \ll Z$ )). Tada je  
 $T \approx 2$  (amplituda transmitiranog vala  
praktički je podvostručena).

### 33. pokus:

refleksija i transmisija valova

### 3.4. Superpozicija valova i grupna brzina

Kolikom se brzinom prenosi energija u valu?

Izvor predaje prvoj čestici snagu  $P = Z_a \frac{\omega^2 A^2}{2}$ .

Dakle, u periodu  $T$  predaje joj energiju  $E_T = PT$ .  
Ali istodobno svaka čestica predaje susjednoj istu energiju te zadnja čestica savršenu završetku.

Nemamo kriterija za određivanje brzine prijenosa energije jer ne možemo utvrditi da li se u vremenu  $T$  energija  $E_T$  prenijela od izvora samo do prve čestice ili preko svih do savršenog završetka.

(moгло bi čak ispasti da se energija širi brzinom većom od brzine svjetlosti !!)

Zamislimo da u nekome trenutku izvor prestane emitirati val. Da li (i koliko dugo vremena) zadnja čestica nastavlja predavati energiju savršenu završetku?

Isto tako, možemo zamisliti da u nekome trenutku izvor počne emitirati val i pitamo se kada će savršeni završetak početi primati energiju?

Dakle, kriterij možemo upostaviti ako izvor promijeni amplitudu titranja.

Neka izvor titra superpozicijom dviju bliskih frekvencija (stavimo izvor u  $z_0 = 0$ )

$$u_0 = A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t = 2A \cos \frac{\Delta \omega}{2} t \sin \bar{\omega} t$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \text{ srednja frekvencija}$$

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 \text{ razlika frekvencija } (\Delta \omega \ll \bar{\omega})$$

$$2A \cos \frac{\Delta \omega}{2} t \text{ } \underline{\text{sporo promjenjiva amplituda na izvoru}}$$

Izvor emitira dva vala. Frekvenciji  $\omega_1$  odgovara  $k_1$ , a frekvenciji  $\omega_2$  odgovara  $k_2$  (sukladno disperzijskoj relaciji za dano valno sredstvo).

Čestica na položaju  $z_i$  titra

$$u(z_i, t) = A \sin(\omega_1 t - k_1 z_i) + A \sin(\omega_2 t - k_2 z_i) =$$
$$= 2A \cos \left[ \frac{(\omega_2 t - k_2 z_i) - (\omega_1 t - k_1 z_i)}{2} \right] \sin \left[ \frac{(\omega_1 t - k_1 z_i) + (\omega_2 t - k_2 z_i)}{2} \right]$$

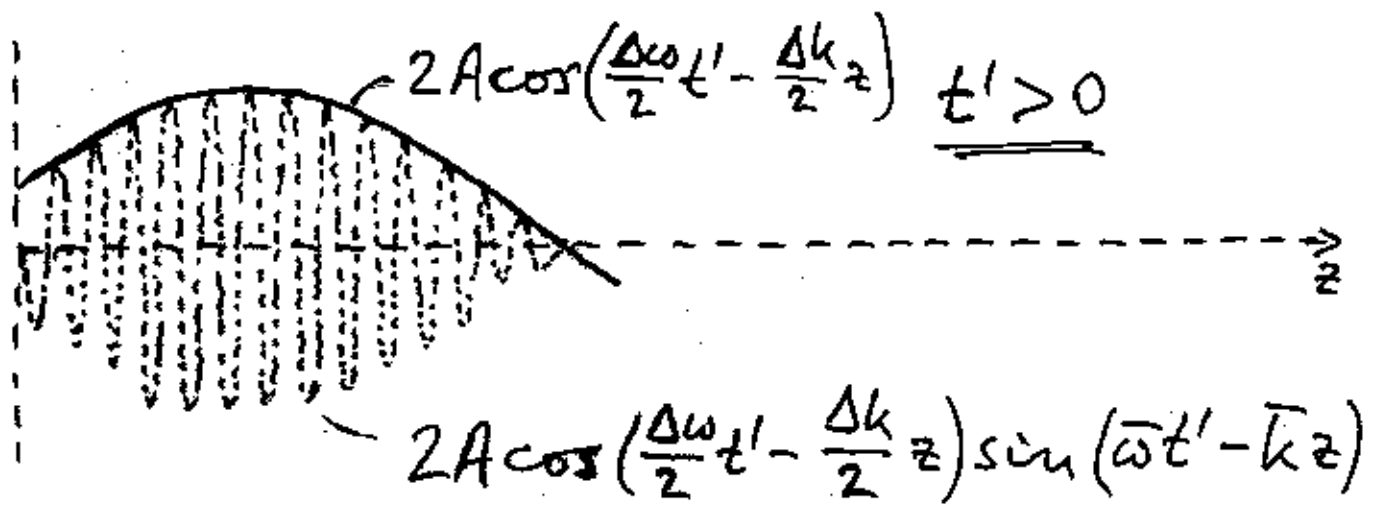
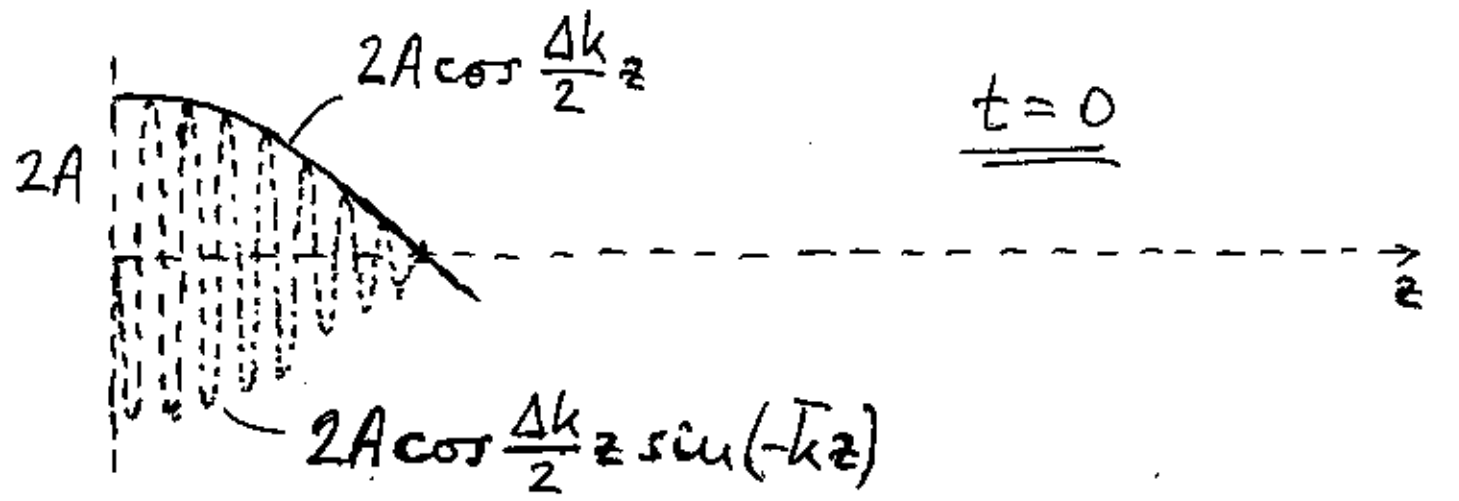
$$= 2A \cos \left( \frac{\Delta \omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} z_i \right) \sin(\bar{\omega} t - \bar{k} z_i)$$

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} \text{ srednji valni broj}$$

$$\Delta k = k_2 - k_1 \text{ razlika valnih brojeva}$$

$$2A \cos \left( \frac{\Delta \omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} z_i \right) \text{ } \underline{\text{sporo promjenjiva amplituda na položaju } z_i}$$

Dakle, spora promjena amplitude karu u fazi za  $\frac{\Delta k}{2} z$  u odnosu prema ovoj na izvoru.



Kojom se brzinom kreće upr. maksimalna amplituda?

Oko trenutka  $t=0$  izvor je emitirao titranje maksimalne amplitude

$$\frac{\Delta \omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} z = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1 \text{ maksimum}$$

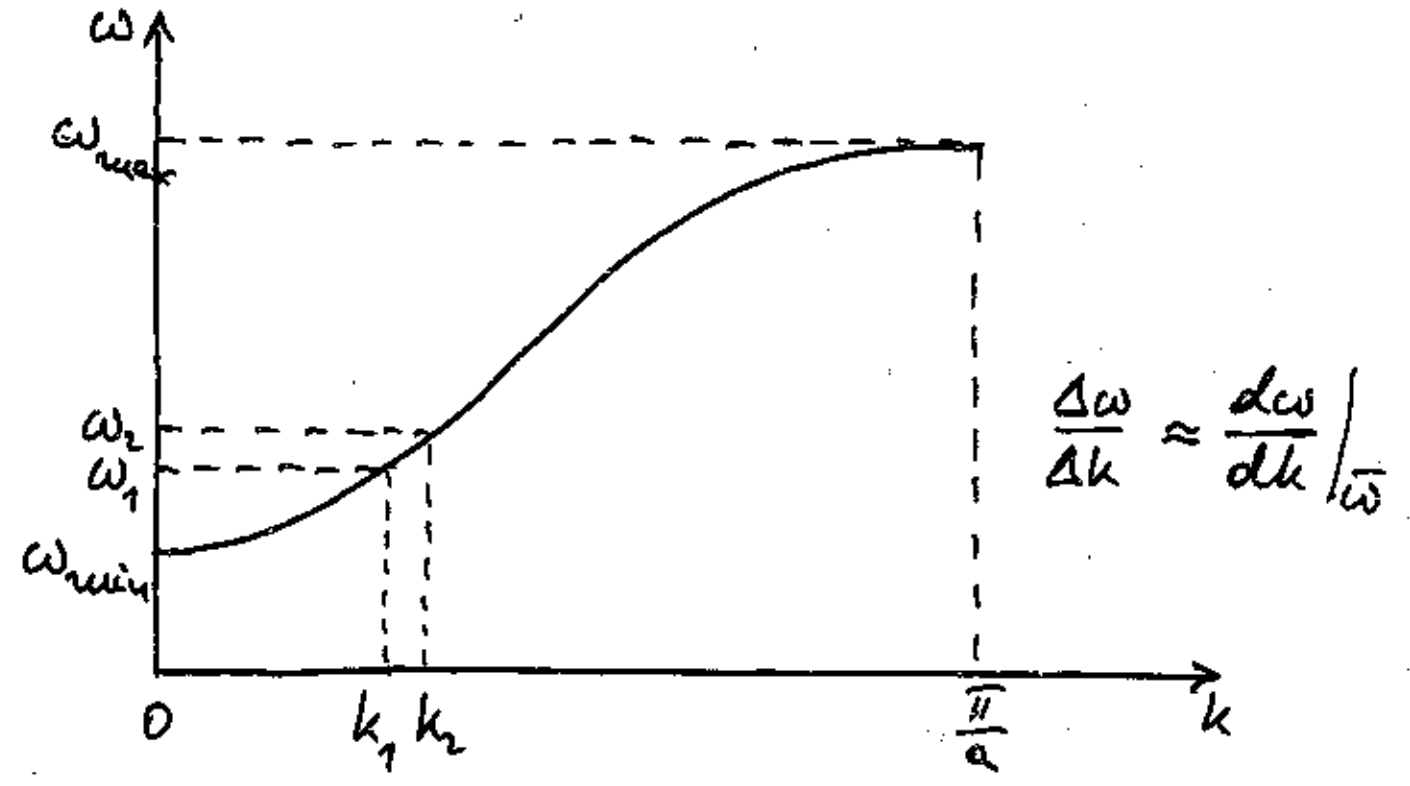
U kasnijem trenutku  $t' > 0$  maksimum se nalazi na položaju  $z' > 0$

$$\frac{\Delta \omega}{2} t' - \frac{\Delta k}{2} z' = 0 \Rightarrow \frac{z'}{t'} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$$

Obrat  $\frac{z'}{t'}$  predstavlja brzinu premještanja maksimalne amplitude. Vidimo da se cijeli udar koji nastaje superpozicijom dvaju valova širi tom brzinom koju nazivamo grupnom brzinom

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \rightarrow \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\bar{\omega}} \quad (\text{derivacija od } \omega(k) \text{ na frekv. } \bar{\omega})$$

Uzmimo upr. rifalnu vezanu opruganu



Ako se  $\omega_1$  i  $\omega_2$  nalaze blizu  $\omega_{min}$  grupna brzina je mala.

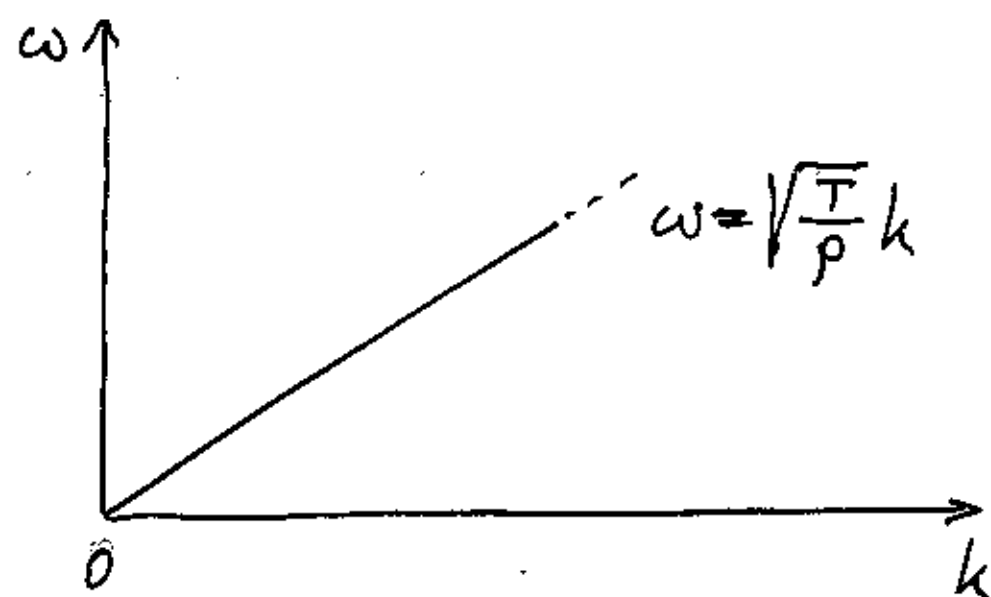
Napomena:

Fazne brzine svakog od valova ( $\frac{\omega_1}{k_1}$  i  $\frac{\omega_2}{k_2}$ ) postaju jako velike ali njihova grupna brzina se smanjuje. Grupna brzina određuje brzinu prenošenja energije u valovne sredstvom.

Kada se  $k_1$  i  $k_2$  nalaze blizu  $\frac{\pi}{2a}$  grupna brzina je najveća.

Za  $\omega_1, \omega_2 \leq \omega_{\max}$  grupna brzina je opet najveća.

Razmotrimo grupnu brzinu u kontinuumu



$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{fazna brzina}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{grupna brzina}$$

$$\boxed{v_g = v_{\varphi}}$$

u kontinuumu

U kontinuumu je grupna brzina jednaka faznoj.

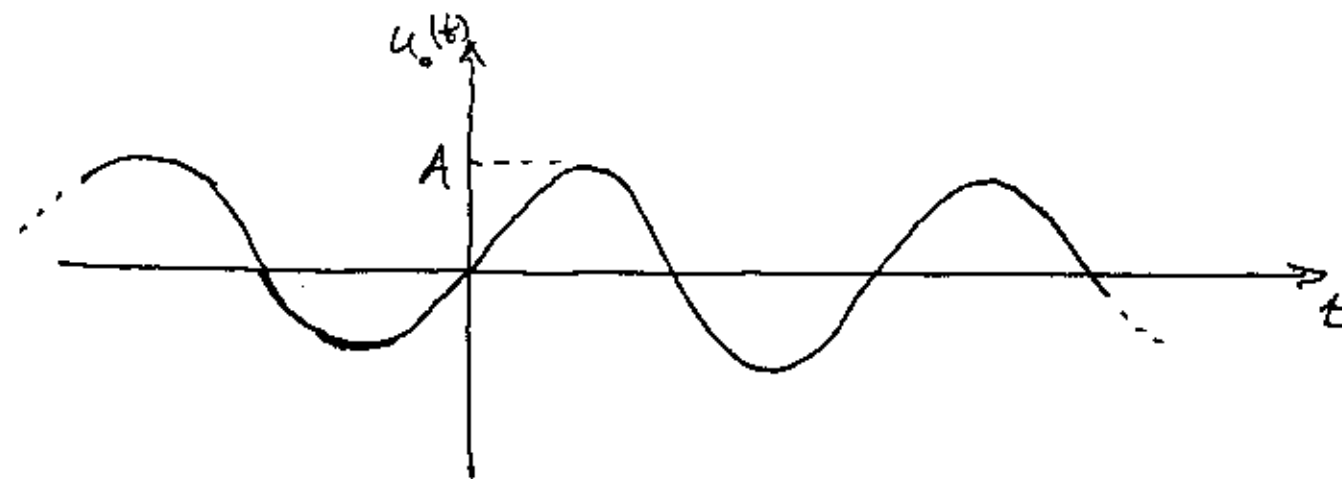
Brzina širenja energije (grupna brzina) u kontinuumu ne ovisi o frekvenciji.

### 3.5. Frekventni spektar

Razmotrimo ovdje samo vremensko titranje izvora. Ako pretpostavimo da je ono dato izrazom

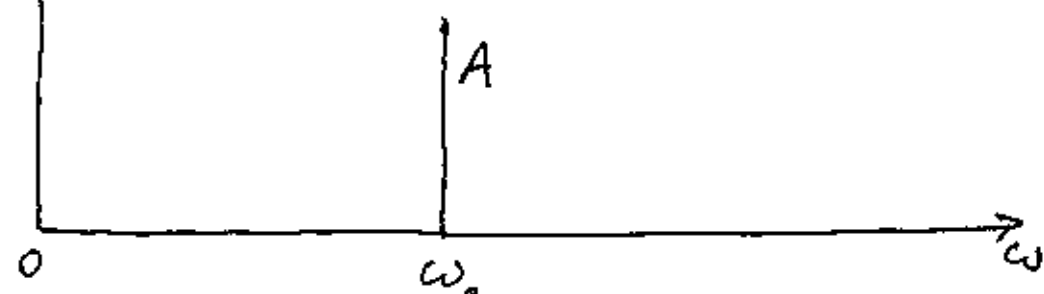
$$u_0(t) = A \sin \omega_0 t$$

onda se može prikazati sinusoidom



Sinusoida je beskonačna funkcija od  $t = -\infty$  do  $t = +\infty$ . U tome slučaju imamo titranje samo jednom frekvencijom  $\omega_0$ , pa možemo reći da je frekventni spektar moguće prikazati jednom linijom

amplituda  
spektralne  
linije

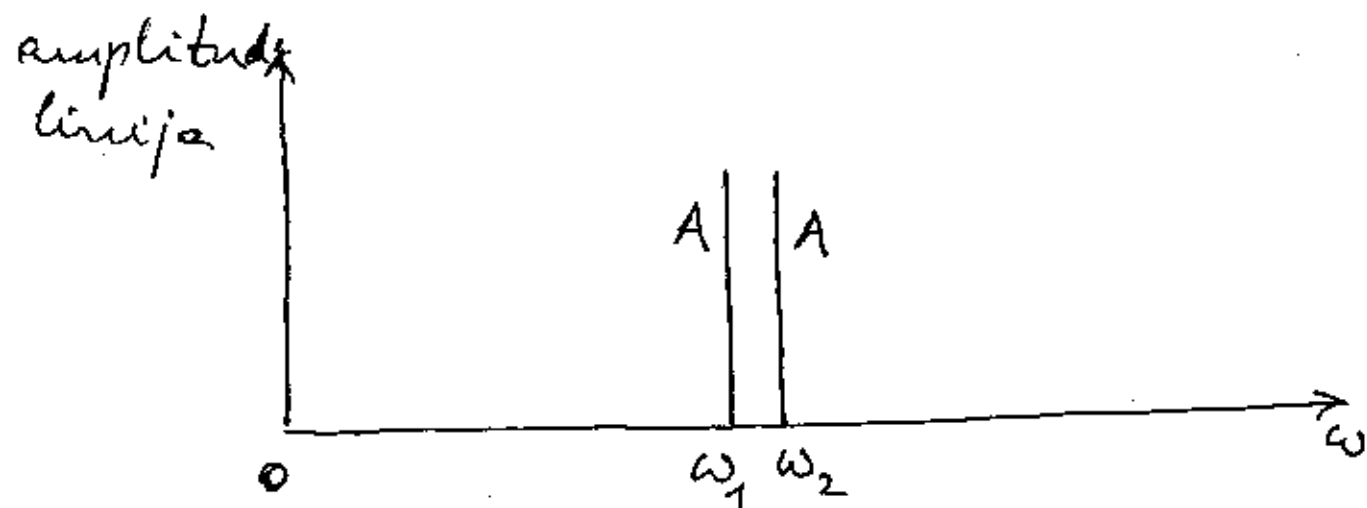




U prethodnom odjeljku 3.4. pretpostavili smo da izvor titra superpozicijom bliskih frekvencija  $\omega_1$  i  $\omega_2$

$$u_o(t) = A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t = 2A \cos \frac{\Delta \omega}{2} t \sin \bar{\omega} t$$

Tako nastaju udari koji se ponavljaju. Ako to traje (idealizirano) od  $t = -\infty$  do  $t = +\infty$ , možemo reći da frekventni spektar ima dvije linije (na  $\omega_1$  i  $\omega_2$ ).



Mogli bismo tako stvarati razne superpozicije titranja na većem broju frekvencija i s različitim amplitudama, te prikazati odgovarajući frekventni spektar s nizom linija.

U praksi možemo imati jednu vremensku titranje  $u_o(t)$  koje izgleda jako složeno i ne znamo unaprijed sastoji li se ono

od superpozicije nekog broja sinusoida na nekim frekvencijama i s određenim amplitudama. Odgovor nam daje metoda spektralne analize (Fourierova analiza).

Neka nam je poznata (odnosno zadana) funkcija  $F(t)$  koje je periodična u vremenu s periodom  $T_1$ , tj.

$$F(t+T_1) = F(t) \quad \text{za bilo koji "t"}$$

Takva funkcija se može razviti u Fourierov red

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t$$

gdje je  $\omega_1 = 2\pi \nu_1 = \frac{2\pi}{T_1}$  osnovna frekvencija

$\omega_n = n\omega_1$  viši harmonici ( $n=2, 3, \dots$ )

Fourierovi koeficijenti su dani izrazima

$$B_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t'}^{t'+T_1} F(t) dt$$

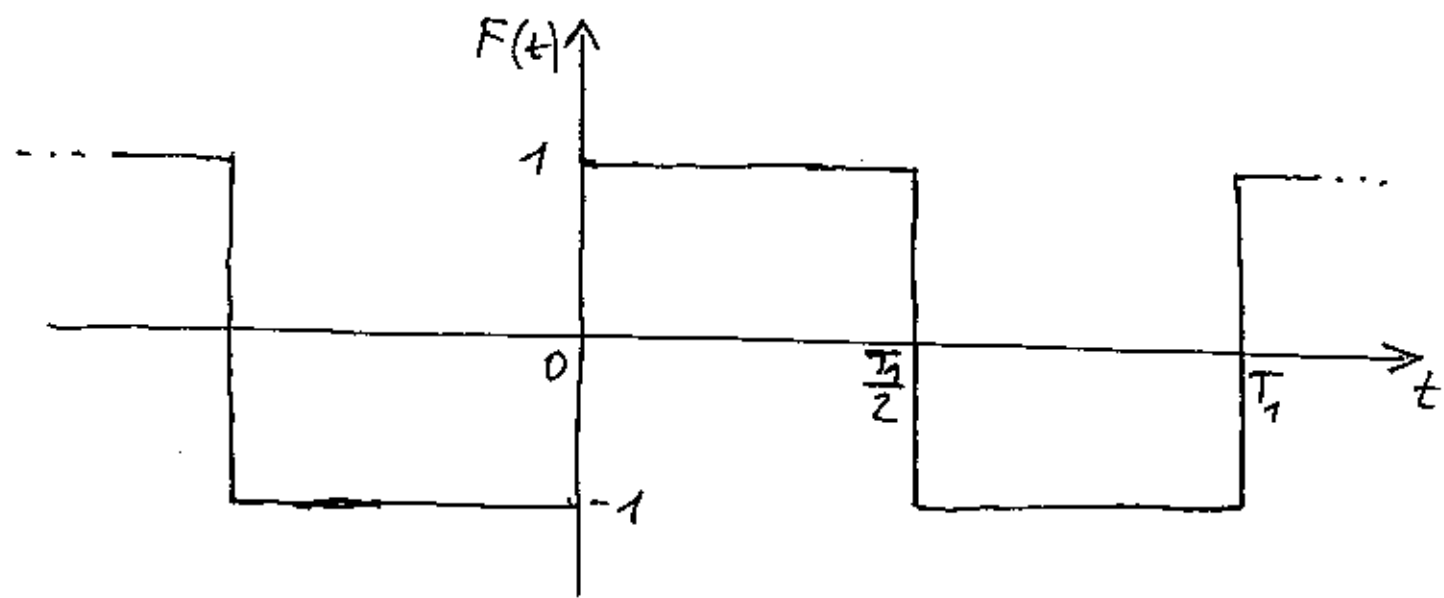
$$B_n = \frac{2}{T_1} \int_{t'}^{t'+T_1} F(t) \cos n\omega_1 t dt$$

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_{t'}^{t'+T_1} F(t) \sin n\omega_1 t dt$$

gdje je  $t'$  bilo koje po volji odabrano vrijeme.

Koeficijent  $B_0$  očito predstavlja srednju vrijednost funkcije  $F(t)$ . Ako ona postoji kao različita od nule, možemo razmotriti periodičnu funkciju  $F(t) - B_0$ , čija je srednja vrijednost očito nula, tj. oscilira podjednako u pozitivne i negativne vrijednosti.

Zanimljiviji su koeficijenti  $A_n$  i  $B_n$ . Pitajući se koji od njih dominiraju u Fourierovu redu neke funkcije. Razmotrimo kao primjer funkciju pravokutne oblike



Funkcija  $F(t)$  je periodična s periodom  $T_1$ . Srednja vrijednost funkcije je očito nula, odnosno  $B_0 = 0$ . Funkcija ima neparnu simetriju  $F(-t) = -F(t)$ . Budući da je kosinusovna funkcija parna, dobivamo  $B_n = 0$  za sve  $n$ .

Također lako uvidamo da je  $A_n = 0$  za sve parne  $n$  (tj.  $n = 2, 4, 6, \dots$ ). Preostaju samo koeficijenti s neparnim  $n$

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} F(t) \sin n\omega_1 t dt = \\ = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1/2} \sin n\omega_1 t dt - \frac{2}{T_1} \int_{T_1/2}^{T_1} \sin n\omega_1 t dt$$

Načinimo substituciju varijable  $\theta = n\omega_1 t$

$$A_n = \frac{2}{T_1} \frac{1}{n\omega_1} \int_0^{n\pi} \sin \theta d\theta - \frac{2}{T_1} \frac{1}{n\omega_1} \int_{n\pi}^{2n\pi} \sin \theta d\theta = \\ = \frac{1}{n\pi} [-\cos \theta]_0^{n\pi} - \frac{1}{n\pi} [-\cos \theta]_{n\pi}^{2n\pi}$$

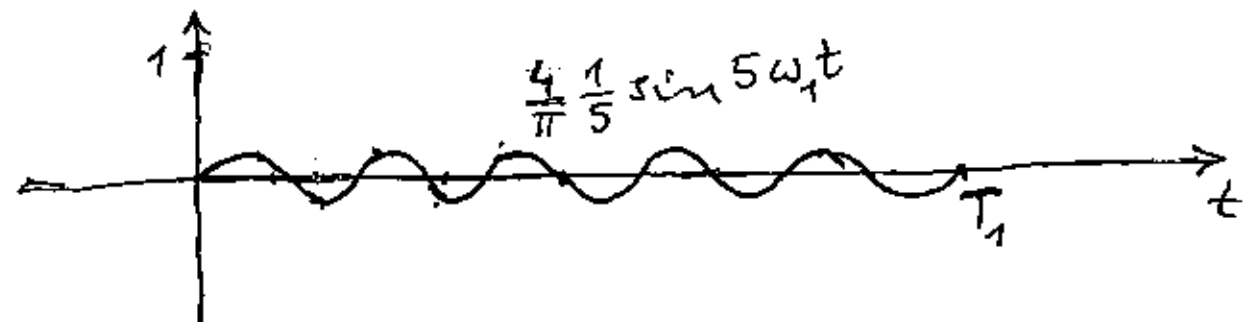
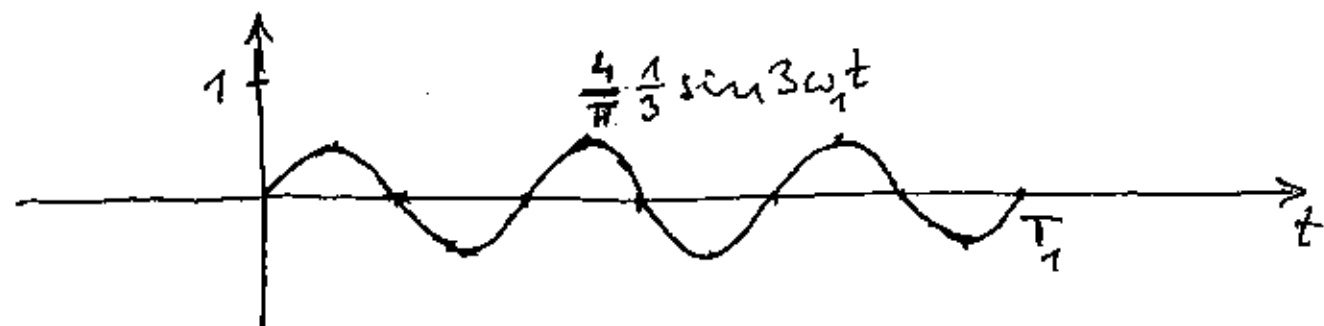
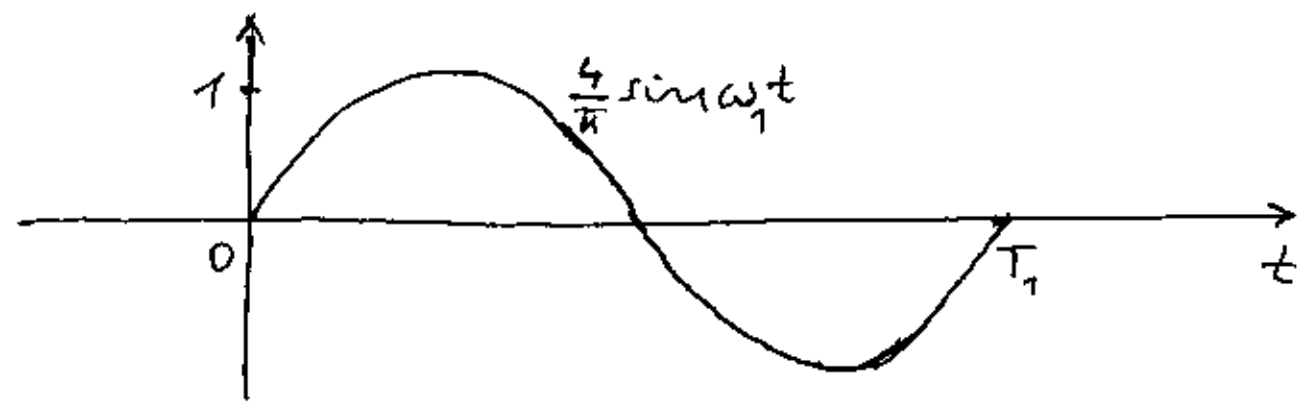
Ako vodimo računa o tome da je  $n$  neparan broj, dobivamo

$$A_n = \frac{4}{n\pi}$$

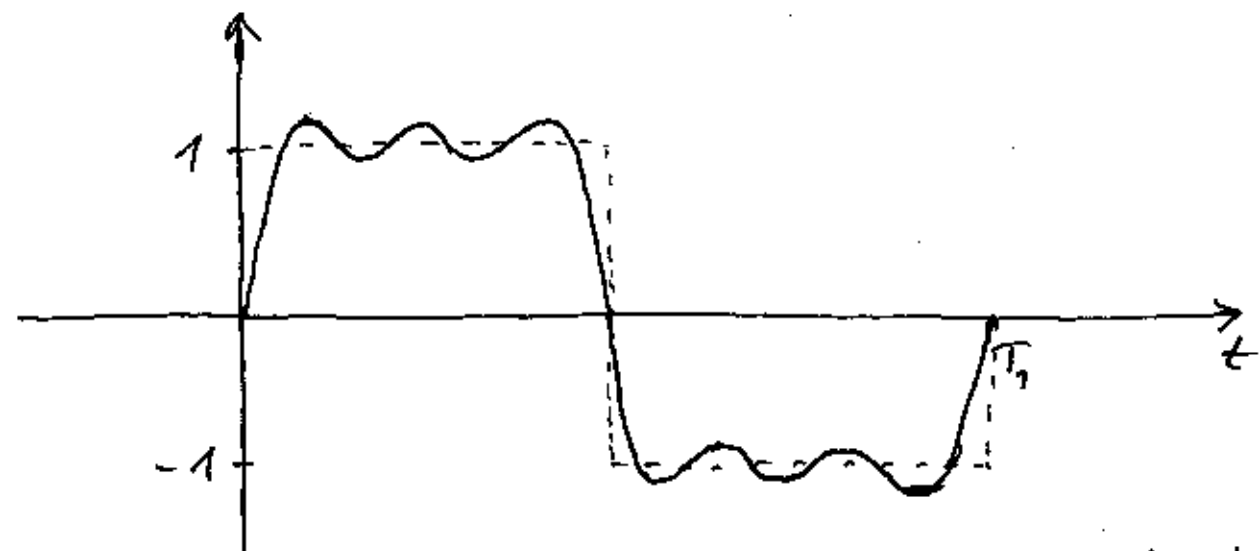
Prema tome, pravokutnu funkciju možemo napisati u obliku reda

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right]$$

Nacrtajmo prve članove samo unutar intervala od 0 do  $T_1$  (izvan se ponavlja)



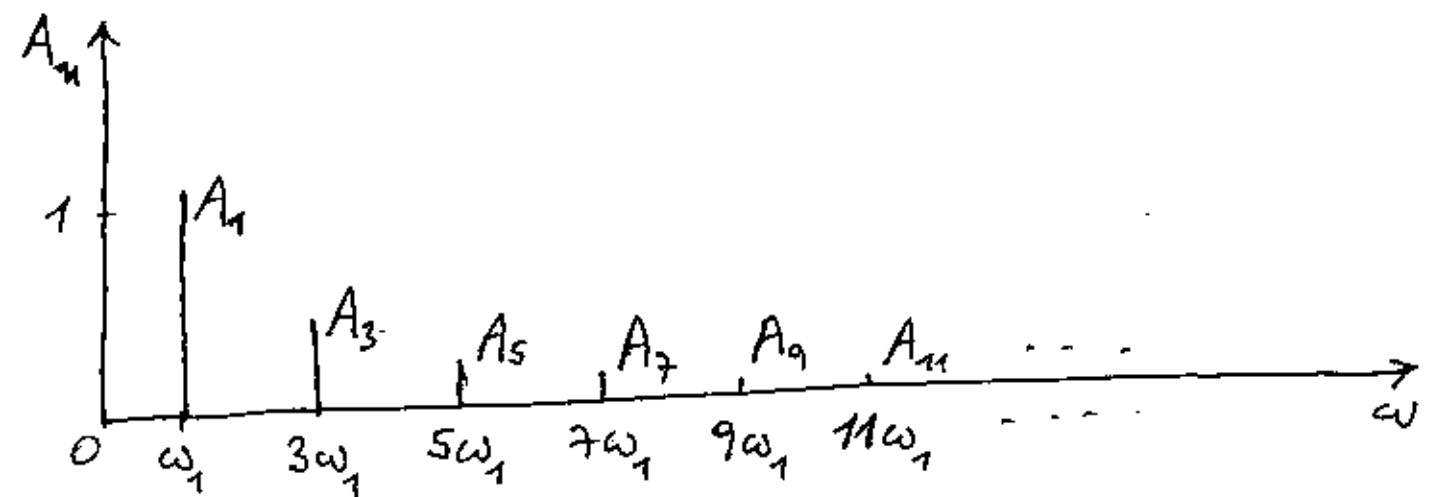
Ako grafčki zbrojimo ove tri funkcije dobivamo



Cvrtane linije prikazuju pravokutnu funkciju  $F(t)$ .

Kada bismo uzeli dodatne članove u red, mogli bismo sve bolje i bolje aproksimirati pravokutnu funkciju  $F(t)$ . U praksi se zadovoljava s konačnim brojem članova koji nam daje dovoljno točnu aproksimaciju.

Frekventni spektar možemo prikazati linijama



Općenita napomena:

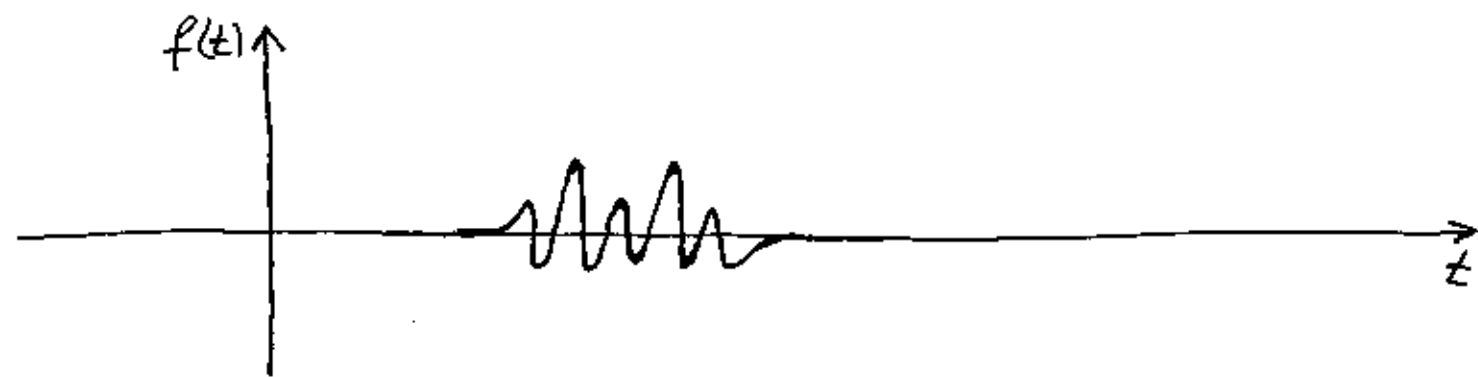
Ako neka periodična funkcija  $F(t)$  ima brze oscilacije unutar svojeg perioda  $T_1$ , onda će Fourierovi koeficijenti višeg reda biti značajniji.

Ako se funkcija sporo mijenja, veće su koeficijenti nižeg reda.

Pravokutna funkcija je posebna. Ona se uopće ne mijenja od 0 do  $\frac{T_1}{2}$ , zatim ima skok i onda se opet ne mijenja od  $\frac{T_1}{2}$  do  $T_1$ , zato su koeficijenti nižeg reda dominantni, ali se točniji opis skoka potrebniji su i oni višeg reda.

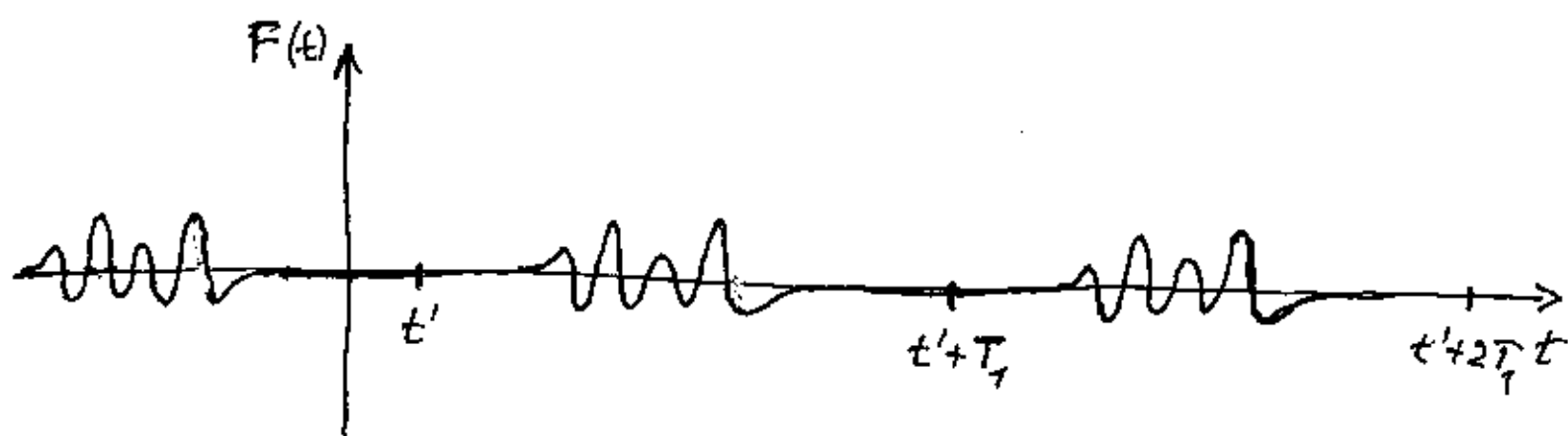
### 3.6. Valni paket

Razmotrimo neko vremensko titranje koje traje samo određeno vrijeme i dano je nekom funkcijom  $f(t)$



Budući da funkcija  $f(t)$  nije beskonačno periodična funkcija, ne može se na nju primijeniti razvoj u Fourierov red.

Da bismo došli do spektralne analize funkcije  $f(t)$ , konstruirajmo najprije funkciju  $F(t)$  koju dobijemo ponavljanjem funkcije  $f(t)$  u nekim većim intervalima  $T_1$



Trenutak  $t'$  je odabran tako da je tada funkcija  $f(t')$  iščezavala (nije bilo titranja).

Također, period  $T_1$  je odabran tako velik da  $f(t'+T_1)$  također iščezava (nema više titranja, tj. ono je prestalo). Funkcija  $F(t)$  se, dakle, poklapa s funkcijom  $f(t)$  samo unutar jednog perioda (od  $t'$  do  $t'+T_1$ ).

Međutim, funkcija  $F(t)$  je beskonačno periodična funkcija pa na nju možemo primijeniti razvoj u Fourierov red prema općim formulama iz prethodnog odjeljka 3.5. Funkcija  $F(t)$  ima u svom frekventnom spektru osnovnu (najnižu) frekvenciju  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$  i više harmonike  $\omega_n = n\omega_1$ . Amplitude pojedinih spektralnih linija dane su Fourierovim koeficijentima.

U sljedećem koraku, možemo odabrati  $t'$  više prema negativnim vrijednostima a  $T_1$  dovoljno velik tako da se  $t'+T_1$  pomakne dalje prema pozitivnim vrijednostima. Funkcija  $F(t)$ , koja tako nastane, opet je beskonačno periodična te je moguć njen razvoj u Fourierov red.

Zbog većeg perioda  $T_1$  smatramo je osnovna frekvencija  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ , a viši harmonici su gušće raspoređeni (frekventna razlika susjednih harmonika je  $\omega_{n+1} - \omega_n = (n+1)\omega_1 - n\omega_1 = \omega_1$ ).

Možemo izračunati nove Fourierove koeficijente.

Konačno, zamislimo da  $t' \rightarrow -\infty$ , a  $t'+T_1 \rightarrow \infty$ .

Tada funkcija  $F(t)$  postaje praktički jednaka funkciji  $f(t)$ . Vidjet ćemo da beskonačan

Fourierov red funkcije  $F(t)$  postaje praktički

jednak Fourierovu integralu, a Fourierovi

koeficijenti prelaze u kontinuirane funkcije

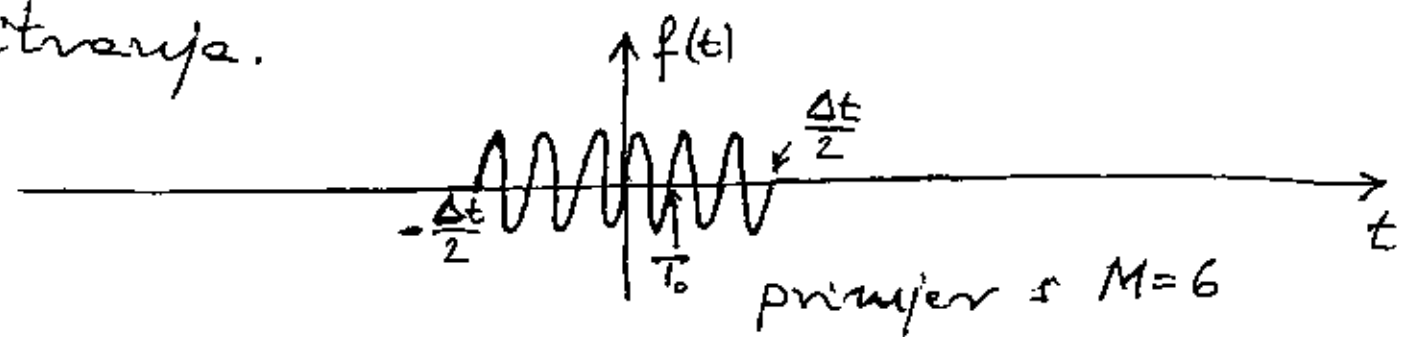
$A(\omega)$  i  $B(\omega)$  s tim da se  $\omega$  mijenja od 0 do  $\infty$ .

Primjer:

Neka izvor titranja radi od  $t = -\infty$  do nekog trenutka, a zatim počne titrati

frekvencijom  $\omega_0$  te načinu određen broj (npr.  $M$ ) punih titraja i zatim stane.

Postavimo  $t=0$  (izbor po volji!) tako da bude po sredini između početka i završetka titranja.



Period jednog titraja je  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , tako da se  $M$  punih titraja načini u vremenskom intervalu  $\Delta t = MT_0$ . Funkcija  $f(t)$  je, dakle, definirana izrazom

$$f(t) = 0 \quad \text{za } t < -\frac{\Delta t}{2}$$

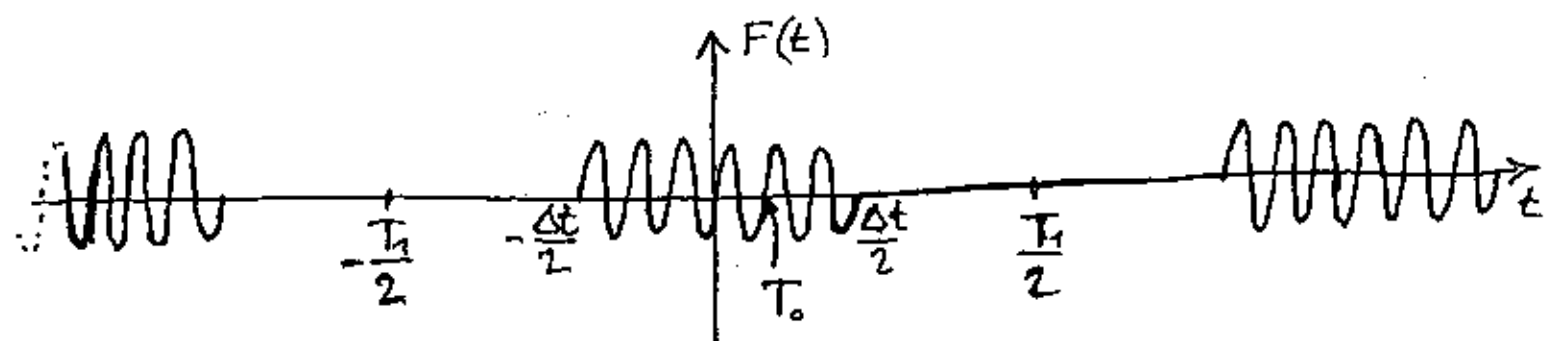
$$f(t) = A_0 \sin \omega_0 t \quad \text{za } -\frac{\Delta t}{2} \leq t \leq \frac{\Delta t}{2}$$

$$f(t) = 0 \quad \text{za } t > \frac{\Delta t}{2}$$

Za primjenu razvoja u Fourierov red moramo konstruirati beskonačno periodičnu funkciju

$F(t)$  ponavljajući gornju funkciju u nekom periodu  $T_1$  koji je veći od trajanja pulsa  $\Delta t$ .

Neka je  $T_1$  također višekratnik od  $T_0$ , tj.  $T_1 = NT_0$  ( $N > M$  tako da je  $T_1 > \Delta t$ ).



Funkcija  $f(t)$  je neparna, pa to vrijedi i za  $F(t)$ . Zato se u Fourierovu razvoju pojavljuju samo sinusne funkcije

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

Fourierovi koeficijenti su dani izrazom

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} F(t) \sin n\omega_1 t dt$$

U intervalu od  $-\frac{T_1}{2}$  do  $\frac{T_1}{2}$  funkcija  $F(t)$  je različita od nule samo za vrijeme trajanja pulsa, tj. od  $-\frac{\Delta t}{2}$  do  $\frac{\Delta t}{2}$ , zato imamo

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} A_0 \sin \omega_0 t \sin n\omega_1 t dt$$

Budući da smo odabrali period ponavljanja  $T_1 = NT_0$ , možemo izraziti  $\omega_0$  kao

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{T_1}{N}} = N \frac{2\pi}{T_1} = N\omega_1$$

Dakle, frekvencija  $\omega_0$  je  $N$ -ti harmonik osnovne (najniže) frekvencije u Fourierovom razvoju periodične funkcije  $F(t)$ .

Također, odabrali smo puls koji ima  $M$  punih titraja tako da je njegovo trajanje  $\Delta t = MT_0$ . Povezano s  $T_1 = NT_0$  dobivamo za granicu integrala

$$\frac{\Delta t}{2} = \frac{MT_0}{2} = \frac{M}{N} \frac{T_1}{2}$$

Ustavljajući u izraz za  $A_n$  dobivamo

$$A_n = \frac{2A_0}{T_1} \int_{-\frac{M}{N} \frac{T_1}{2}}^{\frac{M}{N} \frac{T_1}{2}} \sin N\omega_1 t \sin n\omega_1 t dt$$

Ishodimo trigonometrijsku relaciju

$$2 \sin N\omega_1 t \sin n\omega_1 t = \cos(N-n)\omega_1 t - \cos(N+n)\omega_1 t$$

$$A_n = \frac{A_0}{T_1} \int_{-\frac{M}{N} \frac{T_1}{2}}^{\frac{M}{N} \frac{T_1}{2}} \cos(N-n)\omega_1 t dt - \frac{A_0}{T_1} \int_{-\frac{M}{N} \frac{T_1}{2}}^{\frac{M}{N} \frac{T_1}{2}} \cos(N+n)\omega_1 t dt =$$

$$= \frac{A_0}{T_1} \frac{1}{(N-n)\omega_1} \left[ \sin(N-n)\omega_1 t \right]_{-\frac{M}{N} \frac{T_1}{2}}^{\frac{M}{N} \frac{T_1}{2}} - \frac{A_0}{T_1} \frac{1}{(N+n)\omega_1} \left[ \sin(N+n)\omega_1 t \right]_{-\frac{M}{N} \frac{T_1}{2}}^{\frac{M}{N} \frac{T_1}{2}} =$$

$$= \frac{A_0}{T_1} \frac{2 \sin(N-n)\omega_1 \frac{M}{N} \frac{T_1}{2}}{(N-n)\omega_1} - \frac{A_0}{T_1} \frac{2 \sin(N+n)\omega_1 \frac{M}{N} \frac{T_1}{2}}{(N+n)\omega_1}$$

Uzimamo u obzir da je  $\omega_1 T_1 = 2\pi$ , pa dobivamo

$$A_n = \frac{A_0}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi M(N-n)}{N}}{N-n} - \frac{A_0}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi M(N+n)}{N}}{N+n}$$

U samome početku smo uzeli da je period ponavljanja  $T_1$  mnogo veći od perioda jednog titraja  $T_0$ , što znači da je  $N$  velik broj ( $T_1 = NT_0$ ). Stoga je drugi član zanemarivo malen

jer je u nazivniku uvijek velik broj  $N+n$ , a u brojniku se vrijednost sinusa kreće samo od  $-1$  do  $+1$ .

Prvi član je također malen ako se  $n$  mnogo razlikuje od  $N$ . Dakle, značajnu vrijednost će imati samo oni Fourierovi koeficijenti  $A_n$  za koje je  $n$  blizu broja  $N$ . Obratit ćemo pažnju na njih. Uvedimo supstituciju varijable

$$\theta_n = \frac{\pi M(N-n)}{N}$$

pa Fourierove koeficijente možemo pisati u obliku

$$A_n = \frac{A_0 M}{N} \frac{\sin \theta_n}{\theta_n}$$

Kada  $n \rightarrow N$  imamo  $\theta_n \rightarrow 0$  te možemo primijeniti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ tj.}$$

$$A_N = \frac{A_0 M}{N}$$

Najveći Fourierov koeficijent je upravo ovaj koji se odnosi na  $N$ -ti harmonik od  $\omega_1$ , a to znači na frekvenciju  $N\omega_1 = \omega_0$ .

Da smo uzeli bitreje koje traje beskonačno

dugo, tj. broj bitreja  $M \rightarrow \infty$ , tada bi i period ponavljanja trebalo smatrati beskonačno velikim, tj.  $N \rightarrow \infty$ , pa bismo imali samo jednu Fourierovu komponentu  $A_0 \sin \omega_0 t$ .

No, za puls s konačnim brojem bitreja  $M$ , te periodom ponavljanja  $T_1$  koji je duži od trajanja pulsa  $\Delta t$ , imamo  $N > M$ , odnosno  $\frac{M}{N} < 1$ , te  $A_N < A_0$ . Zato imamo veći broj

Fourierovih koeficijenata koji su različiti od nule. Istražimo ih uzimajući  $n \neq N$ .

Funkcija  $\frac{\sin \theta}{\theta}$  se smanjuje od jedinice (za  $\theta = 0$ ) do nule koju postiže za  $\theta = \pm \pi$ .

Za neki  $n' < N$  možemo imati

$$\theta_{n'} = \frac{\pi M(N-n')}{N} = \pi \Rightarrow n' = N - \frac{N}{M}$$

Također, za neki  $n'' > N$  možemo imati

$$\theta_{n''} = \frac{\pi M(N-n'')}{N} = -\pi \Rightarrow n'' = N + \frac{N}{M}$$

Fourierovi koeficijenti za harmonike na  $n'\omega_1$  i  $n''\omega_1$  iščezavaju ( $A_{n'} = A_{n''} = 0$ ). Između njih ima  $\Delta n = n'' - n' = 2\frac{N}{M}$  harmonika.

Nacrtajmo frekventni spektar za slučaj

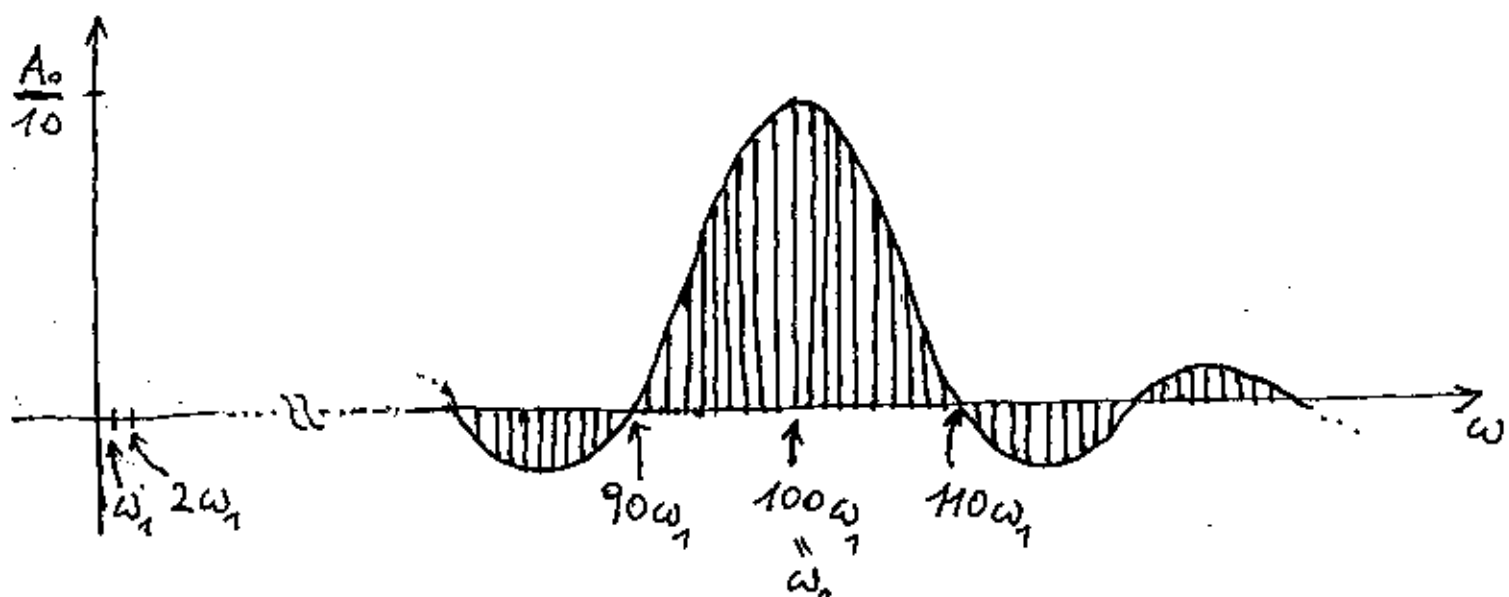
$$M=10 \quad (\Delta t = MT_0 = 10T_0, \text{ deset punih titraja})$$

$$N=100 \quad (T_1 = NT_0 = 100T_0, \text{ period povećanja})$$

$$A_N = \frac{A_0 M}{N} = \frac{A_0}{10} \quad \text{amplituda } N\text{-tog harmonika}$$

$$n' = N - \frac{N}{M} = 100 - 10 = 90 \quad (90\text{-ti harmonik od } \omega_1)$$

$$n'' = N + \frac{N}{M} = 100 + 10 = 110 \quad (110\text{-ti harmonik od } \omega_1)$$



Dominantni Fourierovi koeficijenti su oni za harmonike blizu  $N$ -tom. Uzimamo kao mjernu za frekventnu širinu polovicu raspona središnjeg maksimuma

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}(n''\omega_1 - n'\omega_1)$$

Možemo izračunati

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}(n'' - n')\omega_1 = \frac{N}{M}\omega_1 = \frac{N}{M} \frac{2\pi}{T_1} = \frac{N}{M} \frac{2\pi}{NT_0} = \frac{2\pi}{MT_0} = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

Ovaj rezultat nas vodi na općenit zaključak

$$\Delta\omega \Delta t = 2\pi \quad \text{ili} \quad \Delta\nu \Delta t = 1$$

Dakle, što je vrijeme trajanja pulsa  $\Delta t$  duže, to je širina frekventnog spektra  $\Delta\omega$  (ili  $\Delta\nu$ ) manja, tj. frekventni spektar je uži. U krajnjem slučaju, kada bi titranje trajalo vječno ( $\Delta t \rightarrow \infty$ ), imali bismo  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , tj. samo titranje na frekvenciji  $\omega_0$ .

Ako je pak trajanje pulsa  $\Delta t$  kraće, proširuje se frekventni spektar (veća širina  $\Delta\omega$ , odnosno  $\Delta\nu$ ). U krajnjem slučaju, kada bismo imali samo jedan puni titraaj, tj.  $\Delta t = T_0$ , dobili bismo frekventni spektar širine  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$ , tj. spektar bi bio širok koliko i same frekvencija  $\omega_0$ .

Drugim riječima, umjesto harmonika  $n\omega_1$  koji se nalaze unutar raspona  $\Delta\omega$  imali bi značajne Fourierove koeficijente.

Razmotrimo sada širenje vala u sredstvu. Neka funkcija  $F(t)$  predstavlja titranje izvora

$$u_0(t) = F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \omega_n t, \quad \omega_n = n\omega_1, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$



U valnom sredstvu će se širiti val

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t - k_n z)$$

gdje svakom titranju na frekvenciji  $\omega_n$  odgovara neki  $k_n$  u skladu s disperzijskom relacijom  $\omega(k)$  za dato valno sredstvo.

Ako je disperzijska relacija linearna

$$\omega = vk$$

gdje je  $v = v_f = v_g$  brzina širenja vala koja je jednaka za sve frekvencije, onda se valni paket giba od izvora duž valnog sredstva bez promjene svoga oblika.

U slučaju kada je disperzijska relacija  $\omega(k)$  nelinearna, pojedini harmonici putuju različitim faznim brzinama, pa se valni paket širi u svojoj duljini. Naime, ako je izvor napravio  $M$  punih titraja frekvencijom  $\omega_0$ , pakima <sup>paketa</sup> prostornu duljinu  $M\lambda_0$ , gdje je  $\lambda_0$  valna duljina, onda pišemo

$$(\Delta z)_0 = M\lambda_0$$

Međutim, zbog ograničenog trajanja pulsa  $\Delta t$ , dobivamo spektralnu širinu  $\Delta\omega$ , a time i odgovarajući pojas za kutne valne brojeve  $\Delta k$ , sukladno disperzijskoj relaciji za dato valno sredstvo. Grupska brzina je definirana izrazom

$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}$$

Ako je funkcija  $\omega(k)$  nelinearna, onda u intervalu  $\Delta k$  imamo varijaciju grupnih brzina koje daju pojas

$$\Delta v_g = \left( \frac{d}{dk} v_g(k) \right)_s \Delta k = \left( \frac{d^2 \omega(k)}{dk^2} \right)_s \Delta k$$

gdje indeks "s" označava da uzimamo vrijednost derivacije na sredini pojasa  $\Delta k$ . Zbog te razlike u grupnim brzinama na krajevima pojasa  $\Delta k$  (odnosno pojasa  $\Delta\omega$ ), valni paket koji je u početku (tj. oko  $t=0$ ) imao prostornu širinu  $(\Delta z)_0$ , nakon vremena  $t$  imat će prostornu širinu

$$(\Delta z)_t \approx (\Delta z)_0 + (\Delta v_g)t$$

Možemo izvesti još jednu važnu relaciju. Za valni paket koji ima neku spektralnu širinu  $\Delta\omega$ , možemo približno pisati

$$\Delta k = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_s \Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_s} = \frac{\Delta\omega}{(v_g)_s}$$

gdje indeks "s" opet označava srednju pojasa  $\Delta k$ . Ako paket ima prostornu širinu  $\Delta z$ , onda on prođe kroz neku točku z u intervalu vremena  $\Delta t$  tako da je

$$\Delta z \approx (v_g)_s \Delta t$$

gdje smo uzeli srednju grupnu brzinu  $(v_g)_s$  kao onu kojom se u tome kratkom intervalu vremena  $\Delta t$  giba valni paket kao cjelina.

Množenjem gornjih dviju jednačini dobivamo

$$\Delta k \Delta z \approx \Delta\omega \Delta t$$

Za dani valni paket koji je nastao određeni načinom izvoza,  $\Delta\omega$  je utvrđena spektralna širina. Ona se ne mijenja tijekom vremena kako valni paket putuje duž valnog sredstva. Također je pojas  $\Delta k$

ostaje isti tijekom vremena jer je povezan s  $\Delta\omega$  putem disperzijske relacije valnog sredstva.

Međutim, vidjeli smo da se u valnom sredstvu s nelinearnom relacijom disperzije prostorna širina valnog paketa  $(\Delta z)_t$  povećava. Stoga se povećava i interval vremena  $\Delta t$  koji je potreban da valni paket prođe kroz neku točku z. Relacija jednakosti  $\Delta k \Delta z \approx \Delta\omega \Delta t$  ostaje valjana u svim vremenima.

Ovo što možemo razlikovati je izvor ~~isto~~ produkta u različitim vremenima. Naime, u vremenu oko  $t=0$  kada je na izvoru nastao valni paket imali smo rezultat

$$\Delta k (\Delta z)_0 \approx \Delta\omega (\Delta t)_0 = 2\pi \quad \left( \text{odnosno} \quad \frac{\Delta\omega}{\Delta\nu(\Delta t)_0} = 1 \right)$$

gdje indeks "0" označava vrijeme oko  $t=0$ . U kasnijim vremenima t, kada je valni paket otputovao daleko duž valnog sredstva imamo njegovu prostornu širinu na  $(\Delta z)_t$  i vremensko produljenje titranja  $(\Delta t)_t$ , tako da je

$$\Delta k (\Delta z)_t \approx \Delta\omega (\Delta t)_t > 2\pi$$

## Matematička dopuna: Fourierov integral

Vratimo se na problem funkcije  $f(t)$  koja ima jednokratno i ograničeno trajanje. Za potrebe razvoja u Fourierov red napravili smo ujedno funkciju  $F(t)$  kao beskonačnu periodičnu funkciju s periodom ponavljanja  $T_1$ . Možemo sada zamisliti slučajeve u kojima  $T_1$  postaje sve veći i veći, te u graničnom slučaju teži u beskonačnost. Tada se  $F(t)$  poklopa s  $f(t)$  u bilo kojem konačno velikom intervalu vremena.

Postavlja se pitanje što se događa s frekventnim spektrom funkcije  $F(t)$  ako uzimamo uzastopce sve veći i veći  $T_1$ .

Očito je da osnovna frekvencija  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$  postaje sve manje. To ujedno znači da su harmonici sve guđe raspoređeni na frekventnoj osi (razmak između susjednih harmonika je upravo  $\omega_1$ ).

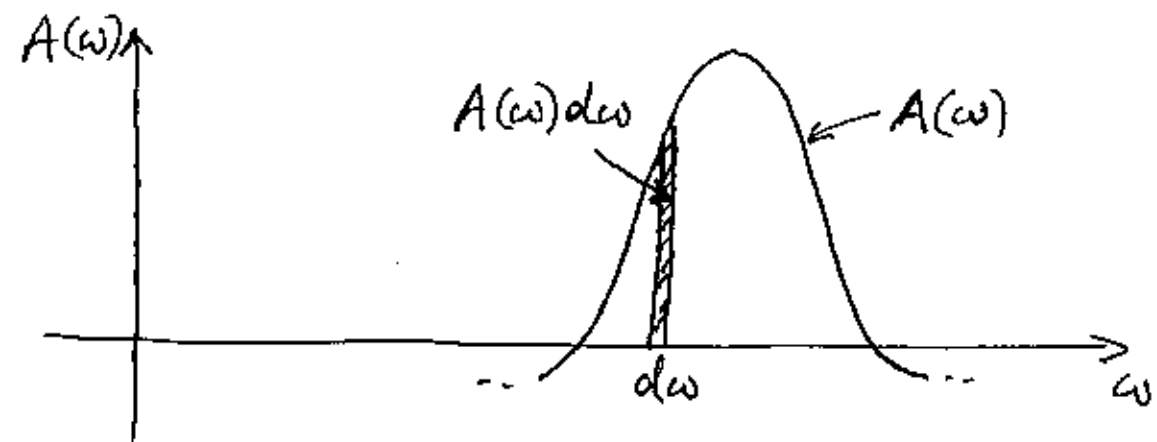
Amplitude susjednih harmonika  $A_n$  i  $A_{n+1}$  su sve bliže jedna drugoj. Zato možemo u graničnom slučaju reći da vrijedi

$$T_1 \rightarrow \infty$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow d\omega \quad \text{infinitesimalni interval frekvencije}$$

$$A_n \rightarrow A(\omega)d\omega \quad A(\omega) \text{ kontinuirana funkcija frekvencije}$$

Primjer:



$A(\omega)d\omega$  predstavlja infinitesimalnu površinu ispod krivulje  $A(\omega)$ .

Ujesto Fourierove ređe, dobivamo u graničnom slučaju Fourierov integral za funkciju  $f(t)$

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega$$

gdje je uzeto da za  $B_n$  vrijedi prijelaz u  $B(\omega)d\omega$ .

$A(\omega)$  izračunavamo kao  $\frac{A_n}{d\omega}$  s time da umjesto  $d\omega$  pišemo  $\omega_1$ , tj.  $\frac{A_n}{\omega_1}$ . Ako uvažimo da je  $\omega_1 T_1 = 2\pi$  (za bilo koju vrijednost  $T_1$ ), onda iz poznatih izraza za  $A_n$  dobivamo (stavljajući umjesto  $\omega_1$  kontinuiranu varijablu  $\omega$ )

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$$

Na isti način dobivamo

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$$

Ako funkcija  $f(t)$  ima neparnu simetriju ( $f(-t) = -f(t)$ ), onda je  $B(\omega) = 0$ , tj. preostaje samo  $A(\omega)$ . Ako je pak  $f(t)$  parna funkcija, frekventni spektar sadrži samo  $B(\omega)$ .

U općenitom slučaju funkcije  $f(t)$ , frekventni spektar je prikazan funkcijama  $A(\omega)$  i  $B(\omega)$ , koje su različite i zajedno daju punu informaciju o frekventnom spektru.

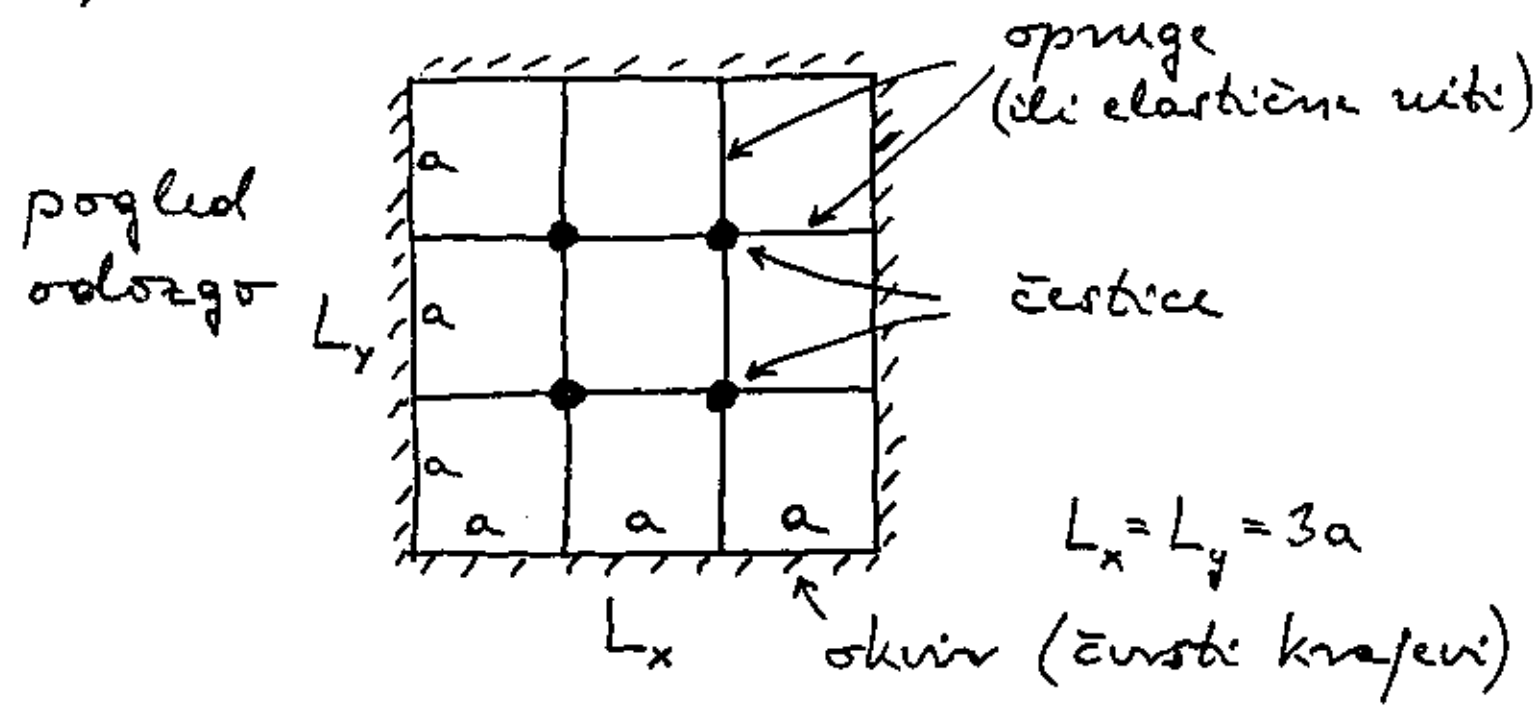
Napomena:

Fourierovi koeficijenti  $A_n$  nemaju istu dimenziju kao  $A(\omega)$ , nego kao  $A(\omega)d\omega$ . Ako se npr.  $A_n$  mjeri u metrima (amplitude titranje), onda se  $A(\omega)$  izražava u ms.

# 4. TITRANJA I VALOVI U DVIJE I TRI DIMENZIJE

## 4.1. Načini titranja (modovi) u dvije i tri dimenzije

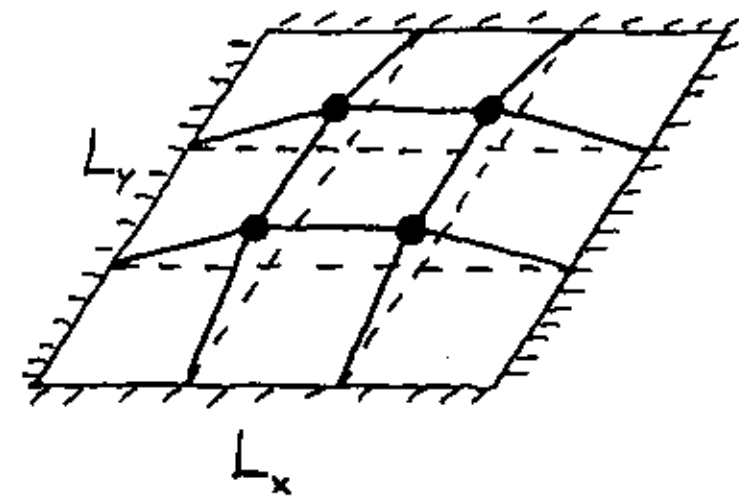
Najjednostavnija dvodimenzionalna struktura sastoji se od  $2 \times 2$  jednake čestice s oprugama koje čine mrežu.



Prikazimo transverzalne modove titranja (čestice titraju okomito na ravni okvira  $L_x L_y$ ).

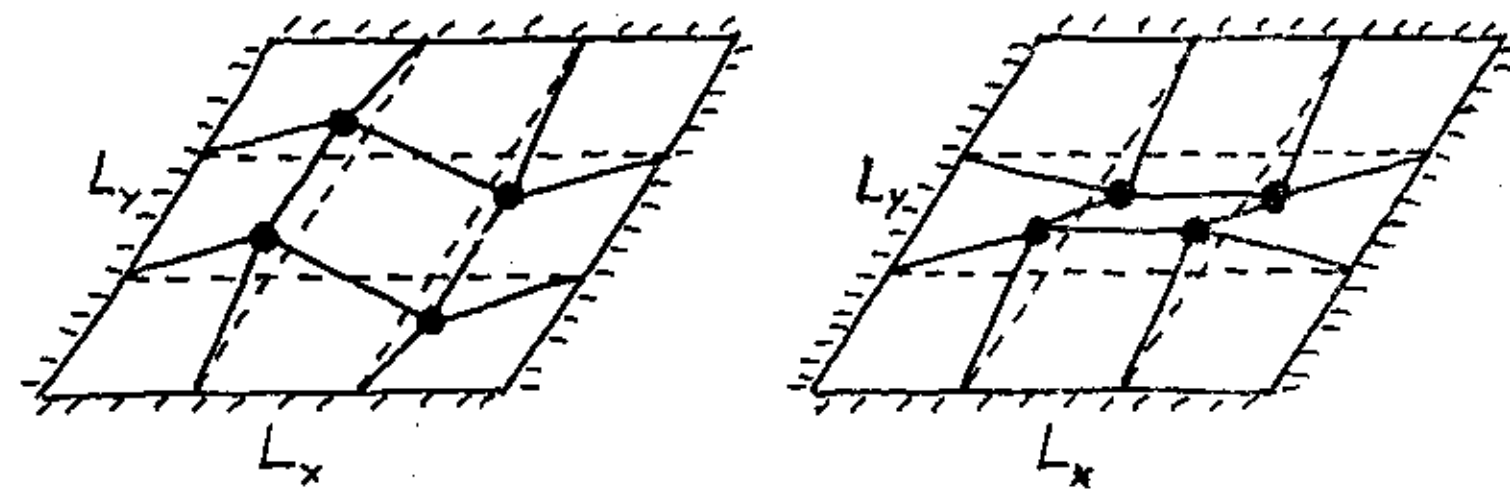
Radi uočavanja oblike moda crtamo u perspektivi okvir i postavke čestice iz položaja ravnoteže.

najniži mod (najmanja povratna sila na pojedinačnu česticu)



Uočavamo pola valne duljine duž osi  $x$  i pola valne duljine duž osi  $y$ .

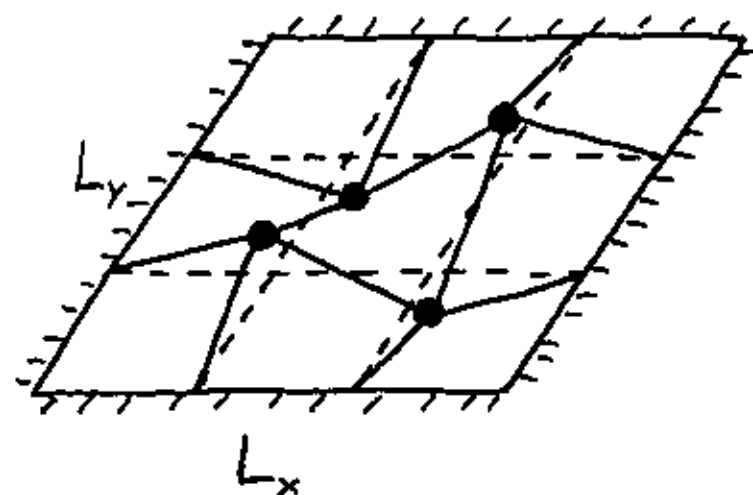
drugi središnji moda



Uočavamo cijelu valnu duljinu duž jednog od smjerova a pola valne duljine duž drugog smjera.

(dvije čestice su trenutno iznad ravnine  $xy$  a druge dvije su ispod)

nejviši mod (najveća povratna sila na pojedinau česticu)



Uočavamo cijelu valnu duljinu duž svakog od smjerova.

Općenito možemo imati dvodimenzionalan sustav od  $N \times P$  čestica s oprugama.

Ako gledamo presjeka modova duž pojedinih osi možemo uočiti:

$\sin(k_x^{(n)} x)$  - oblik duž osi  $x$

$$k_x^{(n)} L_x = n\pi \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

$\sin(k_y^{(p)} y)$  - oblik duž osi  $y$

$$k_y^{(p)} L_y = p\pi \quad (p=1, 2, \dots, P)$$

Svaki dvodimenzionalni mod određen je s dva valna broja  $k_x^{(n)}$  i  $k_y^{(p)}$ . Zato dvodimenzionalne modove označavamo s dva indeksa  $(np)$ .

Ukupno imamo  $N \times P$  modova, tj. broj modova jednak je ukupnom broju čestica.

$(x_i, y_j)$  - koordinate ravnotežnog položaja neke čestice " $ij$ "

$$x_i = ia \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

$$y_j = ja \quad (j=1, 2, \dots, P)$$

$u_{ij}^{(np)}$  - pomak čestice " $ij$ " iz ravnotežnog položaja u modu  $(np)$

U danome modu sve čestice titraju istom frekvencijom  $\omega^{(np)}$  i istom fazom ali različitim amplitudama

$$u_{ij}^{(np)}(t) = A_{ij}^{(np)} \cos(\omega^{(np)} t)$$

$$A_{ij}^{(np)} = A^{(np)} \sin(k_x^{(n)} x_i) \sin(k_y^{(p)} y_j)$$

↑ amplituda čestice " $ij$ " u modu  $(np)$       ↑ amplituda moda  $(np)$

Primjer:

Za sustav od  $2 \times 2$  čestice i  $np$ -i. mod (21) imamo

$$A_{ij}^{(21)} = A^{(21)} \sin(k_x^{(2)} x_i) \sin(k_y^{(1)} y_j)$$

$$k_x^{(2)} L_x = 2\pi \Rightarrow k_x^{(2)} = \frac{2\pi}{L_x} = \frac{2\pi}{3a}$$

$$k_y^{(1)} L_y = \pi \Rightarrow k_y^{(1)} = \frac{\pi}{L_y} = \frac{\pi}{3a}$$

$$A_{ij}^{(21)} = A^{(21)} \sin\left(\frac{2\pi}{3a} x_i\right) \sin\left(\frac{\pi}{3a} y_j\right)$$

Amplitude pojedinih čestica su:

$$i=1, j=1 \quad A_{11}^{(21)} = A^{(21)} \sin\left(\frac{2\pi}{3a} a\right) \sin\left(\frac{\pi}{3a} a\right) = \frac{3}{4} A^{(21)}$$

$$i=2, j=1 \quad A_{21}^{(21)} = A^{(21)} \sin\left(\frac{2\pi}{3a} 2a\right) \sin\left(\frac{\pi}{3a} a\right) = -\frac{3}{4} A^{(21)}$$

$$i=1, j=2 \quad A_{12}^{(21)} = A^{(21)} \sin\left(\frac{2\pi}{3a} a\right) \sin\left(\frac{\pi}{3a} 2a\right) = \frac{3}{4} A^{(21)}$$

$$i=2, j=2 \quad A_{22}^{(21)} = A^{(21)} \sin\left(\frac{2\pi}{3a} 2a\right) \sin\left(\frac{\pi}{3a} 2a\right) = -\frac{3}{4} A^{(21)}$$

Kako glasi relacija disperzije?

Ukupna povratna sila na neku česticu jednaka je zbroju sila što ih daju dvije opruge vezane na susjedne čestice duž osi  $x$  i dvije opruge vezane na susjedne čestice duž osi  $y$ .

Stoga imamo

$$(\omega^{(np)})^2 = \frac{4K}{m} \sin^2\left(\frac{k_x^{(n)} a}{2}\right) + \frac{4K}{m} \sin^2\left(\frac{k_y^{(p)} a}{2}\right)$$

$$\omega^{(np)} = \sqrt{\frac{4K}{m} \left[ \sin^2\left(\frac{k_x^{(n)} a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_y^{(p)} a}{2}\right) \right]}$$

Ova relacija disperzije povezuje frekvenciju datog moda  $\omega^{(np)}$  s dva valna broja  $k_x^{(n)}$  i  $k_y^{(p)}$ . Njih pak odredujemo analogno jednodimenzionalnom slučaju

$$k_x^{(n)} L_x = n\pi \Rightarrow k_x^{(n)} = \frac{n\pi}{L_x} = \frac{n}{N+1} \frac{\pi}{a}$$

$$k_y^{(p)} L_y = p\pi \Rightarrow k_y^{(p)} = \frac{p\pi}{L_y} = \frac{p}{P+1} \frac{\pi}{a}$$

Primijenjeno na sustav od  $2 \times 2$  čestice ( $N=2, P=2$ ) dobivamo

$$\omega^{(11)} = \sqrt{\frac{4K}{m} \left[ \sin^2\left(\frac{1}{3} \frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{1}{3} \frac{\pi}{a}\right) \right]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4K}{m}} \text{ najniži mod}$$

$$\omega^{(21)} = \omega^{(12)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \text{ dva srednja moda}$$

$$\omega^{(22)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{4K}{m}} \text{ najviši mod}$$

Degenerirani modovi

Ako dva ili više modova imaju jednake vlastite frekvencije kažemo da su oni degenerirani (npr. modovi (21) i (12) u gornjem primjeru).

Taj naziv ne znači "izobličenosť" modova nego samo to da im vlastite frekvencije nisu različite kao što se u pravilu očekuje

## Polarizacija titranja

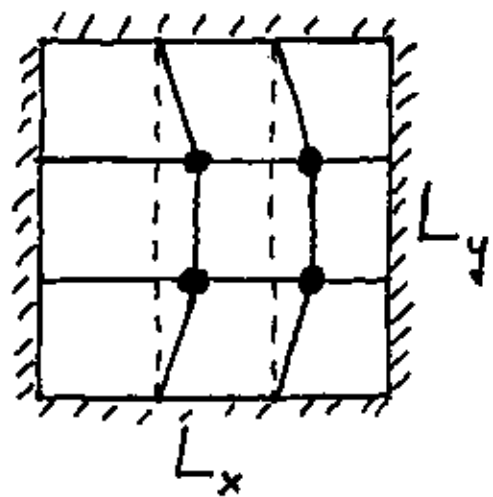
Susjed titranja čestica određuje polarizaciju.

U prethodnom primjeru polarizacija je bila određena na strukturu (transverzalan titranje u odnosu prema osi  $x$  i  $y$ ).

Moguće je odabrati polarizaciju u ravni strukture, npr. duž osi  $x$ . Tada je titranje longitudinalno u odnosu prema osi  $x$ , a transverzalan u odnosu prema  $y$ .

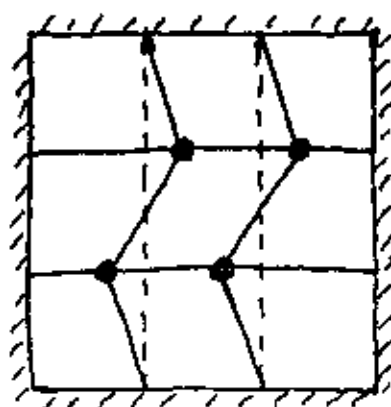
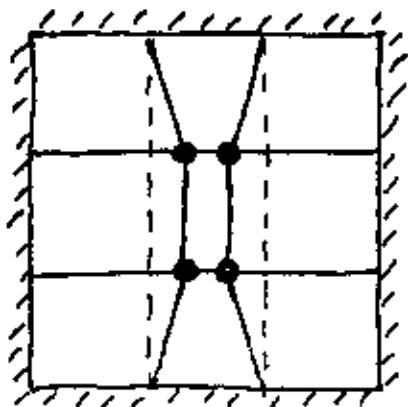
Npr. za strukturu od  $2 \times 2$  čestice:

### najviši mod

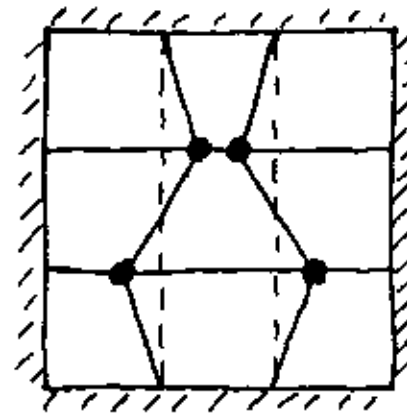


Ovdje možemo pratiti pogled odzgo (a ne iz perspektive)

### dua srednje moda



### najviši mod



### Napomena:

Funkcije  $\sin(k_x^{(n)} x)$  i  $\sin(k_y^{(p)} y)$  vrijede za svaku polarizaciju titranja. One daju iznos lokalne amplitude titranja neovisno o tome da li je ono longitudinalno ili transverzalan u odnosu prema nekoj susjed.

Za dovoljno istegnute opruge ( $a \gg a_0$ ) i male pomake ( $u \ll a$ ) povrtna je sila jednaka kod longitudinalnog i transverzalnog titranja (v. I. poglavlje).

U takvim uvjetima frekvencije dvodimenzionalnih modova  $\omega^{(np)}$  ne ovise o polarizaciji titranja.

To ćemo u buduću podrazumijevati.



## Properije na trodimenzionalnu strukturu

Ako imamo sustav od  $N \times P \times S$  jednakih čestica s oprugama u trodimenzionalnoj mreži onda pišemo

$(x_i, y_j, z_l)$  - koordinate ravnotežnog položaja neke čestice "ijl"

$$x_i = ia \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

$$y_j = ja \quad (j = 1, 2, \dots, P)$$

$$z_l = la \quad (l = 1, 2, \dots, S)$$

$u_{ijl}^{(nps)}$  - pomak čestice "ijl" iz položaja ravnoteže u modu (nps)

$$u_{ijl}^{(nps)}(t) = A_{ijl}^{(nps)} \cos(\omega^{(nps)} t)$$

U danome modu (nps) sve čestice titraju istom frekvencijom  $\omega^{(nps)}$  ali različitim amplitudama

$$A_{ijl}^{(nps)} = A^{(nps)} \sin(k_x^{(n)} x_i) \sin(k_y^{(p)} y_j) \sin(k_z^{(s)} z_l)$$

↑ amplituda čestice "ijl" u modu (nps)      ↑ amplituda moda (nps)

$$\omega^{(nps)} = \sqrt{\frac{4K}{m} \left[ \sin^2\left(\frac{k_x^{(n)} a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_y^{(p)} a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_z^{(s)} a}{2}\right) \right]}$$

## Trodimenzionalna tijela različiti oblika

Ako zamislimo čestice kao atome a sile među njima kao zamjenu za elastične opruge onda dobivamo trodimenzionalan kontinuum.

Budući da je svako tijelo ograničeno svojim dimenzijama u njemu mogu nastati titranja u modovima koji su karakteristični za to tijelo.

U prethodnim smo primjerima obradili samo najjednostavnija tijela. Oblik moda je bio sinusoidalan.

Kod tijela nepravilnih oblika modovi izgledaju sasvim različito. Bitno je imati na umu da je mod uvijek kolektivno titranje svih čestica u kojemu se ukupna kinetička energija pretvara u ukupnu potencijalnu energiju i obrnuto.

Bez obzira na to kako neobičan oblik moda može biti uvijek imamo mjesta gdje čestice uopće ne titraju (čvorovi) i mjesta gdje titraju velikim amplitudama (trbusi). Kod nepravilnih tijela i npriloviti modova ne moraju amplitude u svim trbusima biti jednake.

Za dano tijelo modovi ovise o rubnim uvjetima. Ako je promatrano tijelo učvršćeno na nekim mjestima za drugo puno masivnije tijelo (npr. podloga) onda se tu nalaze čvrsti krajevi a drugdje su slobodni krajevi.

## Pobudiveneje modova u dvije i tri dimenzije

Vrijede iste pravila kao i kod modova u jednoj dimenziji:

- 1) Ako u  $t=0$  odstranimo konfiguraciju nekog moda i pustimo sustav da titra, imamo slobodno titranje datog moda njegovom vlastitom frekvencijom.
- 2) Ako u  $t=0$  odstranimo neku superpoziciju dvaju ili više modova i pustimo sustav da titra, svaki mod titra svojom frekvencijom. Svaka čestica (točka u kontinuumu) titra superpozicijom frekvencija.
- 3) Ako imamo vanjsku pogonsku silu frekvencije  $\omega$  uspostavlja se nakon nekog vremena (određenog gušenjem) stacionarno stanje. Svi modovi (osim onih koje pogonska sila ne može pobuditi zbog simetrije sprege) titraju nametnutom frekvencijom  $\omega$  ali različitim amplitudama. Kada je pogonska frekvencija jednaka vlastitoj frekvenciji nekog moda, dolazi do rezonancije. Širina rezonancije ovisi o gušenju.

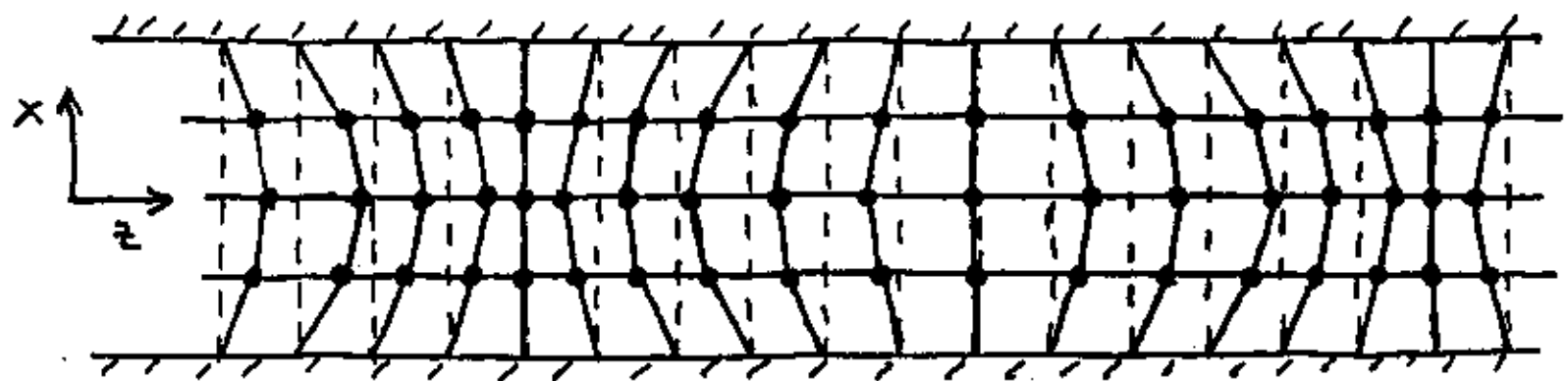
35. pokus:

neki dvodimenzionalni modovi

## 4.2. Mehanički valovod

U prethodnom odjeljku smo razmatrali sredstvo koje je sa svih strana ograničeno pa može titrati u modovima. Ako je sredstvo neograničeno barem duž jednog smjera onda se u njemu mogu širiti valovi.

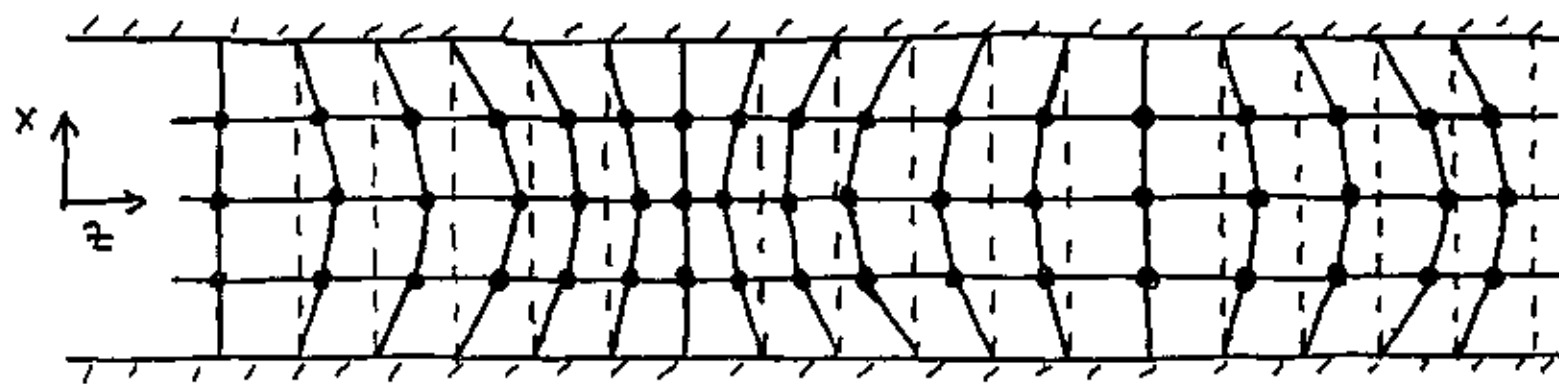
Razmotrimo kao primjer dvodimenzionalnu mrežu opruga s česticama



zgušćenje      razrjeđenje      zgušćenje

↑  
maksimalan otklon čestice iz položaja ravnoteže

U nešto kasnijem trenutku imamo stanje



zgušćenje      razrjeđenje

↑  
maksimalan otklon čestice iz položaja ravnoteže

U ovom primjeru čestice titraju transverzalno s obzirom na os  $x$  a longitudinalno s obzirom na os  $z$ .

Duž osi  $x$  sredstvo je ograničeno pa imamo mogućnost titranja u modovima. U gornjem primjeru imamo prvi mod, tj. pola valne duljine između krajeva.

Duž osi  $z$  imamo longitudinalni val, tj. čestice titraju s ucestojim faznim kašnjenjem.

$(x_i, z_i)$  - ravnotežni položaj čestice "i"

$$u_{ie}^{(n)}(t) = A \cos(k_x^{(n)} x_i) \sin(\omega t - k_z z_i)$$

Gledajući duž osi  $x$  možemo imati modove, tj.  $k_x^{(n)}$  poprima diskretne vrijednosti

$$k_x^{(n)} L_x = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

Gledajući duž osi  $z$  nema rubnih uvjeta pa  $k_z$  može poprimiti kontinuirano sve vrijednosti

$$0 < k_z < \frac{\pi}{a}$$

↑  
dugovalni slučaj  
( $k_z \ll 1$ )

↑  
cik-cak konfiguracija

Relacija disperzije je ista za modove i valove samo što umjesto diskretnih vrijednosti  $k_z^{(n)}$  za modove stavljamo kontinuiranu varijablu  $k_z$  za valove

$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{k_x^{(n)} a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_z a}{2}\right)}$$

Frekvenciju  $\omega$  određuje izvor titranja. Veličina  $k_x^{(n)}$  je određena širinom valovoda  $L_x$  i rednim brojem moda "n". Stoga se  $k_z$  prilagodi tako da bude zadovoljena disperzijska relacija. Tako dobijemo valnu duljinu vala ( $k_z = \frac{2\pi}{\lambda}$ ) koji se širi valovodom duž osi z.

### Proširenje na trodimenzionalan valovod

Neka valovod ima poprečni presjek  $L_x L_y$  a duž osi z je beskonačno dugačak.

Gledano u presjeku valovoda nalazimo dvodimenzionalne modove s diskretnim vrijednostima za  $k_x^{(n)}$  i  $k_y^{(p)}$  a duž osi z se širi val. Valni broj  $k_z$  poprima kontinuirane vrijednosti u ovisnosti o frekvenciji  $\omega$  koju nameće izvor titranja.

### 4.3. Ravni valovi

U trodimenzionalnom valovodu sve čestice u nekom poprečnom presjeku titraju u fazi (svojstvo modova). One čine jednu valnu frontu. Valne fronte su okomite na smjer širenja vala.

Zamislimo valovod sve većeg poprečnog presjeka, tj.  $L_x \rightarrow \infty$  i  $L_y \rightarrow \infty$ . Tako dolazimo do pojma idealiziranog neograničenog (otvorenog) sredstva.

Ako razmatramo samo najniži mod u poprečnom presjeku onda dobivamo

$$k_x^{(1)} L_x = \pi \quad \Rightarrow \quad k_x^{(1)} = \frac{\pi}{L_x} \xrightarrow{L_x \rightarrow \infty} 0$$

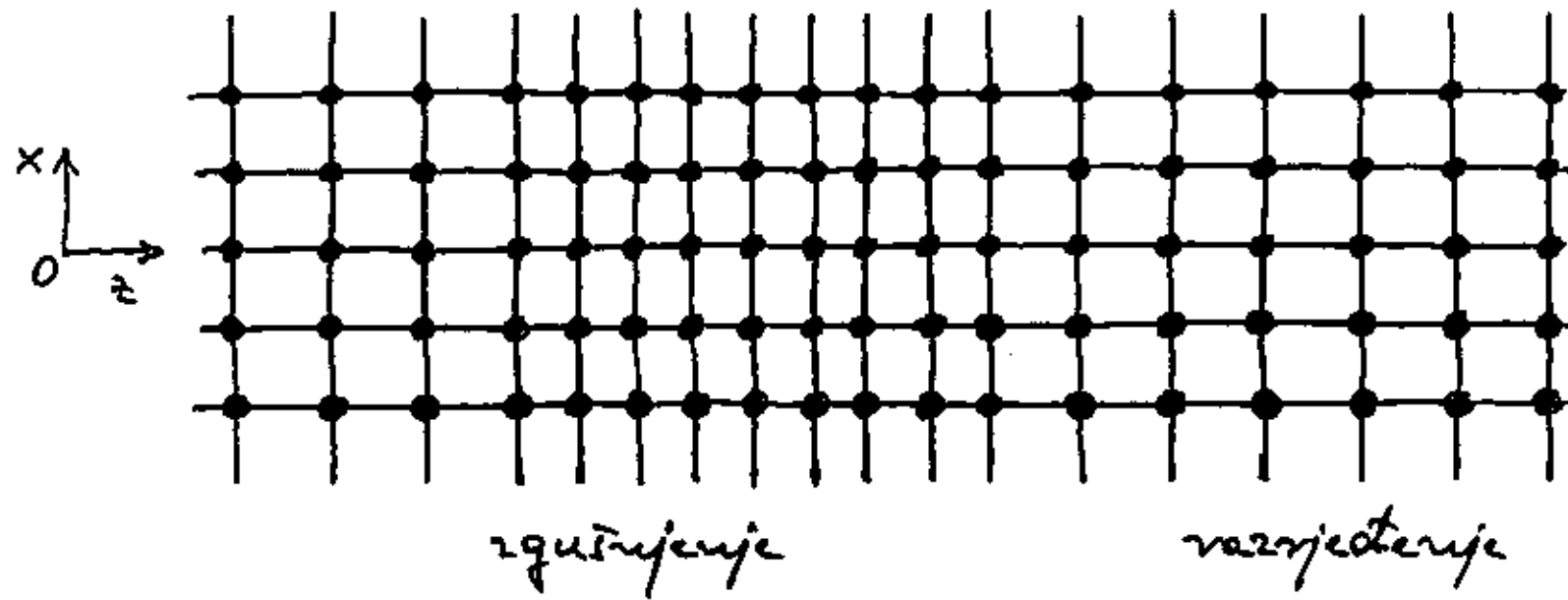
$$k_y^{(1)} L_y = \pi \quad \Rightarrow \quad k_y^{(1)} = \frac{\pi}{L_y} \xrightarrow{L_y \rightarrow \infty} 0$$

U nekom poprečnom presjeku sve čestice titraju jednakinom amplitudom

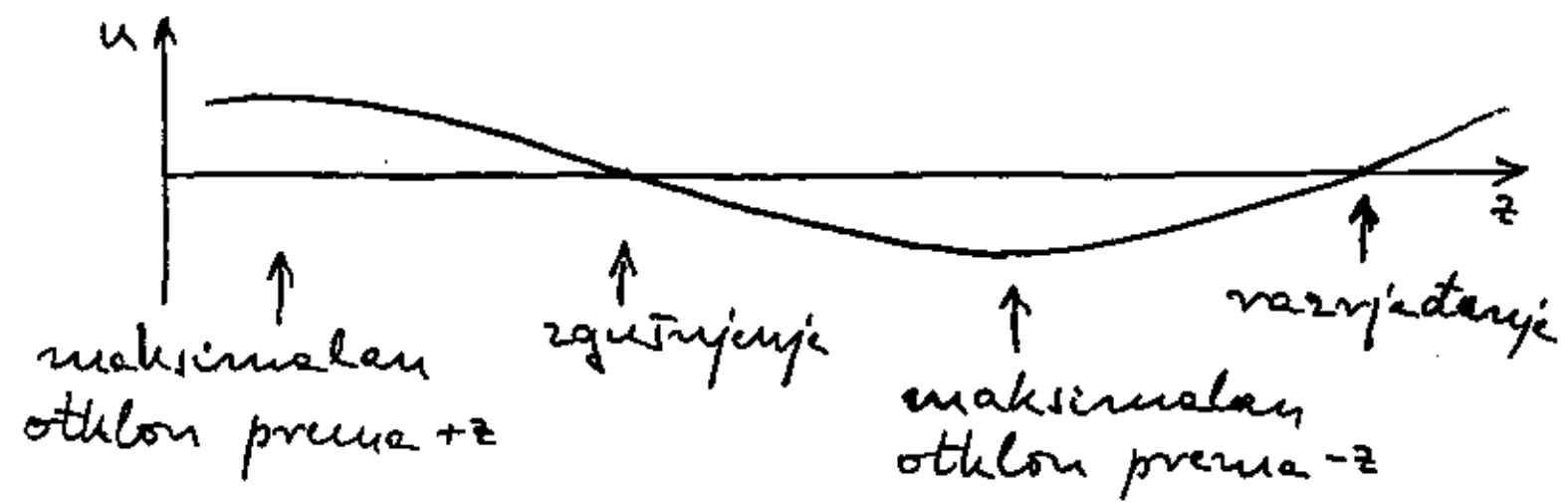
$$A \underbrace{\cos(k_x^{(n)} x)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\cos(k_y^{(p)} y)}_{\rightarrow 1} \rightarrow A$$

Stoga valne fronte postaju ravnine. Takve valove nazivamo ravnim valovima.

Ako prikazemo presjek kroz valno sredstvo upr. u ravni  $xz$ , onda su valne fronte projicirane na pravca okomite na smjer širenja vala.



Čestice titraju duž osi  $z$ . U danome trenutku njihovi otkloni od položaja ravnoteže slijede sinusoidalnu ovisnost



Zgušnjene nastaje zato što su se čestice s lijeve strane od mjesta zgušnjene pomakle prema  $+z$  ( $u > 0$ ) a čestice s desne strane prema  $-z$  ( $u < 0$ ).

Kod razrjedene je obrnuto. Zbog faznog kašnjenja među valnim frontama zgušnjene (razrjedene) se pomiče faznom brzinom duž osi  $z$ .

U prikazanom primjeru ravni valove imali smo koordinatni sustav  $Oxyz$ . U tome sustavu svaka čestica valnog sredstva ima neki trenutni otklon iz svog položaja ravnoteže. Umjesto označavanja položaja čestice s  $(x, y, z)$  zgodnije je označiti njen položaj vektorom  $\vec{r}$  koji ide od odabranog ishodišta  $O$  do čestice.

Valnu funkciju tada možemo pisati u obliku

$$u(\vec{r}, t) = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

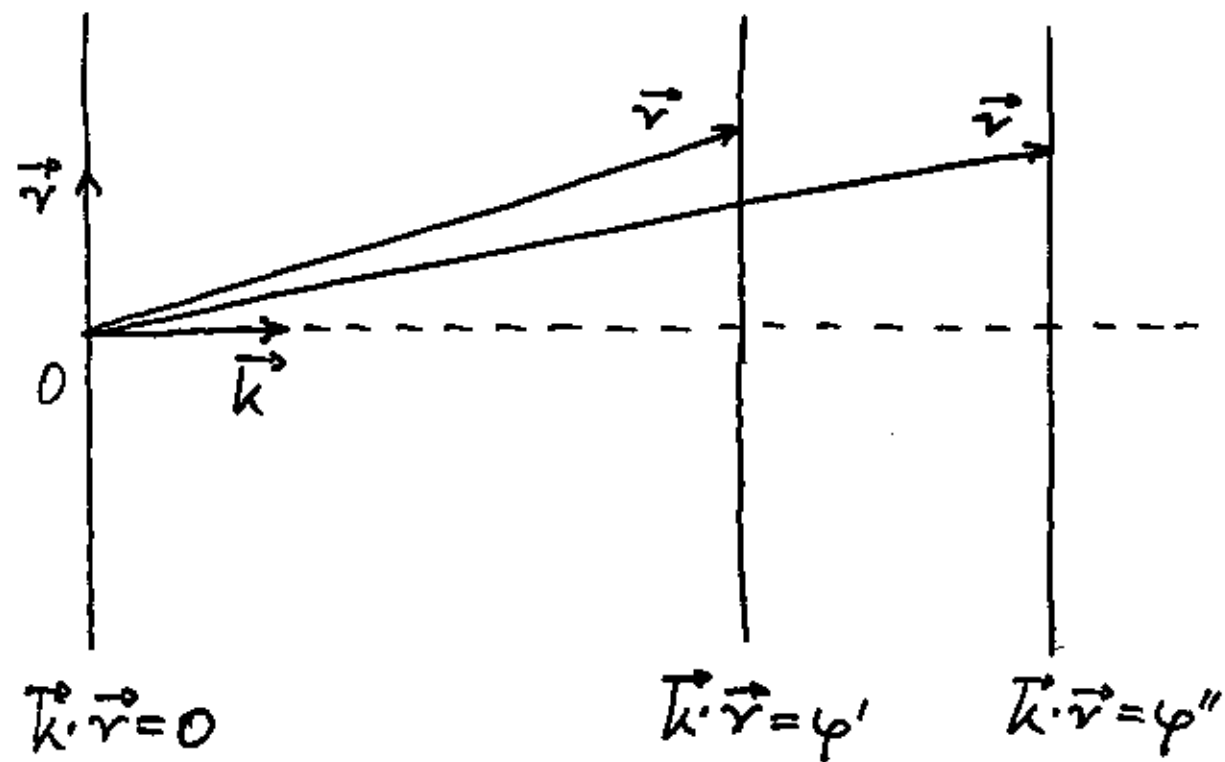
Ovom su funkcijom dani pomaci čestice na raznim položajima  $\vec{r}$  u raznim vremenskim trenucima  $t$ .

Vektor  $\vec{k}$  ima smjer širenja vala a po iznosu je jednak valnom broju  $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Naziva se valni vektor.

Za česticu u ishodištu imamo  $\vec{r} = 0$  pa je njeno titranje dano izrazom

$$u(t) = A \sin \omega t$$

No taj isti izraz vrijedi i za sve čestice u ravni koja prolazi ishodištem  $O$  a okomita je na valni vektor  $\vec{k}$  ( $\vec{k} \cdot \vec{v} = 0$ ).



Za bilo koju ravninu okomitu na  $\vec{k}$  vrijedi  $\vec{k} \cdot \vec{v} = kv \cos \theta = \text{konst.}$  jer je za danu ravninu projekcija vektora  $\vec{v}$  na  $\vec{k}$  (tj.  $v \cos \theta$ ) konstantna.

Ravnine okomite na valni vektor su valne fronte ravnog vala. U svim točkama valne fronte imaju istu fazu titranja

$$u(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$$

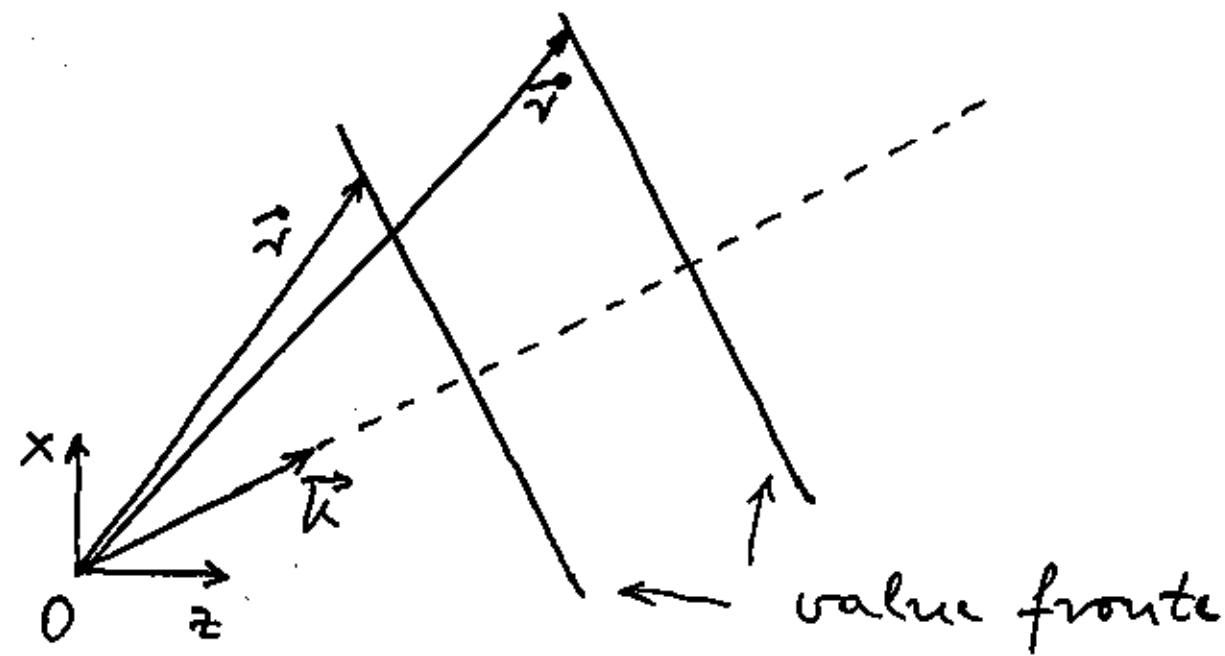
gdje je  $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{v}$  faza kašnjenja u odnosu na valnu frontu koja prolazi kroz ishodište.

Relativno fazno kašnjenje između dviju valnih fronti je  $\Delta\varphi = \varphi'' - \varphi'$ .

### Razni smjerovi širenja vala

Do sada smo uvijek uzimali da se val širi duž smjera osi  $z$ . Možemo reći i obrnuto, tj. da smo os  $z$  postavljali duž smjera širenja vala.

U općenitom slučaju valni vektor  $\vec{k}$  ne mora biti duž osi  $z$



Vektore  $\vec{k}$  i  $\vec{v}$  možemo pisati rastavljene po koordinatama pa je funkcija vala

$$\begin{aligned} u(\vec{v}, t) &= A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{v}) \\ &= A \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) \end{aligned}$$

## Ravni valovi u kontinuumu

Kao model otvorenog (neograničenog) valnog sredstva uzeli smo trodimenzionalnu mrežu opruga i čestica s masama. Ako razmatramo valove kod kojih su valne duljine mnogo veće od udaljenosti među česticama onda to sredstvo možemo tretirati kao elastično kontinuum u tri dimenzije.

Polazeći od disperzijske relacije za trodimenzionalni valovod

$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{k_x a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_y a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_z a}{2}\right)}$$

te zamisljajući da taj valovod postaje sve širi ( $L_x \rightarrow \infty$  i  $L_y \rightarrow \infty$ ) dobili smo  $k_x \rightarrow 0$  i  $k_y \rightarrow 0$ , tj. ravne valove.

U tom slučaju prva dva sinusna člana pod konjnom iščezavaju. Oni inače predstavljaju povratne sile na neku česticu od opruga duž smjera  $x$  i  $y$  no kada valne fronte nisu zakrivljene nego ravnine onda te povratne sile iščezavaju. Preostaje samo povratna sila od opruga duž osi  $z$ , tj. treći član pod konjnom.

U aproksimaciji kontinuumu ( $k_z a \ll 1$ ) dobivamo

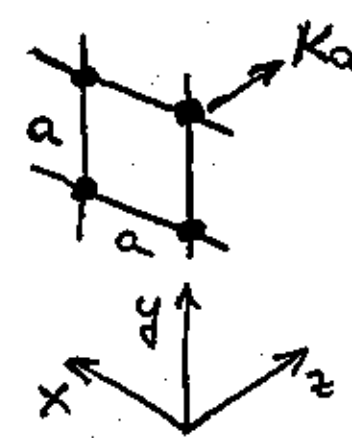
$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin\left(\frac{k_z a}{2}\right) \approx \sqrt{\frac{4K}{m}} \frac{k_z a}{2} = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}} k_z$$

Možemo uvesti veličine

$$\rho = \frac{m}{a^3} \quad \text{gustoća mase u kontinuumu}$$

$$Y = \frac{K}{a} = \frac{Ka}{a^2} \quad \text{Youngov modul elastičnosti dobijenog kontinuumu}$$

Na modelu trodimenzionalne mreže opruga i čestica  $Y$  možemo interpretirati kao silu duž osi  $z$  koja djeluje na jedinicu površine u  $xy$  ravni a dolazi od susjedne ravnine



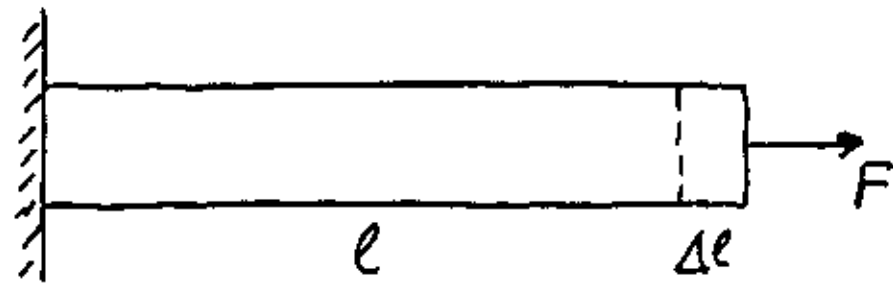
sila kojom opruga duž osi  $z$  djeluje na česticu

$$\frac{Ka}{a^2} = \frac{\text{sila}}{\text{površina}}$$

### Napomena:

Na svaku česticu djeluje sila  $Ka$ . Međutim, svaka čestica je u vrhu četiriju kvadrata pa možemo reći da pojedinačne kvadrate pripada sila  $\frac{1}{4}Ka$ . Zbog četiri čestice u kvadratu opet dobivamo silu  $Ka$  po površini  $a^2$ .

Youngov modul elastičnosti dobivamo i makroskopskim razmatranjem.



Pod djelovanjem sile  $F$  šipka od elastičnog materijala rastegne se za  $\Delta l$ . Stoga se šipka ponaša kao neka opruga konstante  $K$

$$F = K \Delta l$$

Podijelimo lijevu i desnu stranu  $s$  poprečnim presjekom  $S$  elastične šipke

$$\frac{F}{S} = \frac{Kl}{S} \frac{\Delta l}{l} = Y \frac{\Delta l}{l}$$

$\frac{F}{S}$  naprezanje (engl. stress)

$\frac{\Delta l}{l}$  izvlačenje (engl. strain)  
(ili deformacija)

Youngov modul elastičnosti ima dimenziju  $\frac{\text{sila}}{\text{površina}}$ , tj. kao tlak. Tipične vrijednosti:

aluminij  $Y = 6 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$

čelik  $Y = 20 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$

Relacija disperzije za ravan val u otvorenom kontinuumu glasi konačno

$$\omega = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} k$$

Uvjetno  $k_z$  pisali smo  $k$  jer se val otklanja može širiti u bilo kojem smjeru u otvorenom kontinuumu.

Za faznu brzinu ravnog vala dobivamo

$$v_g = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

Npr. za val u aluminiju dobivamo

$$v_g = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}}{2,7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}}} = 4,7 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

Budući da je disperzijska relacija linearna dobivamo za grupnu brzinu

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = v_g$$

Impedancija kontinuuma za širenje ravnih valova iznosi

$$Z = \sqrt{Y\rho}$$



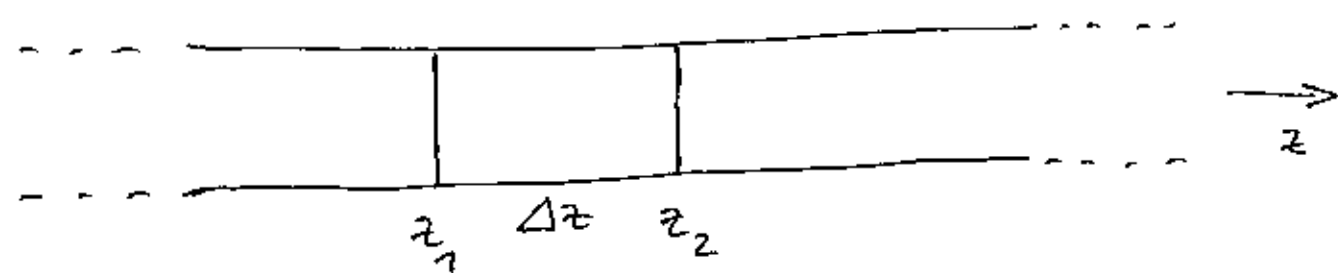
Za širenje vala u vpr. aluminijski dobivamo

$$Z = \sqrt{6 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2} \cdot 2,7 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}} \approx 1,3 \cdot 10^7 \text{ kgm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (\text{ili } \text{Nm}^{-3} \text{s})$$

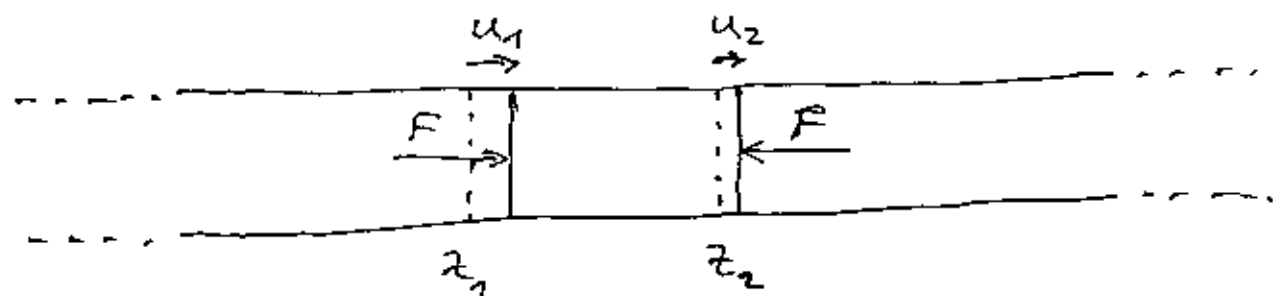
Aluminij ima jako veliku impedenciju za val u kojemu longitudinalno titraju njegove sastavne čestice (atomi). I ostali metali imaju impedencije istoga reda veličine.

### Val pomaka i val tlaka u kontinuumu

Razmotrimo jedan segment šipke od nekog elastičnog materijala. Dok nema vala imamo ravnotežno stanje



Kada se uspostavi val longitudinalnih pomaka  $u(z,t) = A \sin(\omega t - kz)$ , onda stanje u nekome trenutku može izgledati ovako:



Zbog  $u_1 > u_2$  (primjer na slici) prvotna duljina segmenta  $\Delta z$  smanjila se za razliku  $u_1 - u_2$ . Kada bismo to stanje za trenutak razmatrali kao elastičnu deformaciju, mogli bismo pisati

$$\frac{F}{S} = Y \frac{u_1 - u_2}{\Delta z}$$

gdje sile  $F$  djeluju okomito na poprečni presjek veličine  $S$ , te nastaje stlačivanje (kompresija) segmenta.

Za  $\Delta z$  koji je mnogo manji od valne duljine uspostavljenog vala ( $\Delta z$  uvijek možemo odabrati po volji malenim), možemo primijeniti razvoj u red

$$\begin{aligned} u_2 = u(z_2, t) &= u(z_1 + \Delta z, t) \approx u(z_1, t) + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \\ &= u_1 + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \end{aligned}$$

Prema tome, elastična deformacija se svodi na

$$p = \frac{F}{S} = Y \frac{u_1 - u_2}{\Delta z} = Y \frac{-\frac{\partial u}{\partial z} \Delta z}{\Delta z} = -Y \frac{\partial u}{\partial z}$$

gdje smo uvažili činjenicu da se u stlačenom segmentu pojavljuje tlak  $p$  koji je po iznosu jednak  $\frac{F}{S}$ .

Predznak "minus" znači da na mjestu gdje se pomak smanjuje idući duž pozitivnog smjera osi  $z$  (tj. na mjestu gdje je  $\frac{\partial u}{\partial z} < 0$ ), imamo zgušnjavanje čestica pa je tlak pozitivan ( $p > 0$ ). Na mjestu gdje pomak raste idući prema pozitivnom smjeru osi  $z$  ( $\frac{\partial u}{\partial z} > 0$ ), imamo razrjeđivanje čestica, pa taj tlak smatramo negativnim ( $p < 0$ ).

Ako, dakle, imamo u kontinuumu longitudinalni val pomaka čestica

$$u(z, t) = A \sin(\omega t - kz)$$

uženo imamo i val tlaka

$$p(z, t) = -Y \frac{\partial u}{\partial z} = YkA \cos(\omega t - kz)$$

Maksimalni iznos (amplitude) tlaka iznosi  $P = YkA$ . Očito,  $P$  ovisi o amplitudi pomaka  $A$ , ali i o modulu elastičnosti  $Y$ , te o valnoj duljini ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ) dotičnog vala.

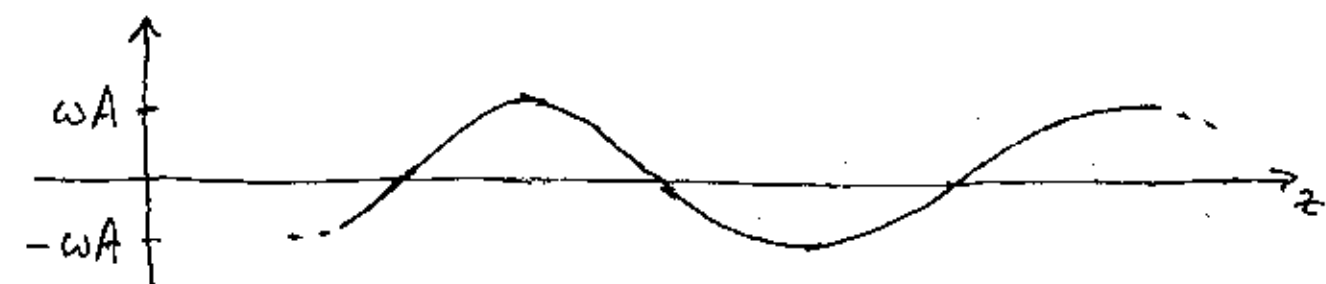
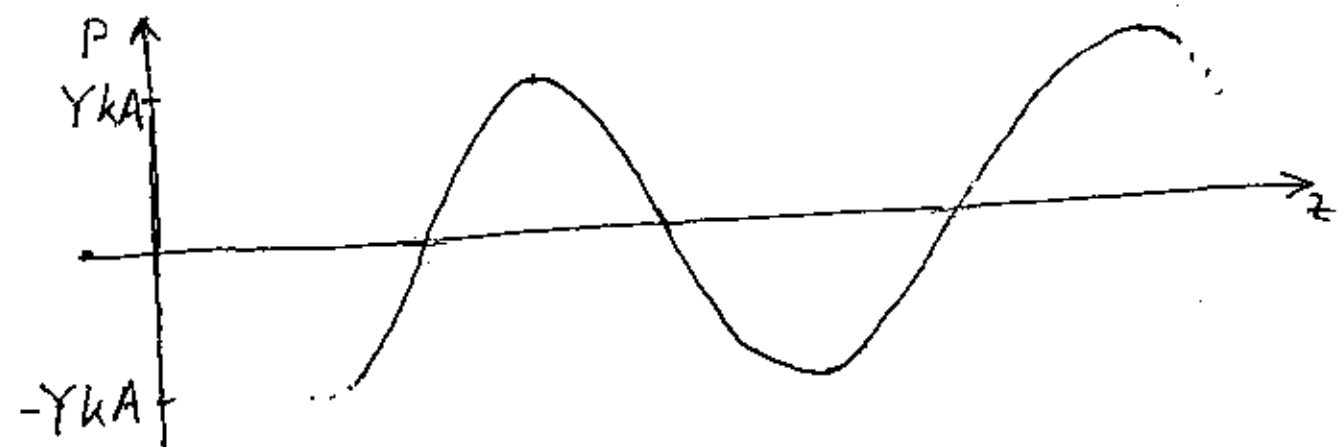
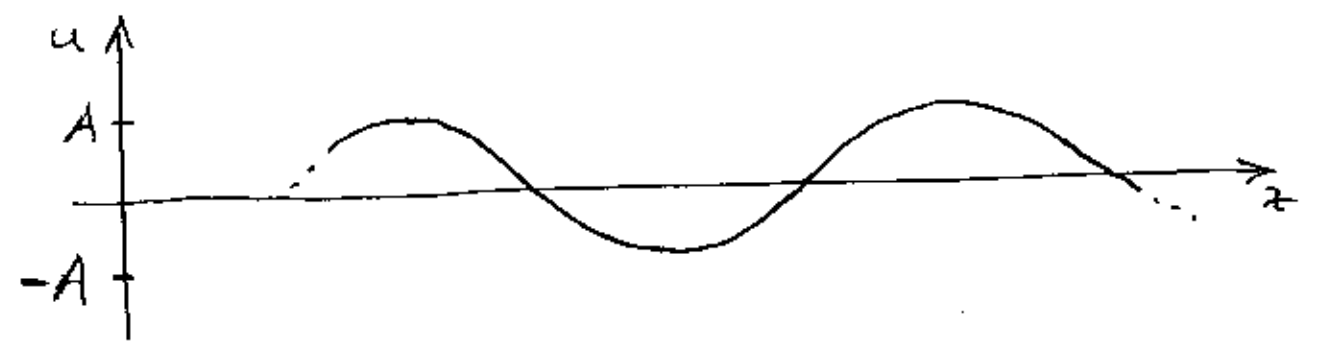
Val tlaka  $p(z, t)$  nije u fazi s valom pomaka  $u(z, t)$ . Međutim, možemo razmotriti i val brzine čestice

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kz)$$

Napomena:

Ne smijemo poljubiti brzinu čestice s faznom brzinom vala  $v_f = \frac{\omega}{k}$ . Fazna brzina vala se odnosi na "putovanje" neke određene faze duž osi  $z$ . Ona je konstantna tijekom vremena, čestice pak titraju oko ravnotežnog položaja, pa im se i brzina u vremenu mijenja s time da je maksimalna brzina (amplitude brzine) jednaka  $\omega A$ .

Radi zornosti prikazimo grafički sve tri vala duž osi  $z$  u nekom trenutku  $t$



Svaki od ova tri vala može nam poslužiti za ekvivalentan opis jednog te istog fizikalnog procesa (longitudinalnog vala u kontinuumu).

Uočimo da su val tlaka i val brzine čestice uvijek u fazi, te pomaknuti za četvrt periode u odnosu prema valu pomaka čestica.

Iz prethodnih jednadžbi slijedi

$$p(z,t) = \frac{Yk}{\omega} \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

Uzimajući u obzir disperzijsku relaciju  $\omega = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} k$ , dobivamo

$$p(z,t) = \sqrt{Y\rho} \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = Z \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

Dakle, kod longitudinalnog ravnog vala u trodimenzionalnom kontinuumu, impedancija povezuje tlak s brzinom čestice na istome mjestu i u istome trenutku.

### Intenzitet ravnog vala

Kod ravnog vala definiše se njegov intenzitet I kao snaga (tj. energija u jedinici vremena) koja se prenosi kroz

jediničnu površinu okomitu na smjer širenja vala. Tlak  $p = \frac{F}{S}$  upravo daje silu na jedinicu poprečne površine, pa imamo za intenzitet

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T p(z,t) \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T Z \left( \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \right)^2 dt =$$

$$= \omega^2 A^2 Z \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kz) dt}_{\approx \frac{1}{2} \text{ (neovisno o } z \text{!)}}$$

$$I = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 Z$$

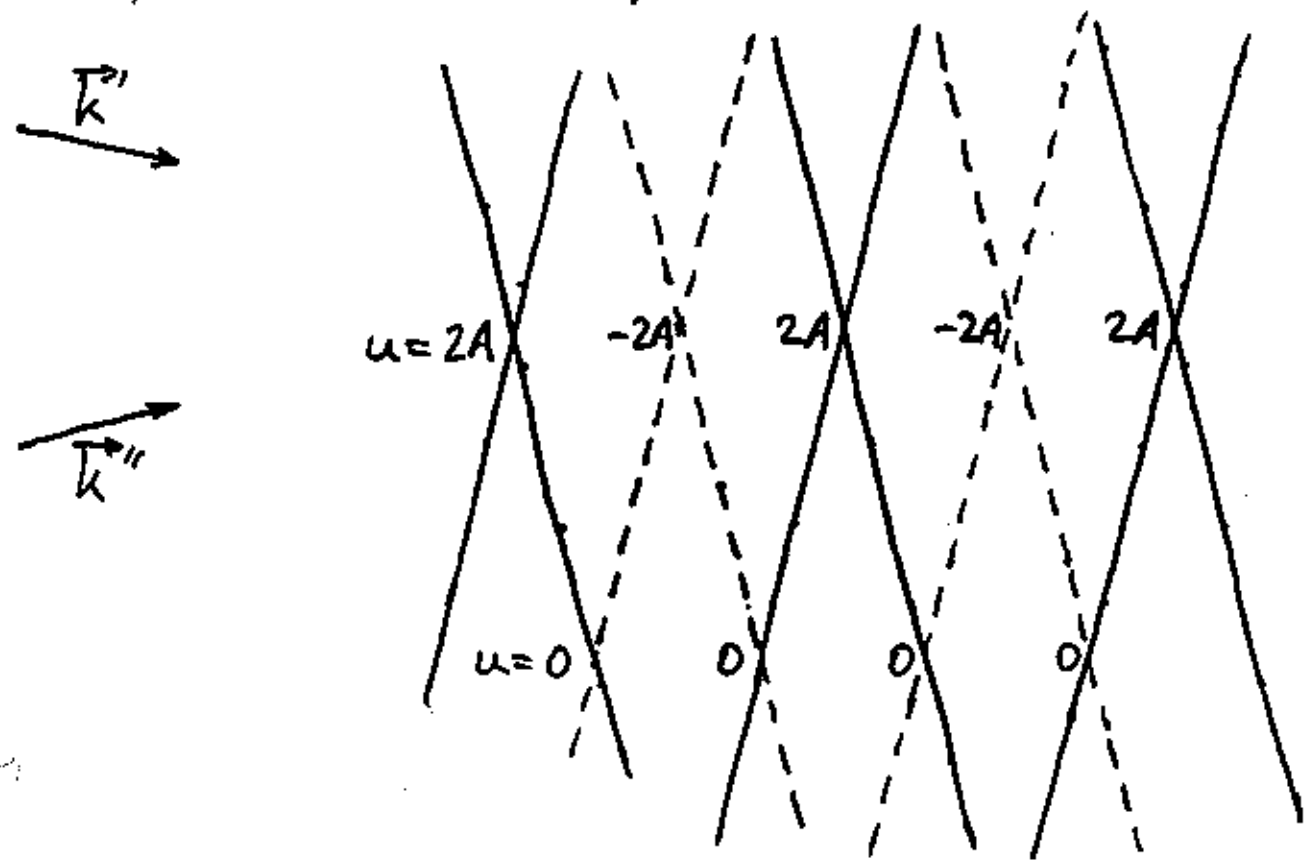
### Napomena:

Izraz koji smo dobili za intenzitet ravnog vala u kontinuumu identičan je izrazu za snagu koje se prenosi u transversalnom valu u jednodimenzionalnom kontinuumu (elastična nit). Međutim, impedancija  $Z$  u trodimenzionalnom kontinuumu ima drugu dimenziju (mjeri se u  $\text{Nm}^{-3}\text{s}$ ) od impedancije  $Z$  u jednodimenzionalnom sredstvu (mjeri se u  $\text{Nm}^{-1}\text{s}$ ).

#### 4.4. Interferencija valova

Interferencija valova nastaje kada se preklapaju dva vala koja se šire u različitim smjerovima. Označimo pripadne valne vektore s  $\vec{k}'$  i  $\vec{k}''$ .

Prikažimo stanje valova u nekom trenutku pomoću valnih fronti za pozitivnu amplitudu ( $u=A$ , puna crta) i negativnu amplitudu ( $u=-A$ , crtkana linija)



Interferencija (mješavine) valova nastaje u svim točkama prostora. Posebno se ističu mjesta na kojima se susreću dvije pozitivne amplitude (specište punih crta) gdje je ukupna amplituda  $A+A=2A$ . Isto tako nalazimo mjesta na kojima je ukupna negativna amplituda  $-A-A=-2A$  (specište dviju crtkanih linija).

Također nalazimo i mjesta gdje se susreću pozitivna i negativna amplituda  $A-A=0$  (specište pune i crtkane linije), tj. nema otklona čestice iz položaja ravnoteže.

Da bi interferencijska slika bila stabilna nužno je da oba vala imaju istu frekvenciju  $\omega$ . Tada su i faze brine obaju valova jednake. Nakon polovine periode titranja ( $\frac{T}{2}$ ) imamo pozitivnu amplitudu ( $A+A=2A$ ) na mjestima gdje su prije bile negativne amplitude ( $-A-A=-2A$ ), itd. Drugim riječima, duž tog smjera opaža se širenje vala amplitude  $2A$ .

Paralelno s linijama vala imamo linije duž kojih je trajno  $u=0$ , tj. nema titranja čestica.

Valna fronta ravnog vala je beskonačna ravnina (u idealiziranom slučaju) pa ima mogućnost presjecista s valnim frontama drugog vala. Stoga nastaju paralelni nizovi vala amplitude  $2A$  (konstruktivna interferencija) i nizovi gdje se titranje poništava  $u=0$  (destruktivna interferencija).

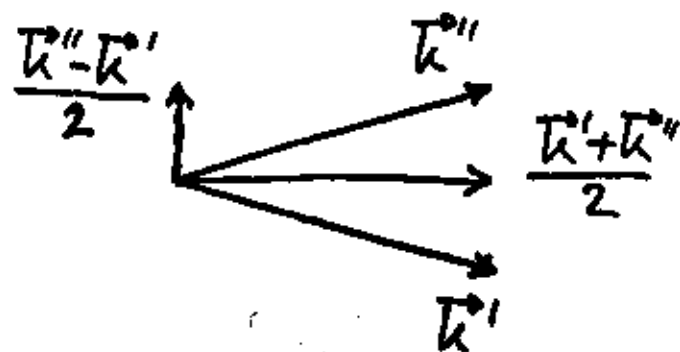
Operanu sliku interferencije dvaju valova možemo dobiti i matematičkim zbrajanjem

$$u = A \sin(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r}) + A \sin(\omega t - \vec{k}'' \cdot \vec{r})$$

Ishkoristimo trigonometrijsku relaciju

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$u = 2A \cos\left(\frac{\vec{k}'' - \vec{k}'}{2} \cdot \vec{r}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\vec{k}' + \vec{k}''}{2} \cdot \vec{r}\right)$$



Dakle, interferencija dvaju ravni valova ekvivalentna je valu duž smjera  $\frac{\vec{k}' + \vec{k}''}{2}$  te modu duž okomitog smjera  $\frac{\vec{k}'' - \vec{k}'}{2}$ .

To se još jednostavnije vidi ako postavimo npr. os z duž vektora  $\frac{\vec{k}' + \vec{k}''}{2}$  a os x duž  $\frac{\vec{k}'' - \vec{k}'}{2}$ . Tada je zbroj valova

$$u = 2A \cos(k_x x) \sin(\omega t - k_z z)$$

gdje smo uveli oznake  $k_x = \left|\frac{\vec{k}'' - \vec{k}'}{2}\right|$  i  $k_z = \left|\frac{\vec{k}' + \vec{k}''}{2}\right|$ .

Treba uočiti da veličine  $k_x$  i  $k_z$  ovise o kutu između  $\vec{k}'$  i  $\vec{k}''$ , tj. o kutu između smjerova širenja dvaju ravni valova.

Ako se kut između  $\vec{k}'$  i  $\vec{k}''$  smanji, tj. dva vala postanu gotovo paralelna, onda  $k_x = \left|\frac{\vec{k}'' - \vec{k}'}{2}\right| \rightarrow 0$ . To znači da valna duljina duž osi x raste ( $k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$ ,  $\lambda_x \rightarrow \infty$ ). U granicnom slučaju nastaje jedan ravni val.

Ako povećamo kut između  $\vec{k}'$  i  $\vec{k}''$  onda naraste  $k_x$ , odnosno smanji se  $\lambda_x$ . To znači da su izmjerena trbuha i čvorova u modu duž osi x gušće.

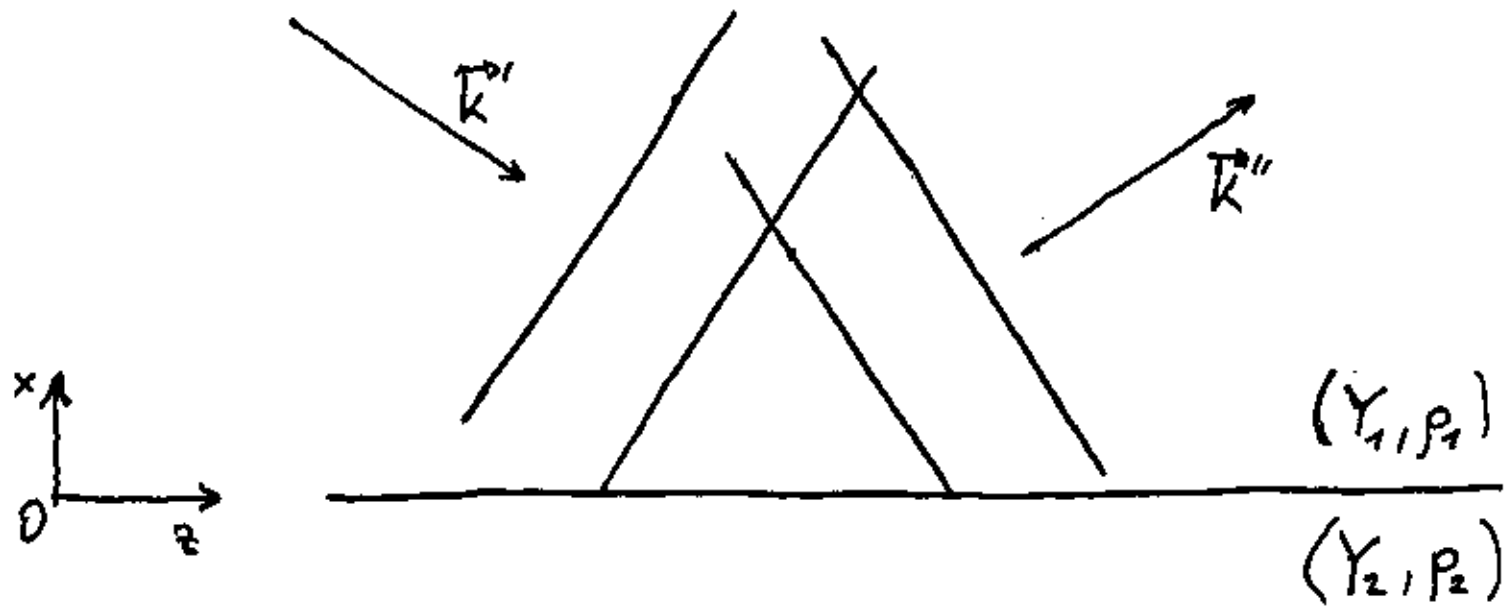
### Napomena:

Iznosi valnih vektora  $\vec{k}'$  i  $\vec{k}''$  su jednaki jer se oba vala šire u istome sredstvu (dani  $\gamma$  i  $\rho$ ) a i frekvencija im je ista.

Prema disperzijskoj relaciji  $\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} k$  imaju isti iznos valnog broja  $k$  za oba vala. Jedino su smjerovi  $\vec{k}'$  i  $\vec{k}''$  različiti.

#### 4.5. Refleksija i transmisija ravnih valova

Neka se ravan val amplitude  $A$  i frekvencije  $\omega$  širi u jednom sredstvu i nailazi na graničnu plohu s drugim valnim sredstvom



Ako se impedancije dvaju sredstava ( $Z_1 = \sqrt{Y_1 \rho_1}$  i  $Z_2 = \sqrt{Y_2 \rho_2}$ ) međusobno razlikuju onda dolazi do djelomične refleksije i transmisije vala.

Razmotrimo najprije reflektirani val. Interesna nam sujev valnog vektora  $k''$  ako je poznat  $k'$  za upadni val.

Valna funkcija upadnog vala glasi:

$$u_u = A_u \sin(\omega t - k' \cdot \vec{r}) = A_u \sin(\omega t - k'_x x - k'_z z)$$

jer smo uzeli da je  $k''$  u ravni  $xz$ .

Iznosi  $k'_x$  i  $k'_z$  predstavljaju fazna kašnjenja u točkama duž osi  $x$  i  $z$ . Npr. uzmemo dvije točke duž osi  $z$  udaljene za  $\Delta z$  duž granice dvaju sredstava. Titranje upadnog vala ima faznu razliku  $k'_z \Delta z$  između tih dviju točaka.

Valna funkcija reflektiranog vala glasi općenito

$$u_r = A_r \sin(\omega t - k'' \cdot \vec{r}) = A_r \sin(\omega t - k''_x x - k''_y y - k''_z z)$$

Relativni fazni odnos titranja upadnog i reflektiranog vala mora biti isti u svim točkama na graničnoj plohi.

#### Napomena:

Prisjetimo se jednodimenzionalnog slučaja. Ako je impedancija drugog sredstva praktički beskonačna (čvrst kraj) reflektirani val ima suprotan predznak ( $A_r = -A_u$ ) od upadnog. To je isto kao da kažemo da je pomaknut u fazi za  $\pi$  prema upadnome valu.

Kod refleksije na slobodnome kraju nema faze razlike između reflektiranog i upadnog vala ( $A_r = A_u$ ).

U općenitom slučaju odnos impedancija dvaju sredstava  $Z_1$  i  $Z_2$  određuje nekakvu faznu razliku između upadnog i reflektiranog vala.

Granična ploha je u danome primjeru u ravni  $yz$ . Ako na njoj uzmemo dvije točke duž osi  $y$  udaljene za neki iznos  $\Delta y$  nalazimo istu fazu titranja za upadni val, tj.  $k'_y \Delta y = 0$  jer smo pretpostavili da je  $\vec{k}'$  u ravni  $xz$  pa je  $k'_y = 0$ .

Stoga ni reflektirani val ne može imati promjenu faze u točkama na graničnoj plohi duž osi  $y$ , tj. mora biti  $k''_y \Delta y = 0$  za bilo koji  $\Delta y$  a to znači  $k''_y = 0$ . Drugim riječima, valni vektor  $\vec{k}''$  mora također ležati u ravni  $xz$ .

Preostaju dakle faze različite između točaka na graničnoj plohi duž osi  $z$ . Da se relativna faza odnos upadnog i reflektiranog vala ne bi mijenjao od točke do točke na graničnoj plohi moramo imati

$$k'_z \Delta z = k''_z \Delta z$$

tj. koliko se promijeni faza titranja upadnog vala između dviju točaka udaljenih za  $\Delta z$  toliko se mora promijeniti i faza reflektiranog vala između istih točaka.

Iz ovog uvjeta slijedi

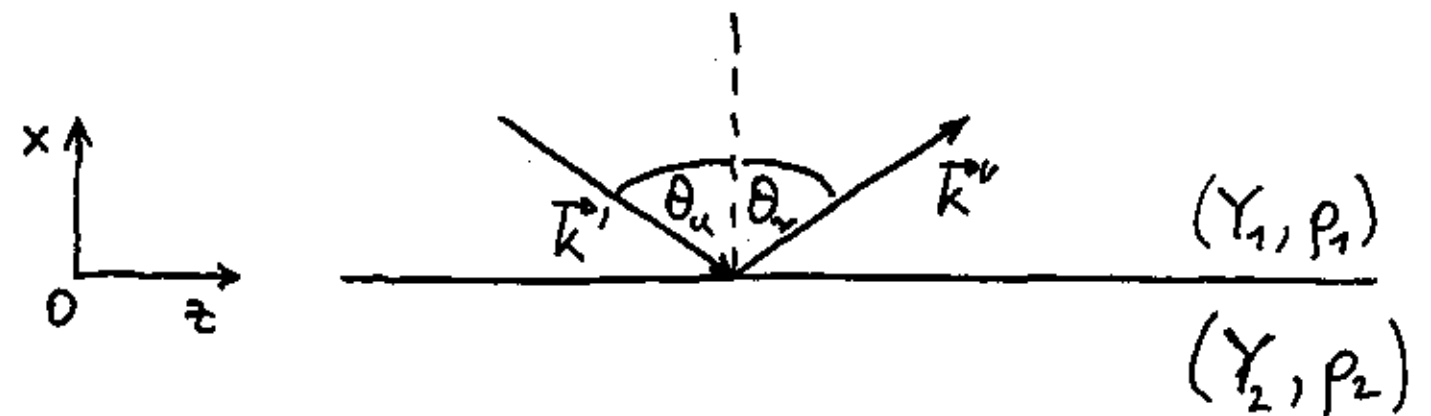
$$k'_z = k''_z$$

Budući da se upadni i reflektirani val šire u istome sredstvu  $(Y_1, \rho_1)$  te imaju iste frekvencije, iznosi valnih vektora moraju biti isti, tj.  $k' = k''$ . Uzimajući u obzir i prethodni uvjet ( $k'_z = k''_z$ ) nalazimo

$$k'_x = -k''_x$$

Predznak minus označava da se upadni i reflektirani val šire duž suprotnih smjerova osi  $x$ .

Ukupni rezultat možemo prikazati vektorski



Ako uvedemo kut  $\theta$  između okonice na graničnu plohu i valnog vektora  $\vec{k}$  (smjer širenja vala) dobivamo

$$\boxed{\theta_u = \theta_r} \quad \text{zakon refleksije}$$

Upadni kut jednak je kutu refleksije.

## Napomena:

Upadni i reflektirani val zadovoljavaju uvjete za interferenciju valova jer imaju istu frekvenciju, šire se u istome sredstvu ali u različitim smjerovima ( $k^0$  i  $k^0$  tvore neki kut). Stoga njihova superpozicija u svim točkama prvog valnog sredstva ( $\gamma_1, \rho_1$ ) stvara interferentnu sliku. To znači da duž osi  $z$  nalazimo pruge putujućeg vala a duž osi  $x$  imamo trbuhe i zvorove moda (v. prethodni odjeljak 4.4.).

Možemo sada razmotriti transmitirani val, tj. val koji se širi u drugome sredstvu ( $\gamma_2, \rho_2$ ). Označimo s  $k^0$  valni vektor transmitiranog vala. Transmitirani val ima istu frekvenciju kao i upadni ali zbog disperzijske relacije

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\rho_2}} k^0 \text{ čiji } k^0 \text{ ovisi o } \sqrt{\frac{\gamma_2}{\rho_2}} \text{ i može biti}$$

različit od  $k^0$  za upadni val.

Međutim, u svakoj točki na granici dvaju sredstava imamo neki relativan odnos faze titranja upadnog, reflektiranog i transmitiranog vala. Taj relativan odnos ovisi o odnosu impedancija  $Z_1$  i  $Z_2$  i stoga je isti u svim točkama na granici sredstava (nema razloga zašto bi se točke razlikovale).

Budući da za upadni val nema razlike faza između dviju točaka duž osi  $y$  na granici dvaju sredstava ( $k_y^0 \Delta y = 0 \Rightarrow k_y^0 = 0$ ) onda isto mora vrijediti i za transmitirani val ( $k_y^0 \Delta y = 0 \Rightarrow k_y^0 = 0$ ). To znači da i  $k^0$  leži u ravni  $xz$  kao upadni  $k^0$  i reflektirani  $k^0$ .

Općenito možemo reći da za definiranim graničnu plohu dvaju sredstava i valni vektor upadnog vala  $k^0$  možemo položiti ravninu okomitu na graničnu plohu tako da u njoj leži  $k^0$ . Valni vektori  $k^0$  i  $k^0$  leže u toj istoj ravni.

Između dviju točaka duž osi  $z$  na graničnoj plohi upadni val ima razliku faze  $k_z^0 \Delta z$ . I transmitirani val mora imati istu razliku faze između tih točaka

$$k_z^0 \Delta z = k_z^0 \Delta z$$

tako da relativan fazni odnos upadnog i transmitiranog vala ostane isti u obje točke na graničnoj plohi.

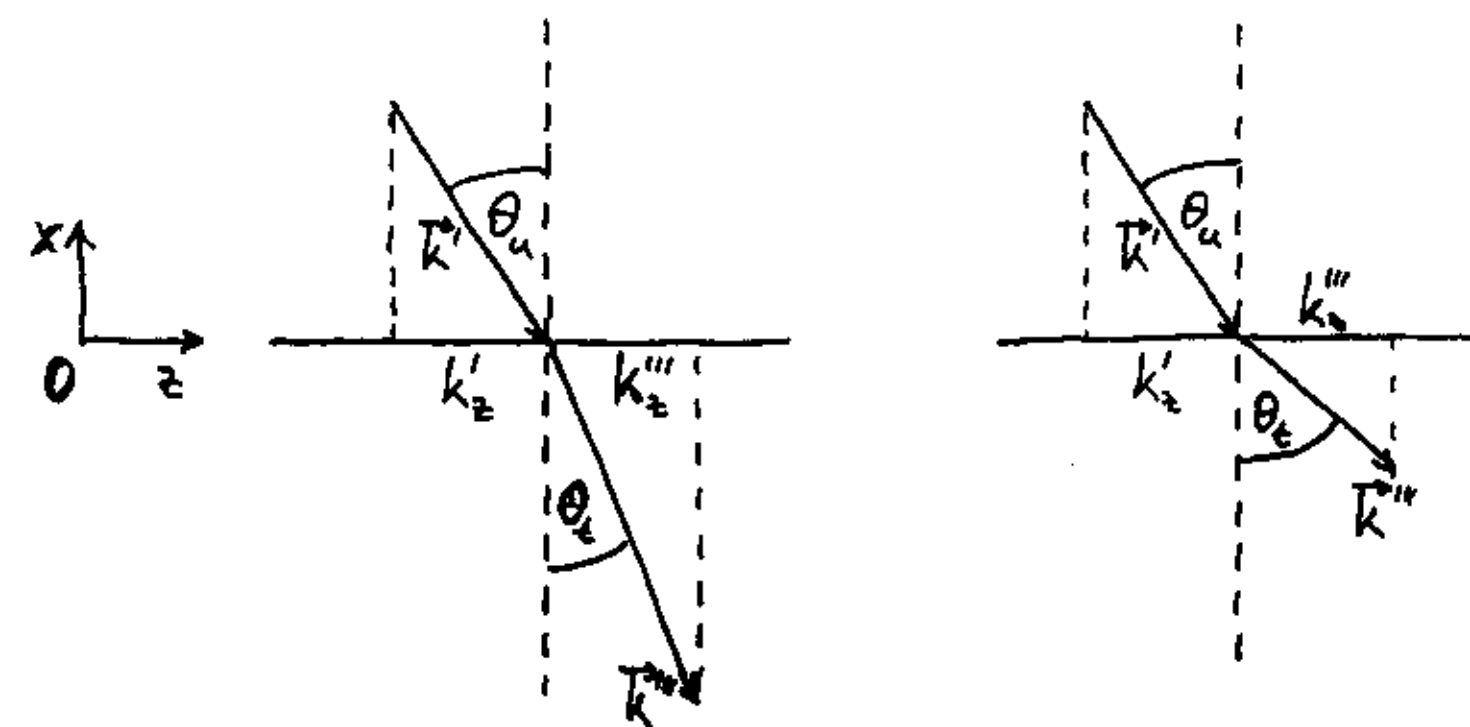
Iz ovog uvjeta slijedi

$$k_z^0 = k_z^0$$

tj. isto kao kod reflektiranog vala.



Međutim, ako se iznos  $k'''$  razlikuje od  $k'$  možemo imati sljedeće slučajeve:



Ako je  $k''' > k'$  onda je  $\theta_t < \theta_u$ , tj. transmitirani val se lomi prema okonici na graničnu plohu.

No ako je  $k''' < k'$  dobivamo  $\theta_t > \theta_u$ , tj. nastaje lom od okonice.

Općenito za upadni val imamo

$$\sin \theta_u = \frac{k_z}{k'}$$

a za transmitirani val

$$\sin \theta_t = \frac{k_z}{k'''}$$

Uzimajući u obzir da je  $k'_z = k'''_z$  dobivamo

$$\frac{\sin \theta_u}{\sin \theta_t} = \frac{k'''}{k'}$$

Budući da upadni i transmitirani val imaju istu frekvenciju relacije disperzije daju jednakost

$$\omega = \sqrt{\frac{Y_1}{\rho_1}} k' = \sqrt{\frac{Y_2}{\rho_2}} k'''$$

Odnos upadnog kuta  $\theta_u$  i kuta  $\theta_t$  ovisi samo o svojstvima dvaju sredstava

$$\frac{\sin \theta_u}{\sin \theta_t} = \frac{\sqrt{\frac{Y_1}{\rho_1}}}{\sqrt{\frac{Y_2}{\rho_2}}}$$

Ova relacija predstavlja zakon loma. Obično je pišemo pomoću brzina vala  $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$  (u kontinuumu su faza i grupa brzina jednake  $v_f = v_g = v$ )

$$\boxed{\frac{\sin \theta_u}{\sin \theta_t} = \frac{v_2}{v_1}}$$

zakon loma

Omjer sinusa kutova jednak je omjeru brzina.

## Pojava totalne refleksije

U slučaju kada je  $v_1 < v_2$ , tj. kada val upada iz sredstva u kojemu ima manju brzinu i djelomično se transmitira u sredstvo u kojemu mu je brzina veća, dobivamo prema zakonu loma  $\sin \theta_u < \sin \theta_t$ , odnosno  $\theta_u < \theta_t$ , tj. val se lomi od okomice na graničnu plohu.

Zamislimo da upadni val idjemo pod sve većim kutom  $\theta_u$ . Tada se i  $\theta_t$  povećava. Dolazimo do kritičnog upadnog kuta  $\theta_{uc}$  za koji je  $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ . Za veći upadni kut  $\theta_u > \theta_{uc}$  nema transmitiranog vala u drugome sredstvu. Postoji samo reflektirani val u prvome sredstvu. Ova se pojava naziva totalna refleksija.

### Napomena:

Kod nastupe totalne refleksije ne događa se "skok" u intenzitetima valova. Naime, kada  $\theta_u$  raste ( $\theta_u \rightarrow \theta_{uc}$ ) kontinuirano se smanjuje intenzitet transmitiranog vala a raste intenzitet reflektiranog vala.

## Koeficijenti refleksije i transmisije

Kod razmatranja valova u jednoj dimenziji (3. poglavlje) mogli smo tretirati pomak "u" i njegovu amplitudu "A" kao algebarske veličine i utvrditi omjer  $R = \frac{A_r}{A_u}$ . Međutim, kod ravnog vala koji upada na graničnu plohu dvaju sredstava pod kutom  $\theta_u \neq 0$ , moramo razmatrati pomak čestica kao vektor  $\vec{u}$  (amplituda  $\vec{A}$ ) koji ima različite smjerove za upadni, reflektirani i transmitirani val. Kod longitudinalnih valova, koje ovdje razmatramo, amplitude  $\vec{A}_u$ ,  $\vec{A}_r$  i  $\vec{A}_t$  imaju smjerove duž kojih se valovi šire. Koeficijent refleksije ne možemo definirati kao omjer vektora  $\vec{A}_r$  i vektora  $\vec{A}_u$  jer omjer dvaju vektora nema matematičkog smisla.

Stoga bi trebalo rastavljati vektore na komponente i postavljati uvjete koji moraju biti zadovoljeni na graničnoj plohi. To je prilično složen zadatak.

Jednostavnije je problem riješiti pomoću tlaka koji je skalarna veličina. Sukladno prijašnjim crtačima i upotrijebljenim oznakama za valne vektore  $k'$ ,  $k''$  i  $k'''$ , možemo posati za valove tlaka

$$p_u(x, z, t) = P_u \cos(\omega t - k'_x x - k'_z z)$$

$$p_r(x, z, t) = P_r \cos(\omega t - k''_x x - k''_z z)$$

$$p_t(x, z, t) = P_t \cos(\omega t - k'''_x x - k'''_z z)$$

### Napomena:

U prethodnom razmatranju refleksije utvrdili smo da je  $k'_x = -k''_x$ , što znači da se upadni i reflektirani val šire duž suprotnih smjerova osi  $x$ . Za upadni val imamo oscilirajući faktor  $\cos(\omega t + |k'_x| x - k'_z z)$ , što znači da se on širi duž negativnog smjera osi  $x$ .

Granična ploha dvaju valnih sredstava odredena je uvjetom  $x=0$  jer smo ishodište koordinatnog sustava postavili na samu graničnu plohu, a os  $x$  okomito na nju. Uvrštavanjem  $x=0$  u gornje jednačine

dobivamo pojedine tlakove na samoj graničnoj plohi

$$p_u(0, z, t) = P_u \cos(\omega t - k'_z z)$$

$$p_r(0, z, t) = P_r \cos(\omega t - k''_z z)$$

$$p_t(0, z, t) = P_t \cos(\omega t - k'''_z z)$$

Ranije smo utvrdili da vrijedi  $k'_z = k''_z = k'''_z$ , pa su sve tri kosinusove funkcije jednake.

Možemo sada postaviti prvi fizikalni uvjet za tlakove na graničnoj plohi

$$p_u + p_r = p_t$$

Ovaj uvjet možemo obrazložiti na dva načina:

- 1) U prvome sredstvu (tj. za  $x > 0$ ) imamo upadni i reflektirani val. Ukupni tlak u nekoj točki i u nekome trenutku jednak je zbroju tlakova upadnog i reflektiranog vala. Kada se iz gornjeg sredstva približavamo graničnoj plohi, dobivamo upravo  $(p_u + p_r)$  kao ukupni tlak na graničnoj plohi. U drugome sredstvu (tj. za  $x < 0$ ) imamo samo transmitirani val. Ako se iz donjeg sredstva približavamo graničnoj

plaku, moramo dobiti  $p_t$  kao tlak na samoj graničnoj plaku. Budući da tlak u istoj točki ne može biti dvoznačna veličina, mora biti  $p_u + p_v = p_t$ . Ova jednakost vrijedi za svaku točku (bilo koji " $z$ ") na graničnoj plaku i u svakome trenutku (bilo koji " $t$ ").

2) Primijenimo III. Newtonov zakon na silu između dvaju sredstava (dvaju tijela) koja se dodiruju na graničnoj plaku. Možemo reći da tlak ( $p_u + p_v$ ) uzrokuje silu na element površine  $\Delta S$  u graničnoj plaku. Ta sila djeluje na drugo sredstvo. No, isto tako možemo reći da tlak  $p_t$  uzrokuje silu na isti element površine  $\Delta S$  i ta sila djeluje na prvo sredstvo. Navedene sile imaju suprotne smjerove, a po iznosu moraju biti jednake, što znači da mora biti zadovoljena jednakost  $p_u + p_v = p_t$ .

Navedeni uvjet možemo izraziti kao uvjet za amplitudu tlakova

$$P_u + P_v = P_t$$

Drugi fizikalni uvjet na graničnoj plaku glasi

$$(u_u)_x + (u_v)_x = (u_t)_x$$

Čestice na graničnoj plaku imaju oscilirajuće pomake koji imaju komponente duž osi  $x$ . Gornji uvjet predstavlja kontinuitet pomaka duž osi  $x$  na prijelazu iz jednog sredstva u drugo. Možemo također reći da taj uvjet osigurava trajan dodir dvaju sredstava u svim točkama granične plohe.

Gornji uvjet možemo izraziti putem tlaka. U tu svrhu podsjetimo se na razmatranje iz odjeljka 4.3. o ravnom valu pomaka i tlaka koji se širi samo duž osi  $z$ . Imali smo jednadžbu

$$u(z,t) = A \sin(\omega t - kz)$$

$$p(z,t) = -Y \frac{\partial u}{\partial z} = YkA \cos(\omega t - kz)$$

Možemo sada napraviti derivaciju tlaka

$$\frac{\partial p(z,t)}{\partial z} = Yk^2 A \sin(\omega t - kz) = Yk^2 u(z,t)$$

Ako se val širi duž proizvoljnog smjera, vektor pomaka  $\vec{u}$  kao

$$\vec{u} = u_x \hat{x} + u_y \hat{y} + u_z \hat{z} = \frac{1}{Yk^2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{z} \right)$$

gdje su  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  i  $\hat{z}$  jedinični vektori duž odgovarajućih osi. Skraćeno se može pisati

$$\vec{u} = \frac{1}{\omega^2 \rho} \text{grad } p = \frac{1}{\omega^2 \rho} \vec{\nabla} p$$

gdje je upotrijebljen operator gradijenta, odnosno "nabla" ( $\text{grad} = \vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$ ).

Također je preinačen izraz  $Yk^2 = Y \left( \frac{\omega}{\sqrt{Y}} \right)^2 = \omega^2 \rho$ .

Dobiveni izraz znači da se smjer pomaka poklepa sa smjerom gradijenta tlaka, tj. ima smjer najbržeg porasta tlaka u prostoru.

Sada se možemo vratiti na postavljene uvjet za kontinuitet pomaka na graničnoj plohi, te pisati pomoću derivacija tlakova

$$\frac{1}{\omega^2 \rho_1} \frac{\partial p_u}{\partial x} + \frac{1}{\omega^2 \rho_1} \frac{\partial p_v}{\partial x} = \frac{1}{\omega^2 \rho_2} \frac{\partial p_t}{\partial x}$$

s time da vrijednosti derivacija moramo uzeti na  $x=0$  (granična ploha)

$$\frac{1}{\rho_1} k'_x P_u \sin(\omega t - k'_z z) + \frac{1}{\rho_1} k''_x P_v \sin(\omega t - k''_z z) = \frac{1}{\rho_2} k'''_x P_t \sin(\omega t - k'''_z z)$$

Zbog prije navedenih razloga, sinusne funkcije su sve jednake, pa se uvjet svodi na

$$\frac{1}{\rho_1} k'_x P_u + \frac{1}{\rho_1} k''_x P_v = \frac{1}{\rho_2} k'''_x P_t$$

Možemo sada iskoristiti odnose na slikama o refleksiji i transmisiji

$$k'_x = -k''_x = -k' \cos \theta_u$$

$$k'''_x = -k''' \cos \theta_t$$

pa dobivemo uvjet

$$(P_u - P_v) \frac{k'}{\rho_1} \cos \theta_u = P_t \frac{k'''}{\rho_2} \cos \theta_t$$

Iz disperzijske relacije za prvo sredstvo  $\omega = \sqrt{\frac{Y_1}{\rho_1}} k'$  dobivamo  $k' = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{Y_1}}$ , odnosno

$$\frac{k'}{\rho_1} = \frac{\omega}{\sqrt{Y_1 \rho_1}} = \frac{\omega}{Z_1}$$

Analogno dobivemo za drugo sredstvo

$$\frac{k'''}{\rho_2} = \frac{\omega}{\sqrt{Y_2 \rho_2}} = \frac{\omega}{Z_2}$$

Tako dobivemo drugi uvjet izražen pomoću impedancija  $Z_1$  i  $Z_2$  dvoju valnih sredstava

$$(P_u - P_r) \frac{\cos \theta_u}{Z_1} = P_t \frac{\cos \theta_t}{Z_2}$$

Konačno, dijeljenjem jednačini za prvi i drugi uvjet elimineramo  $P_t$

$$\frac{P_u + P_r}{P_u - P_r} \frac{Z_1}{\cos \theta_u} = \frac{Z_2}{\cos \theta_t}$$

Sredstvom dobivemo

$$P_u \left( \frac{Z_1}{\cos \theta_u} - \frac{Z_2}{\cos \theta_t} \right) = -P_r \left( \frac{Z_1}{\cos \theta_u} + \frac{Z_2}{\cos \theta_t} \right)$$

Koeficijent refleksije za amplitudu tlakova iznosi

$$R_p = - \frac{\frac{Z_1}{\cos \theta_u} - \frac{Z_2}{\cos \theta_t}}{\frac{Z_1}{\cos \theta_u} + \frac{Z_2}{\cos \theta_t}}$$

Dakle, u općenitom slučaju kosog upada vala na graničnu plohu, koeficijent refleksije ovisi o različitim impedancijama  $Z_1$  i  $Z_2$ , ali

i o upadnom kutu  $\theta_u$ , te s njim povezanim kutom  $\theta_t$ .

U posebnom slučaju okomitog upada ( $\theta_u = 0$  i  $\theta_t = 0$ ) dobivamo

$$R_p = - \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Uspoređujući ovaj izraz s onime iz 3. poglavlja za refleksiju valova u jednoj dimenziji, nalazimo da koeficijent refleksije za amplitudu tlakova  $R_p$  ima suprotan predznak od koeficijenta refleksije za amplitudu pomaka. To je sasvim razumljivo. Uzimimo primjer u kojemu drugo sredstvo predstavlja čvrst (nepomičan) kraj, tj.  $Z_2 \rightarrow \infty$ . Tada je  $R_p = 1$ , tj.  $P_r = P_u$ . Na čvrstome kraju nastaje ukupan tlak  $P_u + P_r = 2P_u$ , tj. trbuhi tlaka. S druge pak strane, koeficijent refleksije za amplitudu pomaka je  $R = -1$ , tj.  $A_r = -A_u$ , pa je ukupan pomak na čvrstome kraju  $A_u + A_r = 0$ , tj. čvor pomaka.

Na slobodnom kraju ( $z_2 \rightarrow 0$ ) imamo obrnutu situaciju, tj. trbuhi pumaha i čvor tlaka.

Zanimljivo je još razmotriti i slučaj totalne refleksije koji nastupa za upadni kut  $\theta_{uc}$  i daje  $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ , odnosno  $\cos \theta_t = 0$ .

Koeficijent refleksije za amplitudu tlaka postaje  $R_p = 1$ , tj.  $P_r = P_u$  kao na čvrstome kraju. Val se u potpunosti reflektira.

Možemo konačno izračunati i koeficijent transmisije za amplitudu tlakova  $T_p$ . Iz prvoga graničnog uvjeta dobivamo

$$P_t = P_u + P_r = P_u \left(1 + \frac{P_r}{P_u}\right) = P_u (1 + R_p)$$

Prema tome, koeficijent transmisije iznosi

$$T_p = \frac{P_t}{P_u} = 1 + R_p$$

Nakon uvrštavanja izraza za  $R_p$  i sređivanje dobivamo

$$T_p = \frac{2 \frac{z_2}{\cos \theta_t}}{\frac{z_1}{\cos \theta_u} + \frac{z_2}{\cos \theta_t}}$$

# 5. AKUSTIKA

## 5.1. Zvuk kao ravan val

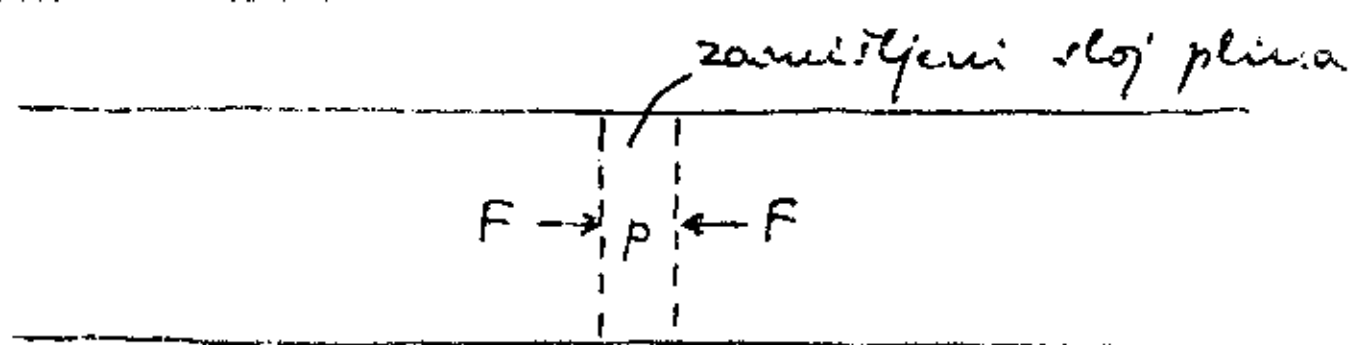
Naziv zvuk upotrebljava se za mehanicke valove u rasponu frekvencija od 20 Hz do 20 kHz. Za još više frekvencije do 10 MHz upotrebljava se naziv ultrazvuk.

Zvuk se može širiti u čvrstim tvarima u obliku transverzalnih ili longitudinalnih valova. Brzina širenja zvuka i impedancija valnog sredstva ovise o modulu elastičnosti i gustoći (v. prethodno poglavlje).

Zvuk se može širiti u tekućinama i plinovima kao longitudinalni val u kojemu nastaju zgušnjavanja čestica i razrjeđivanja. Modul elastičnosti tekućine ili plina temelji se na njihovoj stlačivosti.

Za čovjeka je posebno važno pitanje širenja zvuka u zraku. Stoga razmotrimo stlačivost u plinu.

Neka se u dugачkoj cijevi nalazi plin (zrak) u ravnotežnom stanju, tj. da je tlak plina jednak u svim točkama. Možemo zamisliti jedan sloj plina u poprečnom presjeku cijevi.



Okolni slojevi djeluju silom na promatrani sloj pa je u njemu tlak  $p = \frac{F}{S}$ .

Ako se u plinu širi val zvuka, nastaju lokalna zgušnjavanja i razrjeđivanja, tj. neravnotežna stanja.

Neka se u nekome trenutku zgušnjavanje nalazi na mjestu promatranog sloja. To znači da okolni slojevi trenutno djeluju povećanom silom  $F + \Delta F$  pa tlak u promatranom sloju poraste na  $p + \Delta p$ . Pitamo se koliko se stisne promatrani sloj, tj. koliko mu se smanji volumen?

Kada bi se stiskanje sloja plina odvijalo sporo mogli bismo primijeniti zakon  $pV = \text{konst.}$  (Boyle-Mariotteov zakon). Pri tome bi temperatura sloja ostala konstantna.

Međutim, titranje zvuka je brzo, tj. zgušnjavanje na jednome mjestu traje svega djelić sekunde. Zato moramo primijeniti zakon

$$pV^\gamma = \text{konst.}$$

koji vrijedi za adijabatske promjene stanja.



Najveće, kada se volumen sloja naglo smanji, onda mu poraste temperatura jer nema dovoljno vremena za predaju toplinu okolnim slojevima i izjednačavanje temperature. Za dvoatomne plinove (npr. zrak koji sadrži molekule  $N_2$  i  $O_2$ ) vrijedi  $\gamma = 1,4$  (razlog se uči u OF4).

Pravilom diferenciranja dobivamo

$$dpV^\gamma + p(\gamma V^{\gamma-1} dV) = 0 \quad | : V^\gamma$$

$$dp + \gamma p \frac{dV}{V} = 0$$

Ako su promjene konačne, upotrebljavamo  $\Delta p$  i  $\Delta V$ , pa pišemo

$$\frac{\Delta p}{p} = \gamma \frac{-\Delta V}{V}$$

gdje smo uvažili da je  $\Delta p = \frac{\Delta F}{S}$ .

Napomena:

Ako uzmemo da je  $\Delta p > 0$  (tlak je porastao), onda se volumen nešto smanji ( $\Delta V < 0$ ), pa je  $-\Delta V > 0$  (pozitivna veličina).

Iz prethodne relacije vidimo da ulogu Youngove modula elastičnosti u plinu preuzima veličina  $\gamma p$ . Stoga možemo odmah napisati disperzijsku relaciju za širenje zraka u zraku

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} k$$

Za zrak u normalnim uvjetima na površini Zemlje imamo

$$p = 1013 \text{ hekto Pascala} = 1013 \cdot 10^2 \text{ Pa} \approx 10^5 \text{ Nm}^{-2}$$

$$\rho = 1,29 \text{ kgm}^{-3}$$

Brzina zraka u zraku je stoga

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 1013 \cdot 10^2}{1,29}} = \underline{\underline{332 \text{ ms}^{-1}}}$$

Brzina zraka u zraku ne ovisi o frekvenciji. To je opće svojstvo za valove u otvorenom kontinuumu.

Također možemo napisati izraz za impedanciju ravnih valova zraka u otvorenom zraku

$$Z = \sqrt{\gamma p \rho} = \sqrt{1,4 \cdot 1013 \cdot 10^2 \cdot 1,29} = \underline{\underline{428 \text{ Nm}^{-3} \text{ s}}}$$

## Val pomaka i akustički tlak

Na zvučnik koji se širi zrakom možemo primijeniti izraz za val pomaka čestica u kontinuumu (poglavlje 4)

$$u(z,t) = A \sin(\omega t - kz)$$

gdje je kao primjer uzeto da se zvučnik širi duž osi z.

Isto se tiče tlaka, možemo imati na umu da i bez uspostave zvučnog vala, postoji ravnotežan atmosferski tlak  $p$ . Kada se uspostavi zvučni val, nastaju lokalna zgušnjavanja i razrjedjenja tako da ukupni tlak

$$p_{uk}(z,t) = p + p_a(z,t)$$

gdje odstupanje od ravnotežnog (konstantnog) tlaka  $p$  nazivamo akustički tlak  $p_a(z,t)$ .

Možemo pisati

$$p_a(z,t) = P_a \cos(\omega t - kz)$$

prema analogiji iz poglavlje 4. U slučaju zvučnika koji se širi zrakom razmjerujemo

Youngov modul  $Y$  s veličinom  $\gamma p$ , pa je amplituda akustičkog tlaka

$$P_a = \gamma p k A$$

Zgodno je povezati intenzitet zvučnika s amplitudom akustičkog tlaka. U 4. poglavlju smo izveli izraz za intenzitet vala  $I = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 Z$  u koje možemo uvrstiti  $A$  iz gornje jednadžbe pa dobivemo

$$I = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{P_a^2}{\gamma^2 p^2 k^2} Z = \frac{1}{2} \frac{\gamma p}{\rho} \frac{P_a^2}{\gamma^2 p^2} Z$$

gdje smo iskoristili disperzijsku relaciju za zvučni val u zraku  $\omega = \sqrt{\gamma p / \rho}$ . Možemo još iskoristiti izraz  $Z = \sqrt{\gamma p \rho}$  i konačno napisati

$$I = \frac{P_a^2}{2Z}$$

Kasnije ćemo vidjeti da intenzitet zvučnika od npr.  $1 \mu \text{W m}^{-2} = 10^{-6} \text{W m}^{-2}$  predstavlja za naše uho umjereno jak zvučnik. Za njega izlazi po gornjoj relaciji  $P_a \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{N m}^{-2}$ . Ovak akustički tlak je mnogo redova veličine manji od atmosferskog tlaka  $p = 10^5 \text{N m}^{-2}$ .

## Zvučni valovod

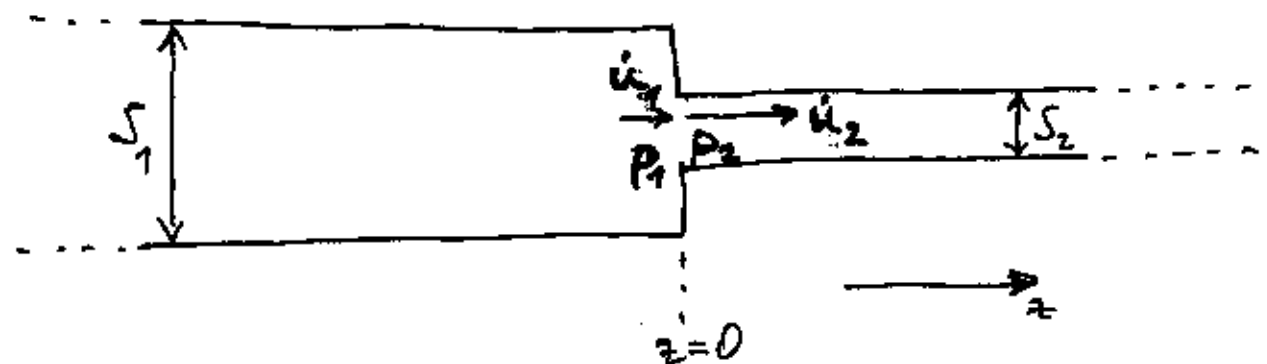
Razmotrimo širenje zvuka u cijevi ispunjenoj zrakom s time da je promjer cijevi znatno manji od valne duljine zvuka.

### Napomena

Sukladno relaciji  $v = \lambda \nu$  i  $v = 332 \text{ m s}^{-1}$  imamo za zvuk frekvencije  $\nu = 332 \text{ Hz}$  valnu duljinu  $\lambda = 1 \text{ m}$ . Za  $\nu = 3,3 \text{ kHz}$  dobivamo  $\lambda = 10 \text{ cm}$ . Dakle, za sve niže frekvencije cijev promjera 2-3 cm zadovoljava gore postavljenu uvjet.

U takvim uvjetima, ne može nastati mod poprečno na os cijevi, odnosno valne fronte su praktički ravne. Dakle, duž cijevi se širi ravan val, ali taj val ipak nije u otvorenom zraku.

Razmotrimo što se događa s valom zvuka kada valovod (cijev) na nekome mjestu skokovito mijenja svoj poprečni presjek od  $S_1$  na  $S_2$ .



Radi se o spoju dviju cijevi na mjestu  $z=0$ . Iako se u obje cijevi nalazi ista tvar (zrak) i širi se val zvuka s ravnim valnim frontama, ipak to nije isto kao da se radi o otvorenom zraku na  $z < 0$  i na  $z > 0$ , tj. kao da nema nikakve promjene na  $z=0$ .

Kod prelaska iz šire cijevi u kojoj je (trenutna) brzina čestica  $\dot{u}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t}$  u užu cijev, povećava se brzina čestica na  $\dot{u}_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t}$  kako bi bio ispunjen uvjet jednakostrani protoka zraka

$$\dot{u}_1 S_1 = \dot{u}_2 S_2$$

### Napomena:

Promjene iznosa i smjera brzine čestice nastaju već u blizini  $z=0$ , no kako su sve te dimenzije mnogo manje od

valne duljine zvučnog vala, možemo zanemariti prostiranje prijelaza i smatrat da se sve odvija na  $z=0$ .

Drugi fizikalni uvjet je kontinuitet tlaka na  $z=0$

$$p_1 = p_2$$

Navedena dva uvjeta mogu biti ispunjena ako u prvoj cijevi imamo upadni i reflektirani val zvučne, tj. ukupno

$$u_1 = u_u + u_r \Rightarrow \dot{u}_1 = \dot{u}_u + \dot{u}_r$$

Također, za akustički tlak imamo

$$p_{a1} = p_{au} + p_{ar}$$

U drugoj cijevi imamo transmitirani val zvučne, tj.

$$u_2 = u_t \Rightarrow \dot{u}_2 = \dot{u}_t$$

Prema tome, dva postavljena uvjeta možemo napisati u obliku

$$(\dot{u}_u + \dot{u}_r) S_1 = \dot{u}_t S_2$$

$$p_{au} + p_{ar} = p_{at}$$

Kod ravni valova tlak i brzina čestica su povezani preko impedancije  $Z = \sqrt{\rho p}$

$$p_{au} = Z \dot{u}_u$$

$$p_{ar} = -Z \dot{u}_r$$

$$p_{at} = Z \dot{u}_t$$

Stoga prvi uvjet glasi

$$\frac{1}{Z} (p_{au} - p_{ar}) S_1 = \frac{1}{Z} p_{at} S_2$$

za  $z=0$  fazi odnosi su jednaki za sve tri vala, pa uvjete možemo napisati pomoću amplitude tlakova

$$(p_{au} - p_{ar}) S_1 = p_{at} S_2$$

$$p_{au} + p_{ar} = p_{at}$$

Dijeljenjem dviju jednačini možemo eliminirati  $p_{at}$ , te dobivamo

$$\frac{p_{au} - p_{ar}}{p_{au} + p_{ar}} S_1 = S_2$$

$$R_p = \frac{p_{ar}}{p_{au}} = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}$$

Koeficijent refleksije tlaka

## Nepomenu:

Impedancija  $Z = \sqrt{\rho c p}$  je ista u obje cijevi jer se u njima nalazi zrak na istom ravnotežnom (atmosferskom) tlaku  $p$  i posuda ima istu ravnotežnu gustoću  $\rho$ .

Do refleksije dolazi zbog različitih poprečnih presjeka  $S_1$  i  $S_2$ , a ne zbog različitih impedancija.

Dobiveni rezultat je važan i navodi nas da uvedemo novu veličinu koja se zove akustička impedancija cijevi

$$Z_{ac} = \frac{Z}{S}$$

gdje je  $Z = \sqrt{\rho c p}$ , a  $S$  je poprečni presjek cijevi. Ova veličina je smisljena samo ako je radijus cijevi mnogo manji od valne duljine zvučnog vala koje razmatramo.

Uz ovu definiciju naletimo nakon uvrštavanja u izraz za koeficijent refleksije

$$R_p = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} = - \frac{Z_{ac1} - Z_{ac2}}{Z_{ac1} + Z_{ac2}}$$

koji je po formi identičan slučaju iz 4. poglavlja gdje se impedancije razlikuju.

## 5.2. Sferni valovi zvuka

Prije nego dođemo do jednadžbe sfernog vala, razmotrimo ravni val akustičkog tlaka duž jednog smjera (upr. os  $z$ )

$$p_a(z, t) = P_a \cos(\omega t - kz)$$

Lako izračunavamo druge derivacije po  $z$  i po  $t$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 p_a}{\partial z^2} &= -k^2 p_a \\ \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} &= -\omega^2 p_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 p_a}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2}$$

 valna jednadžba za tlak

U trodimenzionalnom slučaju tlak može imati različite vrijednosti u raznim točkama prostora  $p_a(x, y, z, t)$ , a i valni vektor  $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$  također. U svakoj točki  $u$  danome trenutku vrijedi

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_a}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2}$$

Ako uvedemo operator "nabla"  $\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$  možemo izračunati skalarni produkt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Prema tome, valnu jednačinu za akustički tlak u općenitom slučaju možemo napisati

$$\vec{\nabla}^2 p_a = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} \quad (\text{ili } \Delta p_a = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2})$$

↑  
Laplace-ov operator  $\Delta = \vec{\nabla}^2$

Za razmatranje sfernih problema pogodnije je prijeći od Kartezijevih koordinata  $(x, y, z)$  na sferne koordinate  $(r, \theta, \varphi)$ . Poveznice je  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ . Akustički tlak je funkcija  $p_a(r, \theta, \varphi, t)$ , no u slučaju sfernog vala, nema promjene tlaka za različite  $\theta$  i  $\varphi$ , nego samo za udaljenost  $r$  od nekog središta  $p_a(r, t)$ . Operator  $\vec{\nabla}^2$  ima u sfernim koordinatama oblik

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Budući da kod sfernog vala nema ovisnosti o  $\theta$  i  $\varphi$ , aktivan je samo prvi član u  $\vec{\nabla}^2$ , pa dobivamo valnu jednačinu za akustički tlak

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial p_a}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2}$$

Iz ove valne jednačine možemo dobiti rješenje za  $p_a(r, t)$ . Zgodno je poslušati se supstitucijom  $\psi = r p_a$  za koju valna jednačina poprima jednostavniji oblik

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Radi matematičke jednostavnosti, korisnije je sada upotrijebiti kompleksni zapis (a kasnije diskutirati samo realni dio koji predstavlja fizikalnu veličinu). Gornja diferencijalna jednačina ima rješenje

$$\psi(r, t) = C e^{i(\omega t - kr)}$$

gdje je  $C$  neka konstanta. Uvrštavanjem u diferencijalnu jednačinu dobivamo  $v = \frac{\omega}{k}$ , što odgovara definiciji faze brzine vala. Dakle, val sfernog akustičkog tlaka ima oblik

$$p_a(r, t) = \frac{C}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

Napomena:

Amplituda tlaka kod sfernog vala opada s  $\frac{1}{r}$  (tj.  $P_a = \frac{C}{r}$ ), što je očekivano jer intenzitet ovisi o  $P_a^2$  i mora se smanjivati s  $\frac{1}{r^2}$  tako

da ukupna energija koja se prenosi na sfernu plohu ( $4\pi r^2$ ) ima jednak iznos na bilo kojoj udaljenosti  $r$  od središta sfernog vala.

U 4. poglavlju smo utvrdili da je vektor pomaka čestica  $\vec{u}$  povezan s gradijentom tlaka

$$\vec{u} = \frac{1}{\omega^2 \rho} \vec{\nabla} p_a$$

Operator "nabla" ima u sfernim koordinatama oblik

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

No, budući da u slučaju sfernog vala tlak  $p_a$  ne ovisi o  $\theta$  i  $\varphi$ , nego samo o varijabli  $r$ , imamo

$$\vec{\nabla} p_a = \hat{r} \frac{\partial p_a}{\partial r} = \hat{r} \left( -\frac{c}{r^2} - ik \frac{c}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)}$$

$$\vec{u} = \hat{r} \frac{1}{\omega^2 \rho} \left( -\frac{c}{r^2} - ik \frac{c}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)}$$

Možemo izračunati brzinu čestica (samo iznos).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\omega \rho} \left( k \frac{c}{r} - i \frac{c}{r^2} \right) e^{i(\omega t - kr)} = \frac{c}{\rho v} \left( \frac{1}{r} - \frac{i}{kr^2} \right) e^{i(\omega t - kr)}$$

gdje smo uzeli u obzir disperzijsku relaciju  $\omega = vk$ .

Uvedimo impedanciju  $Z_s$  za širenje sfernog vala

$$p_a = Z_s \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{c}{r} e^{i(\omega t - kr)} = Z_s \frac{c}{\rho v} \left( \frac{1}{r} - \frac{i}{kr^2} \right) e^{i(\omega t - kr)}$$

$$Z_s = \frac{\rho v}{1 - \frac{i}{kr}} = \frac{Z}{1 - \frac{i}{kr}}$$

gdje je uvaženo  $\rho v = \rho \sqrt{\frac{\lambda p}{\rho}} = \sqrt{\lambda \rho p} = Z$  impedancija ravnih valova u otvorenom zraku.

Na velikim udaljenostima od središta, tj. za  $kr \gg 1$  (odnosno  $r \gg \lambda$ ) drugi član u nazivniku je praktički zanemarljiv prema prvome članu, tako da je  $Z_s \approx Z$ . To je očekivano jer za veliki  $r$  sferni val postaje praktički jednak ravnom valu za lokalnu sredinu.

Međutim, za  $kr < 1$  imaginarni dio je značajan. Značenje kompleksne impedancije možemo najbolje shvatiti ako tlak i brzinu čestica napišemo u svim realni dio kompleksnih veličina

$$p_a = \frac{c}{r} \cos(\omega t - kr)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c}{\rho v} \left[ \frac{1}{r} \cos(\omega t - kr) + \frac{1}{kr^2} \sin(\omega t - kr) \right]$$

Prvi član je u fazi s tlakom, dok je drugi član za  $\frac{\pi}{2}$  izvan faze tlaka.

Snaga koja prolazi kroz sfernu površinu radijusa  $r$  iznosi

$$P = 4\pi r^2 \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{4\pi C^2}{\rho v} \left[ \cos^2(\omega t - kr) + \frac{1}{kr} \cos(\omega t - kr) \sin(\omega t - kr) \right]$$

Samo prvi član pridonosi usrednjenom prijenosu snage od izvora na daljinu. Drugi član, koji dominira za  $kr < 1$ , oscilira frekvencijom  $2\omega$  od pozitivnih do negativnih iznosa. Za vrijeme pozitivnih iznosa snaga se prenosi u sredstvo izvan sfere radijusa  $r$ , dok se za vrijeme negativnih iznosa snaga vraća natrag u promatranu sferu.

Sferni val u zraku može nastati od izvora u obliku sfere membrane ravnotežnog radijusa  $r_0$ , koja počne oscilirati malim promjenama svojeg radijusa. Za takav izvor okolni zrak predstavlja valno sredstvo impedancije

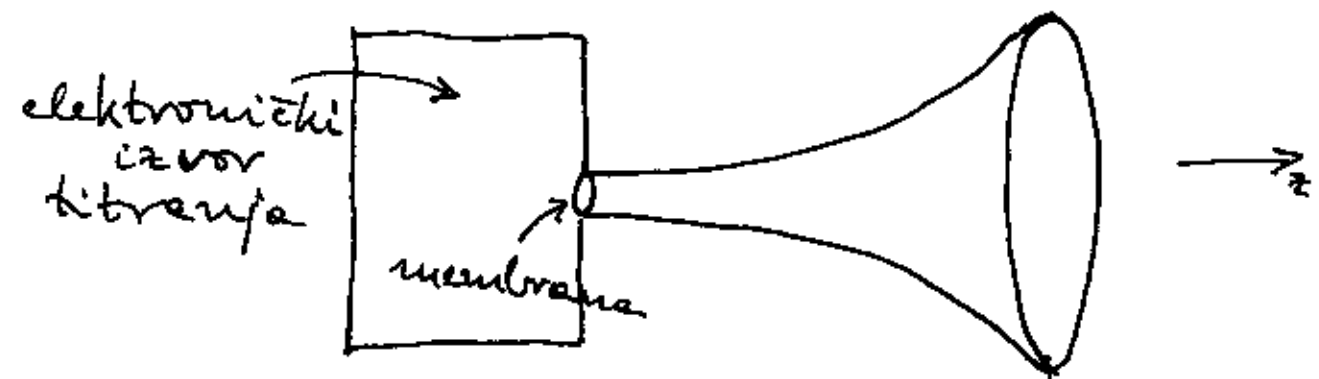
$$Z_s = \frac{Z}{1 - \frac{i}{kr_0}}$$

Za  $kr_0 \ll 1$  izvor nailazi na veliku reaktivnu impedanciju.

### 5.3. Eksponencijalan rog

U prethodnom odjeljku 5.2. ustanovili smo da emitiranje zvuka iz malenog sfernog izvora u otvoreni zrak nije energetske učinkovito. Isto vrijedi i za emitiranje zvuka iz zvučnika gdje je mala membrana (pobudena na titranje izmjeničnim elektromagnetskim silama) postavljena u razini otvora na većoj ravnoj ploči. Tada se valovi šire u poluprostor i tamo imaju približno sferno ponašanje.

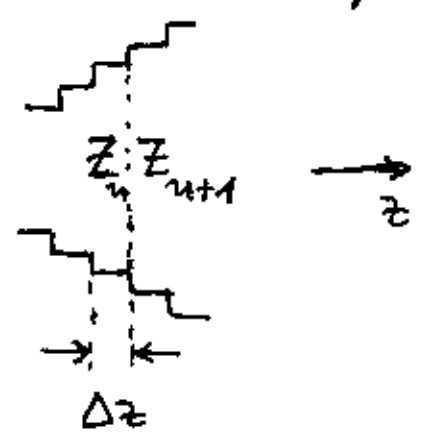
Ponkad je potrebno postići što veću energetske učinkovitost emitiranja zvuka, makar i na vrlo frekventne sive (npr. sirene, razglasi). To se postiže postavljanjem eksponencijalnog roga.





Eksponencijalni rog počinje kao valovod kojemu je lokalni promjer jednak promjeru membrane. Na tome mjestu zrak u uskom valovodu predstavlja impedanciju  $Z_0$ . Zatim se rog širi, te se lokalna impedancija smanjuje. Poželjno je da na izlazu iz roga dobijemo (približno) impedanciju otvorenog zraka.

Međutim, svaka promjena impedancije uzrokuje djelomičnu refleksiju vala. Zamislimo da se diameter roga mijenja u malim skokovima nakon svakog intervala  $\Delta z$  duž osi  $z$ . Ako je diameter roga manji od valne duljine, razmatramo akustičku



impedanciju cijevi (ali izostavljamo indeks "ac"). Kod svakog skoka imamo

$$\Delta R_p = -\frac{Z_n - Z_{n+1}}{Z_n + Z_{n+1}} \approx -\frac{\Delta Z}{2Z}$$

koef. refleksije tlaka

Ako kod izrade roga pogodimo ugovor oblik tako da na svakoj stepenici dobijemo isti koeficijent refleksije, onda možemo pisati

$$\Delta R_p = \Gamma \Delta z$$

gdje je  $\Gamma$  neka konstanta karakteristična za dani rog.

Pojedini reflektirani valovi se malo razlikuju po amplitudi, te imaju međusobne faze pomake  $\Delta \phi$  proporcionalne  $\Delta z$  (refleksije nastaju na različitim mjestima udaljenim za  $\Delta z$ ). Kada se nakupi razlika faze za pola periode, dotični se reflektirani valovi (gotovo) poništavaju. Ako rog ima odgovarajuću duljinu  $L$ , može se minimizirati refleksije zrnke prave membrane (izvoru).

Za impedanciju možemo napisati diferencijalnu jednačinu ( $\Delta z \rightarrow dz$ )

$$\frac{dZ}{2Z} = -\Gamma dz$$

Rješenje ove diferencijalne jednačine je

$$Z = Z_0 e^{-2\Gamma z}$$

jednačina eksponencijalnog roga

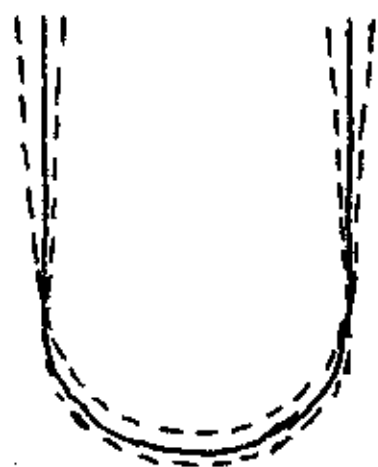
$$z=0 \text{ (kod membrane)} \Rightarrow Z = Z_0$$

$$z=L \text{ (na izlazu iz roga)} \Rightarrow Z = Z_0 e^{-2\Gamma L}$$

Na izlazu je impedancija manja od  $Z_0$ , te može postati bliska impedanciji otvorenog zraka.

## 5.4. Glazbena viljuška i glazbala

Glazbena viljuška je načinjena od elastične tvari u obliku slova U. Najčešće se pobuduje udarcem u krak i titra u najnižem modu.



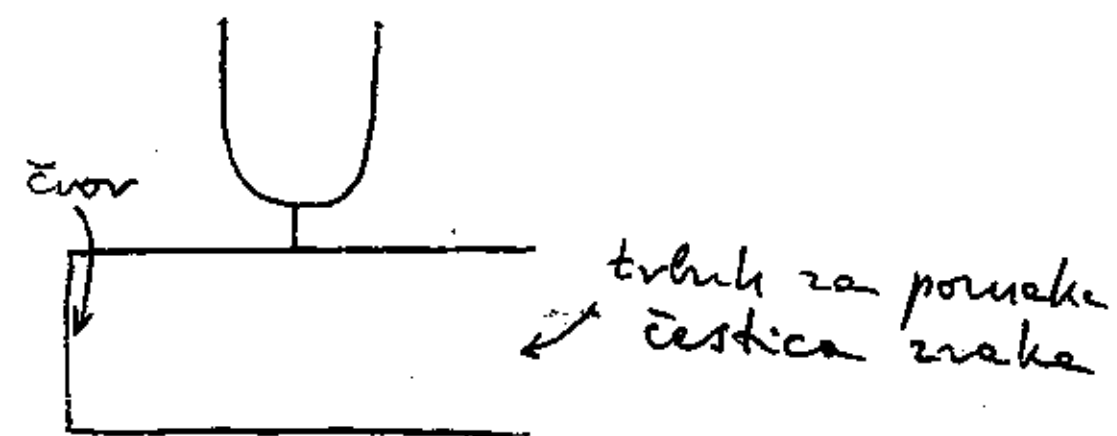
Titranje krakova pobuduje pomake čestica zraka oko njih i nastaje val zraka u zraku.

### 36. pokus

titranje glazbene viljuške

(detekcija putem uha, kuglica obješene na nit, mikrofona spojenog na osciloskop)

Glazbenu viljušku možemo pričvrstiti na rezonantni omarač



Titranje glazbene viljuške prenosi se na stijenu omarača i u njemu se pobuduje mod. Na zatvorenom kraju omarača (čvrsti kraj) imaju čvor za pomake čestica zraka. Na otvorenom kraju imaju trbuh za pomake čestica zraka. Vrijedi  $L = \frac{\lambda}{4}$  gdje je  $L$  duljina omarača.

### 37. pokus:

prijenos energije putem zraka  
(rezonantno pobuduje druge glazbene viljuške)

### 38. pokus:

dvije bliske frekvencije  $\Rightarrow$  udari  
(postavljanje gumenice kao dodatne mase na jednu od dvije identične glazbene viljuške)

### 39. pokus:

ugadanje duljine  $L$  za postizanje rezonancije ( $L = \frac{\lambda}{4}$ )

### 40. pokus:

promatranje raznih zvučnih signala i frekventnog spektra  
(mikrofon ugrađen u laptop prima zvučni signal i pretvara ga u električni (napon), a dodatni program izračuna spektar)

Spomenut ćemo samo neke vrste glazbala i istaknuti fizikalne principe na kojima rade.

### Glazbala s napetim žicama

Pobuduje se osnovni mod, ali uz njega i neki viši harmonici na jedan od tri načina:

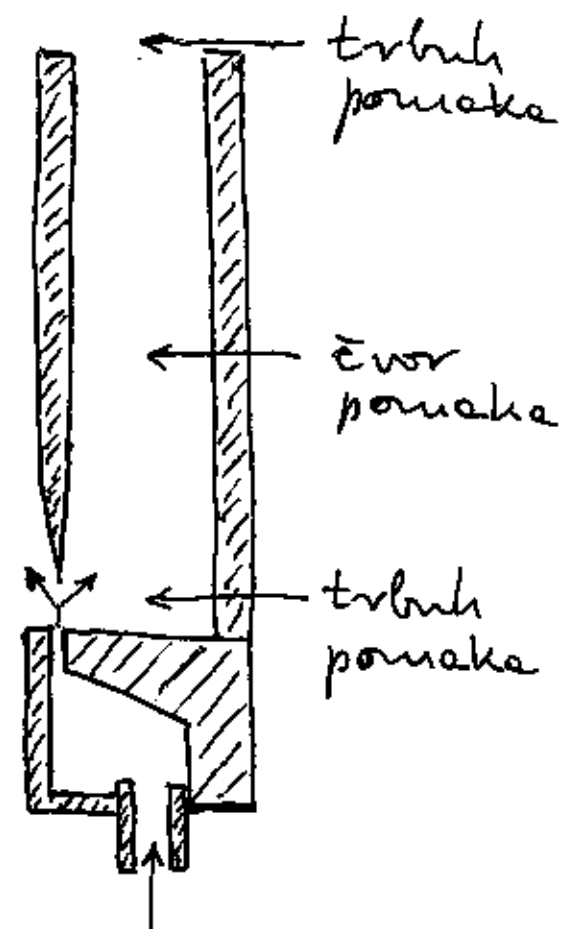
- udarcem mehaniziranim batićem (npr. glasovir)
- trzanjem (npr. gitara, tamburica, ...)
- povlačenjem gudalcom (npr. violina, ...)

Glasovir ima mnogo napetih žica različite duljine i debljine, te pokriva najširu frekventno područje.

### Puhачki instrumenti

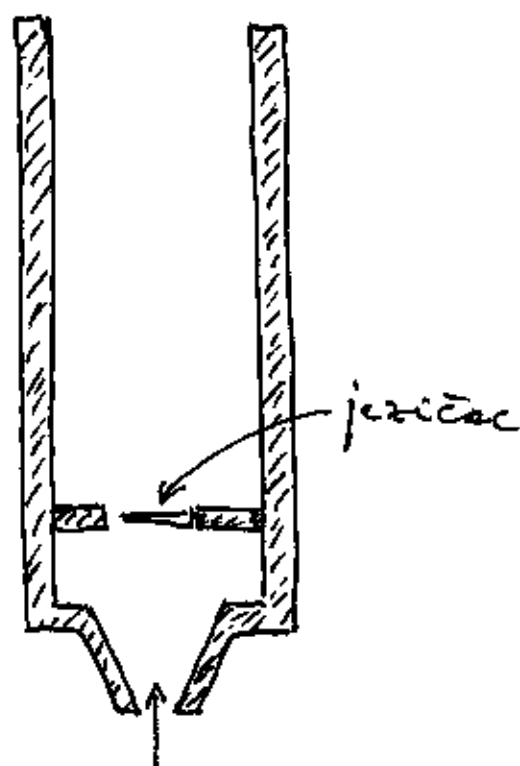
Na ulaznom kraju se upuhuje zrak. Pobuda titranja i nastanak zvuka može nastati na jedan od dva načina:

- nailaskom struje zraka na klin koji dijeli unutrašnjost cijevi od vanjskog prostora (npr. orgulje)
- nailaskom struje zraka na jezičac koji može zatitrati (npr. klarinet)



### Sviralo na klin

Nailazak struje zraka na klin dolazi do račvanja. Pokrenu se čestice zraka u cijevi. Zbog rezonantne duljine cijevi nastane stojni val. Zrak razmjenjuje ulazi u cijev desno od klina ili izlazi u prostor lijevo od klina.



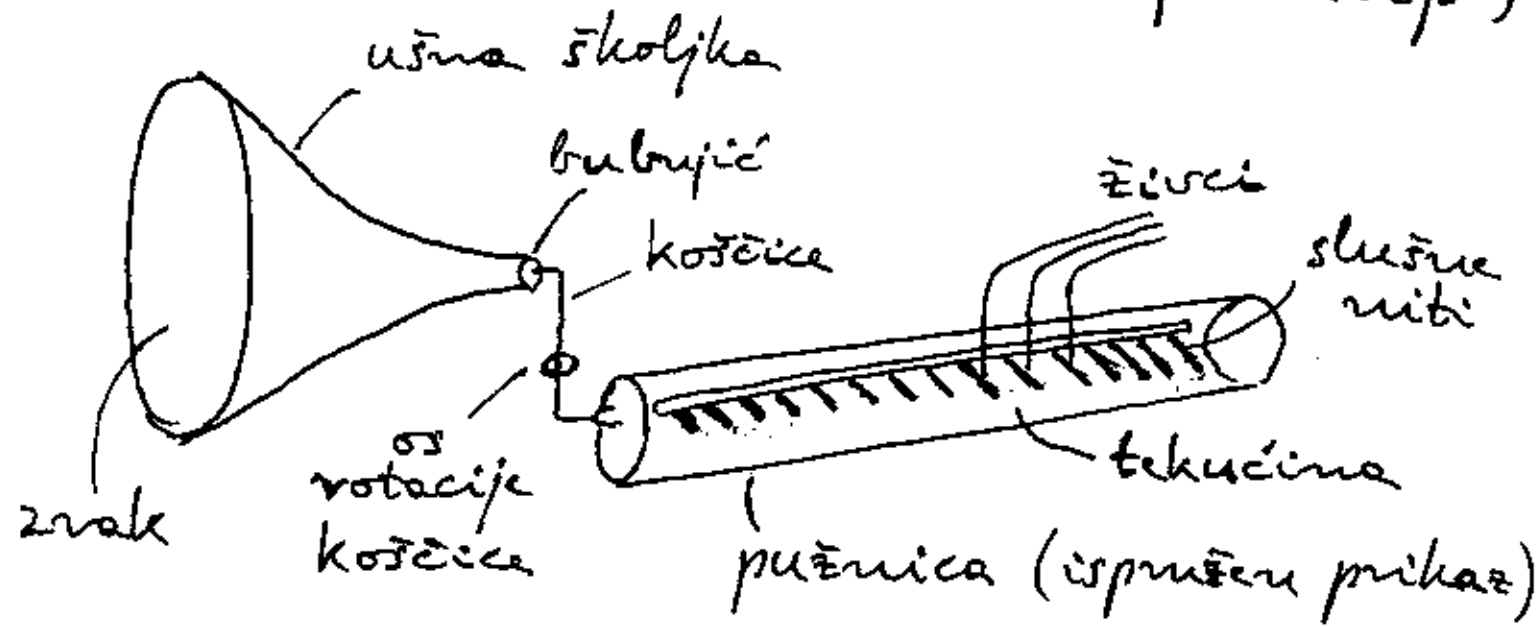
(jedna od mnogobrojnih raznih izvedbi)

### Sviralo na jezičac

Jezičac je elastičan i učvršćen na jednom kraju. Struja zraka savija jezičac, no on se zbog elastičnosti vraća natrag. Ako se uspostavi rezonancija između titranja jezičca i stojnog vala u cijevi, nastaje zvuk.

## 5.5. Osjetljivost ljudskog uha

### Simbolički prikaz uha (fizikalni princip)



### Osnovne funkcije:

1) Ušna školjka igra ulogu eksponencijalnog roga između impedancije otvorenog zraka i vrlo uskog valovoda u dubini uha gdje se nalazi bubujica.

2) Koštica (u srednjem uhu) djeluje kao poluga za transformaciju impedancije od bubujice (u zraku) na ulaznu opnu pučnice (u kojoj je tekućina).

### Napomena:

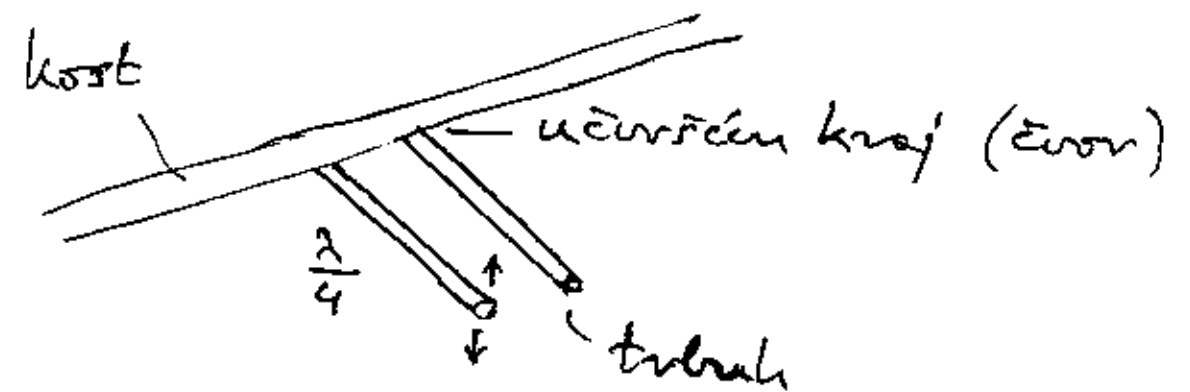
Poluga s nejednakim krakovima transformira manju silu (veći pomak kraka) u veću silu (manji pomak kraka).

Dakle, bubujica i koštica djeluju na ulaznu opnu pučnice kao da se ispred nje nalazi ista tekućina. Obrnuto, tekućina iz pučnice djeluje povratno na bubujicu preko koštica kao da se u nastavku od bubujice nalazi zrak u valovodu.

Stoga se zvučni val iz zraka kod bubujice prenese na val u tekućini pučnice praktički bez refleksije (50%-75% od savršenog).

3) U pučnici (duljina svega oko 35 mm) nalazi se oko 20000-30000 slušnih niti. Najkraće (pri ulazu) ima duljinu oko 0,04 mm, a najdulje (na kraju) oko 0,5 mm. Osim toga mijenja i debljinu (najkraće niti su najdeblje i obrnuto).

### Uvedana slika



Svaka slušna nit ima svoju rezonantnu frekvenciju (uz određenu širinu rezonancije zbog gušenja u tekućini).

Val dane frekvencije širi se od ulaza u pužnicu do odgovarajuće slušne nit:

Njeno titranje ujedno predstavlja savršeni završetak za dotični val. To znači da se val potpuno apsorbuje, odnosno nema refleksije prema ulazu u pužnicu ali ni transmisije u daljnji dio pužnice.

4) Na svakoj slušnoj niti ulaze se još stupići s nosačem za stanice s dlačicama koje podražuju živac.

### Audiodijapazon podražaja

20 Hz - 20 kHz

Uho je najosjetljivije za frekvencije od 1-2 kHz. To odgovara rezonanciji slušnih niti po sredini pužnice.

### Intenzitet zvuka

Intenzitet zvuka je transmitivna snaga vala po jedinici poprečne površine ( $\text{u W m}^{-2}$ )

Za uspoređivanje intenziteta dogovorno se uzima referentni intenzitet

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$$

To odgovara (otprilike) pragu čujnosti na 1-2 kHz.

Razina buke (engl. noise) ili zvuka izražava se omjerom  $\frac{I}{I_0}$ , ili uobičajeno logaritamski

$$\text{razina (engl. level)} \quad L = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ decibela (dB)}$$

$$I = I_0 \Rightarrow \log 1 = 0, \text{ tj. nula dB}$$

$$I = 10 I_0 \Rightarrow \log 10 = 1, \text{ tj. } 10 \text{ dB}$$

itd.

### Primjeri:

	<u>razina buke</u>
lagano šuštanje lišća	10 dB
normalan govor	50 dB
bučna ulica	60-70 dB
diskoteka	115 dB
granica bola	120 dB
start ulaznog zrakoplova	140 dB

Konkretno je staci uvid u iznose amplituda  
pomerka čestica  $A$  i akustičnog tlaka  $P_a$   
na granicama osjetljivosti ljudskog uha.  
Upotrijebimo iznose za intenzitet zvuka

$$I = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 Z \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{Z}}$$

$$I = \frac{P_a^2}{2Z} \quad \Rightarrow \quad P_a = \sqrt{2IZ}$$

Napravimo račun za  $Z$  otvorenog zračenja.  
Na granici čujnosti uha (za frekv. 1 kHz)

$$L = 0 \text{ dB} \quad I = I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$$

$$A = 0,1 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,1 \text{ \AA}$$

$$P_a = 3 \cdot 10^{-5} \text{ N m}^{-2} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

Dakle, pomerak čestica (molekule) zračenja  
u tome titranju je manji od dimenzije  
atoma.

Na granici boli za uho, nalazimo

$$L = 120 \text{ dB} \quad I = 10^{12} I_0 = 1 \text{ W m}^{-2}$$

$$A = 10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m}$$

$$P_a = 30 \text{ N m}^{-2} = 30 \text{ Pa}$$

Ovaj akustički tlak je još uvijek mnogo manji  
od atmosferskog tlaka ( $p \approx 10^5 \text{ Pa}$ ).

## 5.6. Dopplerov efekt

- Često se događa da se izvor zvuka  
 $G$  (generator) giba nekom relativnom  
brzinom prema detektoru  $D$  (ljudsko  
uho, ili neki instrument). Tada detektor  
opaža neku frekvenciju  $\nu'$  koja se razli-  
kuje od frekvencije  $\nu$  koju uistinu  
emitira izvor.

Napomena:

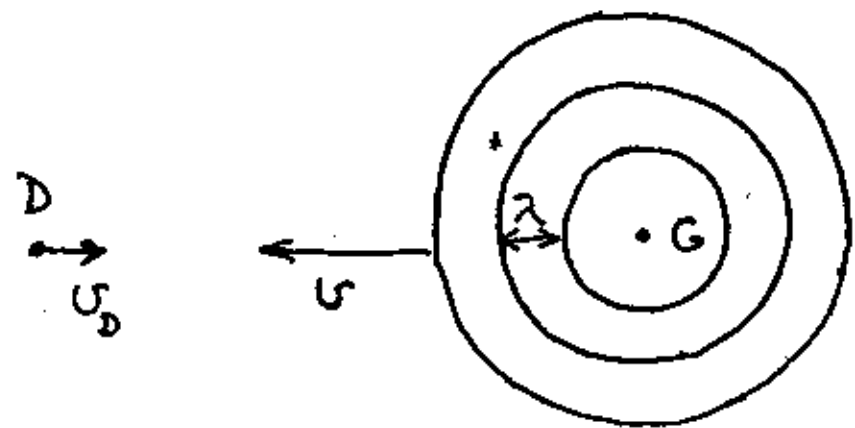
Razmotrimo najjednostavniji slučaj  
emitiranja sinusoidalnog titranja koje  
sadrži samo jednu frekvenciju  $\nu$ . Zaključak  
vrijedi za općeniti slučaj superpozicije  
raznih frekvencija.

Razmatranje s brzinama generatora  $G$   
i detektora  $D$  moramo provesti u nekom  
referentnom sustavu. Pri odabiru pogodnog  
referentnog sustava, moramo imati na  
umu da se zvuk širi određenom brzinom  
u zraku (valno sredstvo), pa je za rješavanje  
problema najzgodnije uzeti referentni  
sustav u kojemu zvuk miruje. Pretpostavimo  
da je to (približno) inercijalan sustav

vezan uz površinu Zemlje. Brzina zvuka  $v$  u toj sredini je zadana ( $v = 332 \text{ m s}^{-1}$ ). Ona ne ovisi o tome giba li se generator zvuka nekom brzinom  $v_0$ , ili miruje. Naime, kada generator zvuka pobudi neki bitraj u valnom sredstvu, taj se bitraj prenosi dalje u valnom sredstvu neovisno o tome što se kasnije zbiva s generatorom.

Razmotrimo redom dva jednostavna slučaja gibanja detektora, ili generatora.

a) Generator miruje a detektor se giba prema njemu brzinom  $v_0$



Simbolički su prikazane valne fronte s razlikom faze  $2\pi$  između susjednih. Prostorna udaljenost među njima predstavlja valnu duljinu  $\lambda$ . Svaka valna fronta se širi radijalno brzinom  $v$  (faze brine vala).

Pojedine valne fronte su bile emitirane iz generatora nakon uzastopnih intervala vremena  $T$  (period oscilacije generatora).

Veza između navedenih veličina glasi

$$\lambda = vT$$

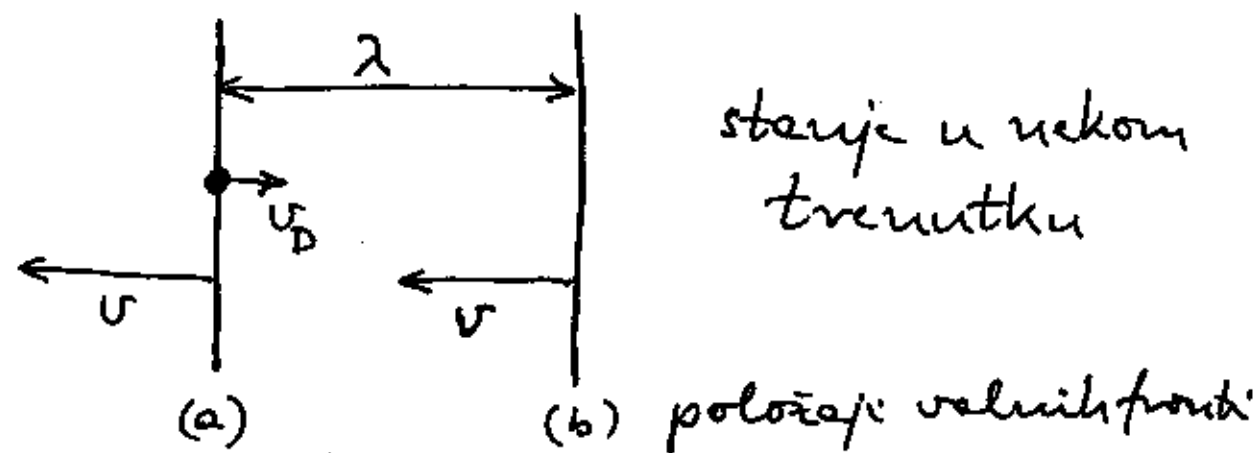
Ova jednačina nam kaže da nakon intervala  $T$  pojedine valne fronte preveli put  $\lambda$ , tj. dođe na mjesto valne fronte ispred nje, a one ode na mjesto one dalje, itd.

Kada bi detektor mirovao, do njega bi dolazile uzastopne valne fronte u vremenskim intervalima  $T$ , što znači da bi detektor izmjerio frekvenciju

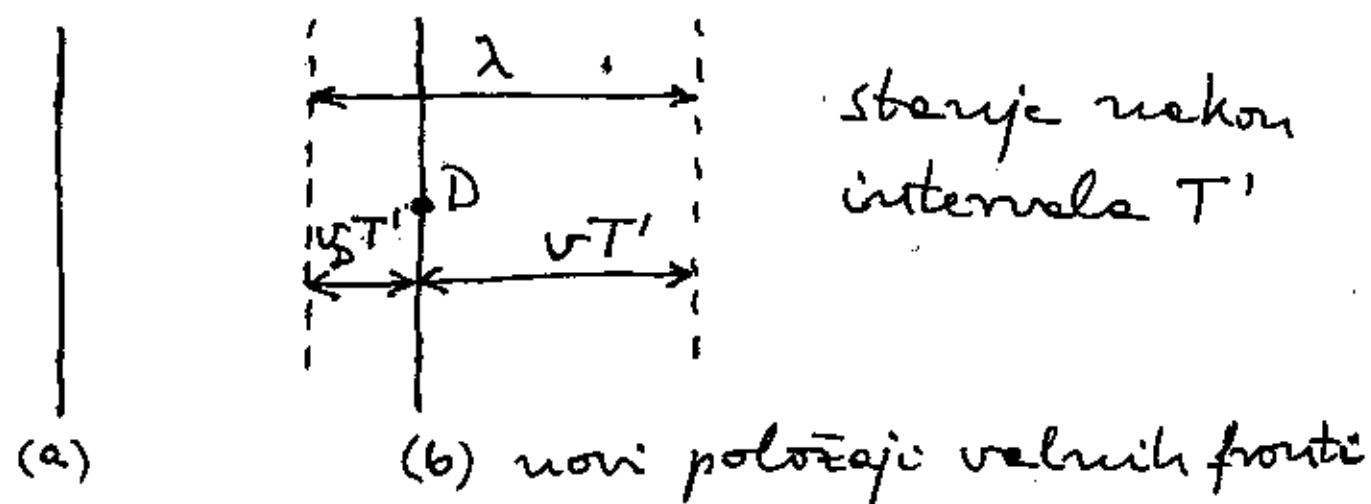
$$\nu = \frac{1}{T}$$

Međutim, kada se detektor giba nekom brzinom  $v_0$  ususret valnim frontama, one će do njega dolaziti jedna za drugom u vremenskim intervalima  $T'$  koje su očito kraće od  $T$ . Zadatak nam je da odredimo taj interval  $T'$ .

Nacrtajmo (uvećanu) sliku koja prikazuje nailazak uzastopnih valnih fronti na detektor



Valna fronta (a) je u danome trenutku upravo naišla na detektor. Valna fronta (b) naiđe brzinom  $v$ . Budući da se detektor giba brzinom  $v_D$ , valna fronta (b) će naići na detektor nakon intervala  $T'$



$$\lambda - v_D T' = v T'$$

$$\lambda = (v + v_D) T'$$

$$\frac{1}{T'} = \frac{v + v_D}{\lambda} = \frac{v}{\lambda} \left(1 + \frac{v_D}{v}\right) = \frac{1}{T} \left(1 + \frac{v_D}{v}\right)$$

gdje smo iskoristili relaciju  $\lambda = vT$ , pa je  $v/\lambda = 1/T$ . Veličinu  $1/T'$  možemo interpretirati kao frekvenciju  $\nu'$  koju opaža detektor u gibanju brzinom  $v_D$

$$\nu' = \left(1 + \frac{v_D}{v}\right) \nu$$

Promjena frekvencije naziva se Dopplerov efekt. Kada se detektor približava imamo  $\nu' > \nu$ .

Napomena:

U jednadžbi  $\lambda = (v + v_D) T'$  možemo uočiti da je  $\lambda$  fiksna veličina. To je valna duljina vala koji se širi zrakom iz mirujućeg generatora. Ta fizikalna veličnost ne ovisi o gibanju detektora (zapravo ne ovisi ni o njegovu postojanju). Stoga se  $(v + v_D)$  umnoži s  $T'$  (a ne s  $T$ ) tako da njihov produkt bude uvijek  $\lambda$ . Isto je veći  $(v + v_D)$  mora biti manji  $T'$ , te obrnuto.

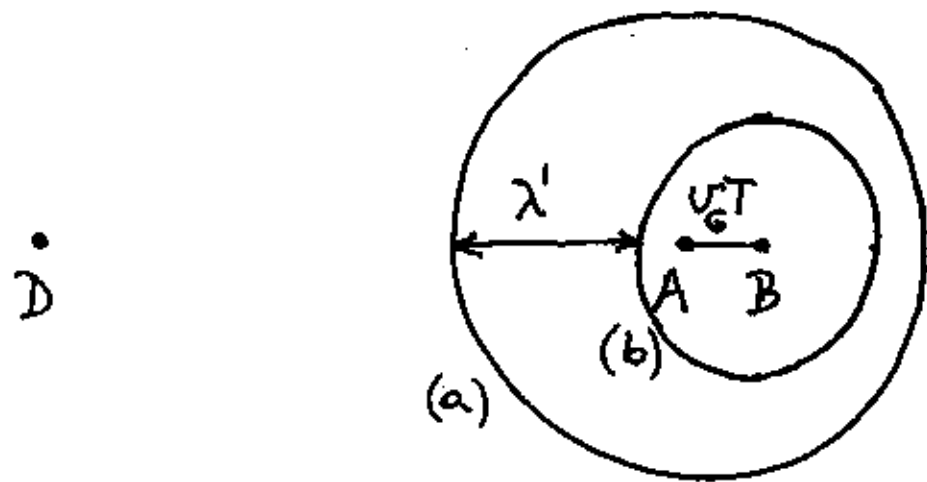
Ako se detektor udaljava od generatora vala, možemo smatrati da je  $v_D$  negativna algebarska veličina te primijeniti opet gorenji izraz za Dopplerov efekt. Alternativno se može promijeniti predznak  $\nu' = \left(1 - \frac{v_D}{v}\right) \nu$ .



U svakom slučaju, uočavamo da detektor koji se udaljava od generatora opaža umanjenju frekvenciju  $\nu' < \nu$ .

b) Detektor miruje a generator se udaljava od njega nekom brzinom  $v_0$

Nacrtajmo samo dvije valne fronte koje se uočavaju razlikuju u fazi za  $2\pi$ .



Valne fronte (b) je emitirana za period titranja  $T$  kasnije od valne fronte (a). Za to vrijeme generator se pomaknuo iz točke A u točku B, tj. prevalio je put  $v_0 T$ . Svake valne fronte širi se brzinom zvučne  $v$  od točke u kojoj je to titranje nastalo. Naime, kada je neko titranje jednom nastalo, ono se dalje širi u valnom sredstvu neovisno o sudbini izvora.

Sa stajališta detektora, prema njemu dolaze valne fronte koje se gibaju brzinom  $v$ , a razmaknute su za valnu duljinu

$$\lambda' = \lambda + v_0 T$$

Moramo odrediti period  $T'$  u kojemu naiđe na detektor uzastopne valne fronte. Budući da je brzina zvučne  $v$  zadana, imamo očito

$$\lambda' = v T'$$

Uvrštavanjem u gornje izraz dobivamo

$$v T' = v T + v_0 T$$

gdje smo ujedno iskoristili izraz  $\lambda = v T$ .

$$T' = \left(1 + \frac{v_0}{v}\right) T$$

$$\nu' = \frac{1}{1 + \frac{v_0}{v}} \nu$$

Ako se izvor udaljava, detektor opaža manju frekvenciju  $\nu' < \nu$ .

Ako se izvor približava, možemo smatrati  $v_0$  negativnom algebarskom veličinom, pa detektor opaža veću frekvenciju  $\nu' > \nu$ .

### c) Gibanje generatora i detektora

Možemo najprije izračunati frekvenciju koju bi opazao mirujući detektor od zvuka koji dolazi iz pokretnog generatora. Zbog te frekvenciju interpretiramo kao da dolazi iz nekog (zamisljenskog) mirujućeg detektora, pa izračunamo iz te frekvencije konačnu frekvenciju koju opazuje pokretni detektor. Na osnovu primjene prethodnih formula daje

$$\nu' = \frac{\nu + \nu_D}{\nu + \nu_G} \nu$$

Iz ove jednačine vidimo da ukoliko je  $\nu_D = \nu_G$ , tj. generator i detektor se gibaju istom brzinama, nema promjene u detektiranoj frekvenciji. Dopplerov efekt se javlja samo ako postoji relativno gibanje detektora prema generatoru.

Brzine  $\nu_D$  i  $\nu_G$  možemo uzimati kao algebarske veličine (pozitivne ili negativne) i dobiti različite slučajeve.

### Napomena:

Postoje ograničenja na primjenu formula za Dopplerov efekt.

a) Ako se detektor udaljava od mirujućeg generatora primjenjuje se izraz  $\nu' = (1 - \frac{|\nu_D|}{\nu}) \nu$  ukoliko je  $|\nu_D| < \nu$ , tj. detektor se udaljava od generatora manjom brzinom nego što putuje val. Kada  $|\nu_D| \rightarrow \nu$ , frekvencija koju opazuje detektor  $\nu' \rightarrow 0$ . Ako se detektor udaljava još većom brzinom  $|\nu_D| > \nu$ , onda on periodički susreće (i prestaje) valne fronte koje su bile udaljenije, pa se stajalište detektora izgleda kao da se val giba u suprotnom smjeru. Tada detektor opazuje frekvenciju  $\nu' = (\frac{|\nu_D|}{\nu} - 1) \nu$

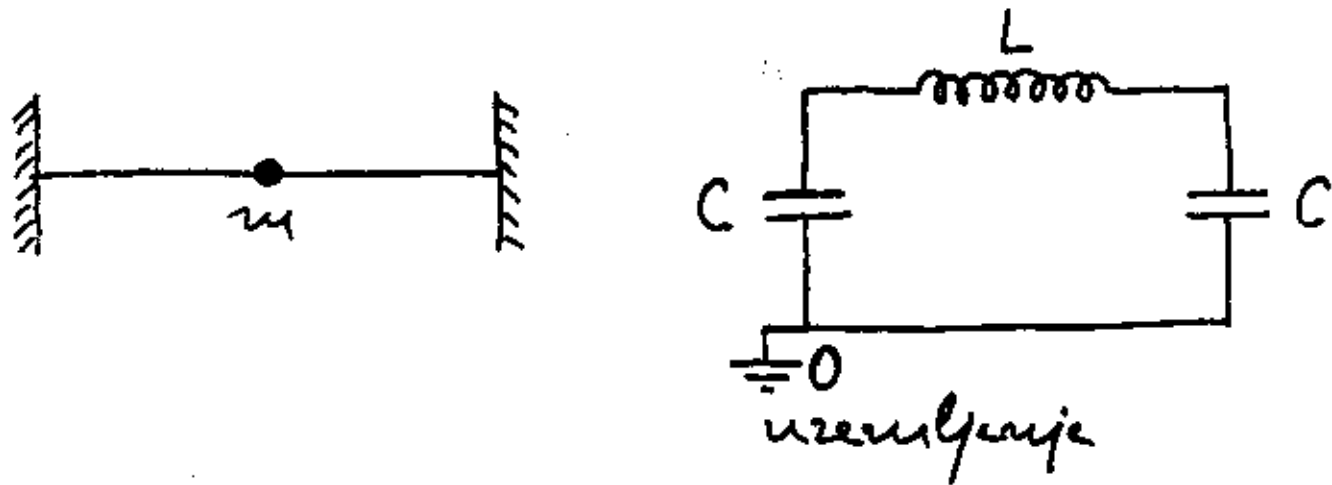
b) Ako se generator giba brzinom  $\nu_G < \nu$  valne fronte ispred njega postaju gušće (kraća valna dužina). Detektor koji bi mirovao ispred generatora opazao bi frekvenciju  $\nu' = \frac{1}{(1 - \frac{|\nu_G|}{\nu})} \nu$ . Za  $\nu_G \rightarrow \nu$  valne fronte se ne mogu više odvojeno formirati, te formula za Dopplerov efekt više ne vrijedi. Doliva se samo fronta proboja generatora kao tijela kroz zrak.

# 6. TITRANJA I VALOVI U ELEKTRIČNIM SUSTAVIMA

## 6.1. Analogija električnog i mehaničkog oscilatora

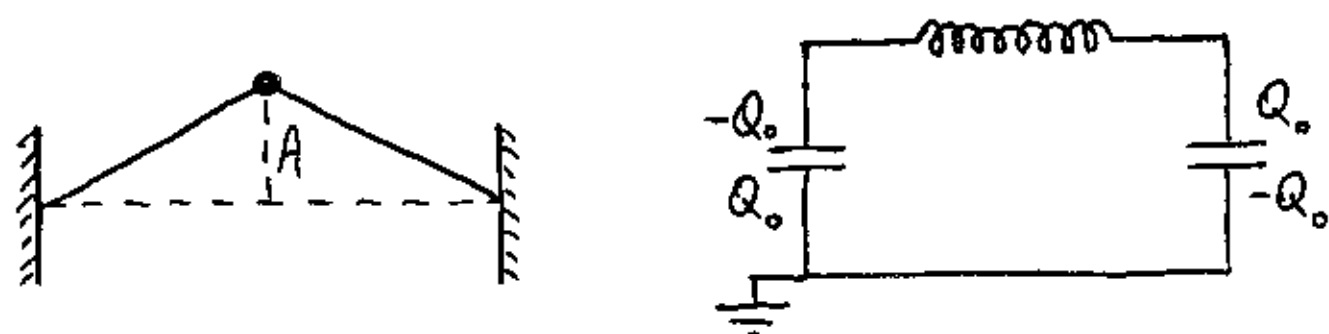
Neka se mehanički oscilator sastoji od čestice i dviju bočnih opruga a električni oscilator od zavojnice i dvaju kondenzatora.

Ravnotežno stanje je ono kod kojeg nema otklona čestice ( $u=0$ ), odnosno nema naboja na kondenzatorima ( $Q=0$ )



Zamislimo da smo vanjskim utjecajem ostvarili neki otklon čestice ( $u=A$ ), odnosno doveli naboje na svaki od kondenzatora ( $Q=Q_0$ )

U trenutku  $t=0$  imamo stanje



### Napomena:

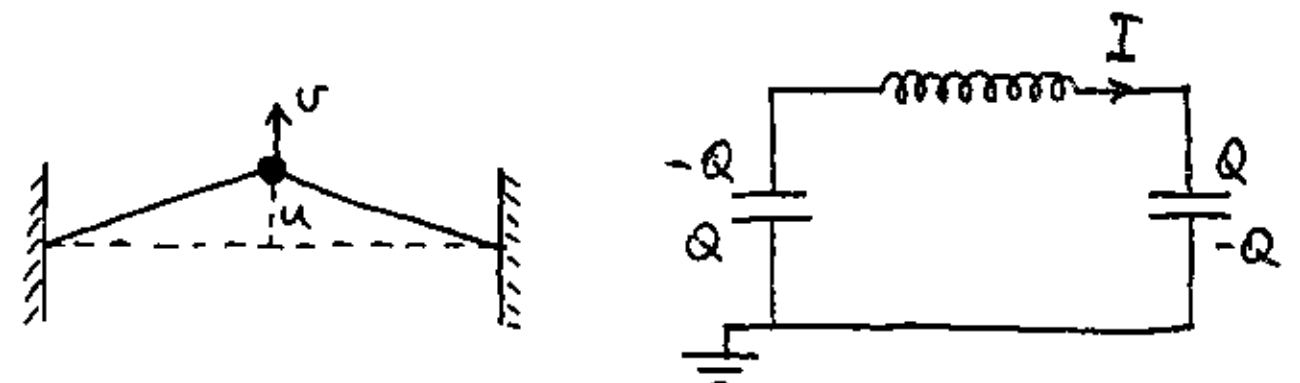
Obje opruge daju povratnu silu na česticu prema ravnome položaju ravnoteže. Kondenzatori moraju biti suprotno nabijeni jer jedino tako može doći do uspostave ravnotežnog stanja ( $Q=0$ ).

Ako nakon početno uspostavljenog stanja pustimo svaki sustav da slobodno titra, čestica naizmjenice ide od otklona  $A$  do  $-A$  i natrag. Naboj na svakome kondenzatoru naizmjenice se mijenja od  $Q_0$  do  $-Q_0$  i obrnuto.

U općenitome trenutku  $t > 0$  čestica ima neki otklon  $u(t)$  i neku brzinu  $v(t) = \frac{du}{dt}$ .

Analogno tome naboj na kondenzatoru je  $Q(t)$  a od jednog kondenzatora prema drugome teče kroz zavojnicu struja  $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ .

Prikažimo stanje u jednome takvom trenutku  $t > 0$



Prihvatno je trenutak u kojemu čestica ide prema maksimalnom otklonu  $A$ . Tada je brzina pozitivna veličina jer se otklon  $u(t)$  povećava.

Ako želimo pratiti analogiju kod električnog oscilatora onda možemo gledati naboj  $Q(t)$  npr. na gornjoj ploči desnog kondenzatora. Struja  $I(t)$ , koja u tome trenutku teče u smjeru naznačenom na skemici, povećava naboj  $Q(t)$  pa je smatrano pozitivnom.

### Napomena:

Opća definicija jakosti struje glasi  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ , gdje je  $\Delta Q$  količina naboja koja protječe kroz poprečni presjek vodiča u intervalu vremena  $\Delta t$ . Zbog nemištivosti naboja, ta ista količina naboja  $\Delta Q$  mora doći i na ploču kondenzatora. Stoga možemo povezivati struju  $I(t)$  s promjenom naboja na kondenzatoru  $\frac{dQ}{dt}$ .

Jednadžba gibanja za mehanički oscilator je II. Newtonov zakon

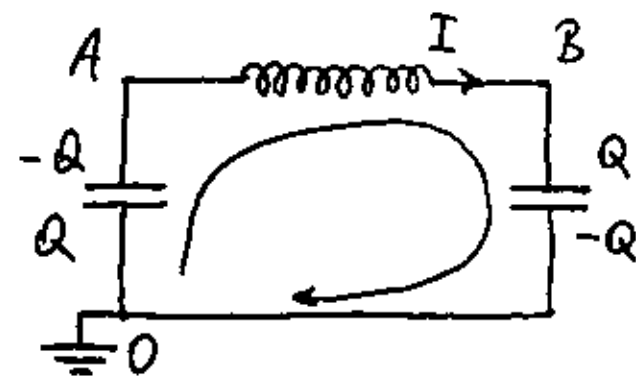
$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -2Ku$$

Rješenje glasi (uz početni uvjet  $u = A$  u  $t = 0$ )

$$u(t) = A \cos \omega_0 t$$

gdje je  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ .

Za električni strujni krug možemo upotrijebiti II. Kirchoffov zakon. Označimo (po volji) smjer obilaska strujne petlje



Krenemo od točke  $O$  (uzemljenje) prema točki  $A$ . Na kondenzatoru imamo pad potencijala (jer idemo od ploče s  $+Q$  na ploču s  $-Q$ ) koji iznosi  $-\frac{Q}{C}$ .

Ako se struja  $I(t)$  mijenja u vremenu onda se na krajevima zavojnice inducira napon  $-L \frac{dI}{dt}$  koji predstavlja pad potencijala od točke  $A$  do točke  $B$ .

Od točke  $B$  preko kondenzatora do točke  $O$  imamo opet pad potencijala  $-\frac{Q}{C}$ .

Ukupno II. Kirchoffov zakon za zatvorenu strujnu petlju daje

$$-\frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

Uzimajući u obzir da je  $I = \frac{dQ}{dt}$  dobivamo

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{2}{C} Q$$

Ova diferencijalna jednačina je po formi identična onoj za mehanički oscilator.

Stoga možemo odmah pisati rješenje (uz početni uvjet  $Q = Q_0$  u  $t = 0$ )

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t$$

gdje je  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$  vlastita frekvencija danog električnog titrajnog kruga.

Usporedbom mehaničkih i električkih jednačini nalazimo analogne veličine

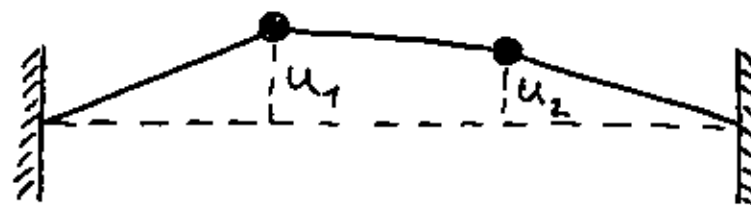
mehaničke	električne
$u(t)$	$Q(t)$
$m$	$L$
$K$	$\frac{1}{C}$
sila opruge $F = -Ku$	$V = -\frac{Q}{C}$ napon na kondenzatoru
brzina $v = \frac{du}{dt}$ čestice	$I = \frac{dQ}{dt}$ struja u petlji

Za struju nalazimo rješenje

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t = I_0 \sin \omega_0 t$$

## 6.2. Sustav s dva i više modova

Kod mehaničkog sustava smo imali općenito ( $u_1 \neq u_2$ )



Jednačine gibanja daje II. Newtonov zakon primijenjen na svaku od čestica

$$m \frac{d^2 u_1}{dt^2} = -Ku_1 - K(u_1 - u_2) = -K(2u_1 - u_2)$$

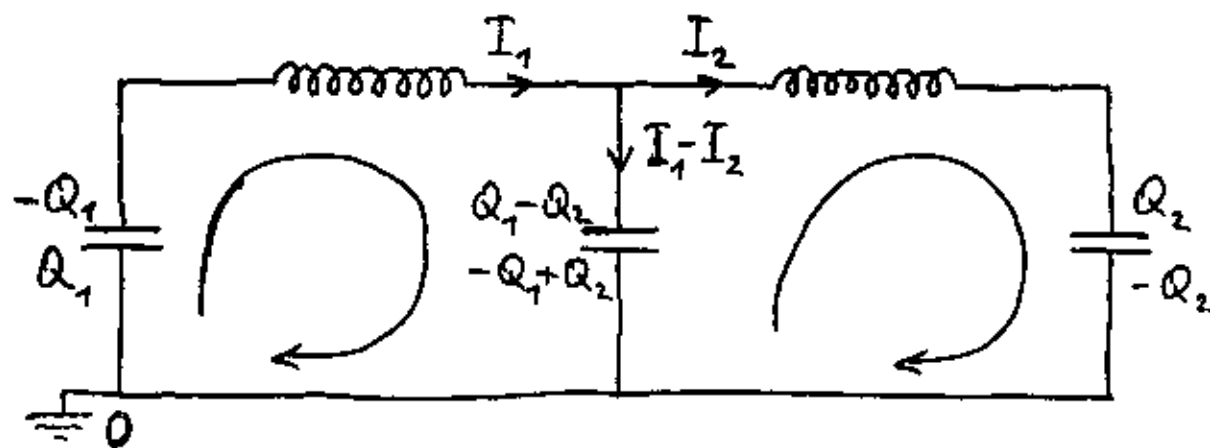
$$m \frac{d^2 u_2}{dt^2} = -K(u_2 - u_1) - Ku_2 = -K(2u_2 - u_1)$$

Rješenja su nam poznata:

a) za prvi mod  $u_1(t) = u_2(t)$  čestice titraju frekvencijom  $\omega^{(1)} = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ,

b) za drugi mod  $u_1(t) = -u_2(t)$  čestice titraju frekvencijom  $\omega^{(2)} = \sqrt{\frac{3K}{m}}$ .

Kod ekvivalentnog električnog sustava imamo općenito ( $Q_1 \neq Q_2$ )



Naponi na triju kondenzatorima ekvivalentni su povratnim silama triju opruga u mehaničkom sustavu.

Primijenimo II. Kirchhoffov zakon na svaku od strujnih petlji:

$$-\frac{Q_1}{C} - L \frac{dI_1}{dt} - \frac{Q_1 - Q_2}{C} = 0$$

$$\frac{Q_1 - Q_2}{C} - L \frac{dI_2}{dt} - \frac{Q_2}{C} = 0$$

Uzimajući u obzir da je  $I_1 = \frac{dQ_1}{dt}$  i  $I_2 = \frac{dQ_2}{dt}$  dobivamo

$$L \frac{d^2 Q_1}{dt^2} = -\frac{1}{C} (2Q_1 - Q_2)$$

$$L \frac{d^2 Q_2}{dt^2} = -\frac{1}{C} (2Q_2 - Q_1)$$

Ove su jednadžbe po formi identične onima za mehanički sustav. Stoga možemo odmah znati rješenja:

a) Za prvi mod  $Q_1(t) = Q_2(t) = Q_0 \cos \omega^{(1)} t$

To ujedno znači da je  $I_1(t) = I_2(t) = I_0 \sin \omega^{(1)} t$ .

Struje mijenjaju iznos i smjer (od  $I_0$  do  $-I_0$ ) frekvencijom prvog moda  $\omega^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ .

U srednjoj grani ne teče struja ( $I_1 - I_2 = 0$ ) pa se srednji kondenzator ne nabija ( $Q_1 - Q_2 = 0$ ).

Ovo ponašanje ekvivalentno je onome kod mehaničkog sustava u kojemu se srednja opruga ne veseće u titranju prvoga moda.

Dakle, titranje prvoga moda u električnom sustavu svodi se na nabijanje i izbijanje krajnjih kondenzatora pomoću izmjeničnih struja.

b) Za drugi mod  $Q_1(t) = -Q_2(t)$ , pa su i struje suprotnog predznaka  $I_1(t) = -I_2(t)$ , tj. teku u suprotnim smjerovima.

Stoga središnjom granom teče dvostruko struja  $I_1 - I_2 = 2I_1 = 2I_0 \sin \omega^{(2)} t$  a središnji kondenzator se nabija  $Q_1 - Q_2 = 2Q_1 = 2Q_0 \cos \omega^{(2)} t$ .

Ponašanje je analogno onome kod mehaničkog sustava u kojemu se središnja opruga veseće dvostruko više nego krajnje kod titranja u drugome modu.

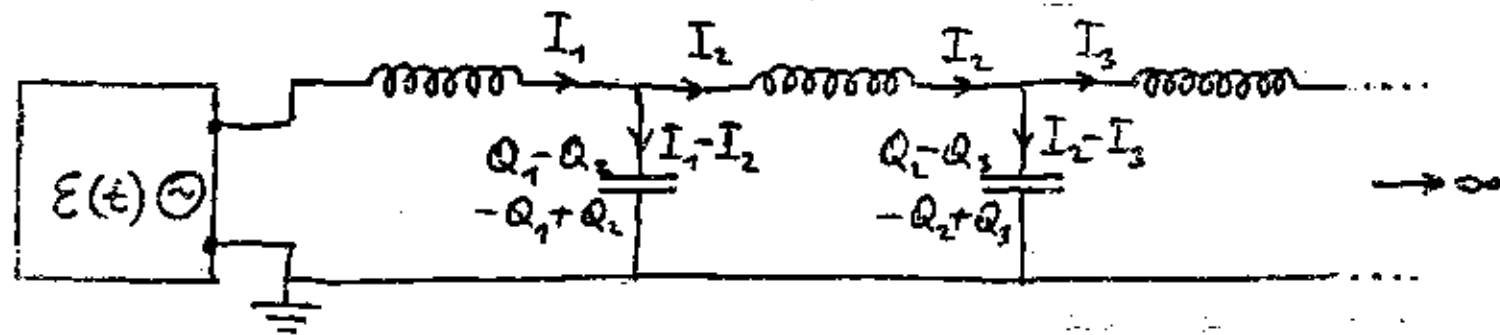
Frekvencija titranja u drugome modu drugog električnog sustava iznosi  $\omega^{(2)} = \sqrt{\frac{3}{LC}}$ .

### Sustavi s više modova

Mogli bismo proširiti električni sustav s dodatnim strujnim petljama i varmetrati analogiju s mehaničkim sustavom od  $N$  čestica s oprugama i odgovarajućim modovima. Ovdje to ne ćemo varmetrati.

### 6.3. Val u beskonačnom sustavu

Neka na jednom kraju imamo izvor električnog sile  $\mathcal{E}(t)$  frekvencije  $\omega$



U jednodimenzionalnom mehaničkom sustavu varijetrali smo pomake  $u_i(t)$  pojedinih čestica. No isto tako mogli smo varijetrali i njihove brzine  $v_i = \frac{du_i}{dt}$ . Opet bismo dobili faznu kašnjenje uzastopnih čestica.

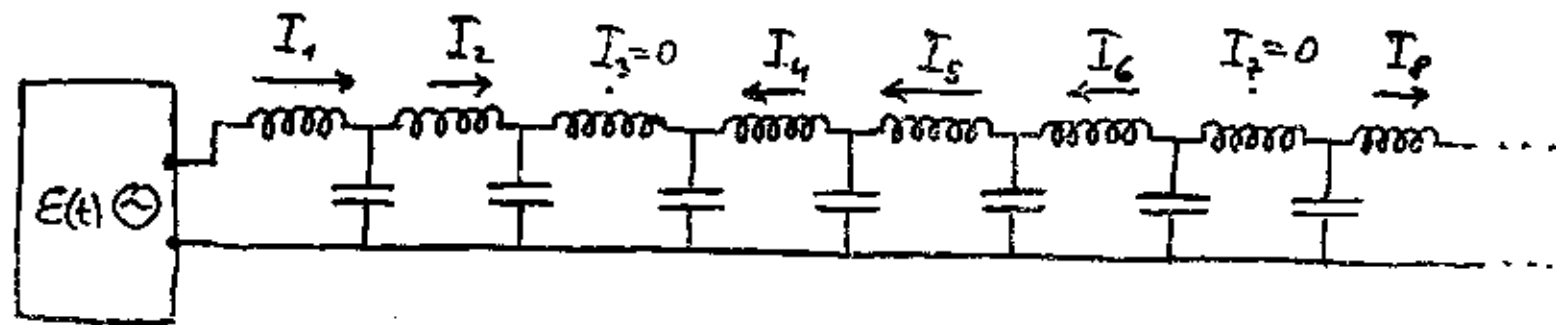
Kod električnog sustava prikladno je varijetrali upravo struje  $I_i(t)$  u uzastopnim zavojnicama. Po analogiji s mehaničkim sustavom dobivamo

$$I_i(t) = I_0 \sin(\omega t - i \Delta\phi) \quad i = 1, 2, \dots, \infty$$

Struja u svakoj zavojnici titra istom frekvencijom  $\omega$  koju varietal izvor te istom amplitudom  $I_0$  ali kasni u fazi za strujom u prethodnoj zavojnici za neki iznos  $\Delta\phi$ . To se naziva strujni val.

Fazna kašnjenje  $\Delta\phi$  je ekvivalent za "ka" u mehaničkom sustavu.

Strujni val možemo predložiti tako da struje označavamo strelicama iznad zavojnica u kojima struja teče. Smjer i veličina strelica označavaju smjer i jakost struje. Prikazimo stanje u nekome trenutku



Neka u tom trenutku struja  $I_1$  ima maksimalnu vrijednost za dani val.

Struja  $I_2$  nije u tome trenutku još dosegla maksimalnu vrijednost.

U ovom primjeru uzeto je  $\Delta\phi = \frac{\pi}{4}$  tako da  $I_3$  kasni za  $I_1$  za  $2\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ , tj. četvrtinu perioda. Stoga je  $I_3 = 0$  u trenutku kada  $I_1$  ima maksimalnu vrijednost.

Daljnje struje imaju trenutne vrijednosti u skladu s uzastopnim faznim kašnjenjem.

U neko kasnijem trenutku struja  $I_2$  dosegne maksimalnu vrijednost, a zatim  $I_3$ , itd.

Širenje strujnog vala u električnom sustavu odvija se u potpunoj analogiji s valom u mehaničkom sustavu.

### Napomena:

U mehaničkom sustavu smo imali geometrijske odnose pa je bilo smisleno uvesti "a" kao razmak između susjednih čestica. Također je bilo moguće govoriti o valnoj duljini  $\lambda$  i valnom broju  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

U električnom sustavu nije uopće važan razmak između zavojnica ili kondenzatora. Stoga "a" i "k" nemaju završnog smisla. Fizikalno je važno jedino faza kašnjenja  $\Delta\phi$  između struje u susjednim zavojnicama.

Dispersijska relacija za električni sustav ima istu formu kao i ona za mehanički sustav. Uz razmjernu analogiju veličina dobivamo

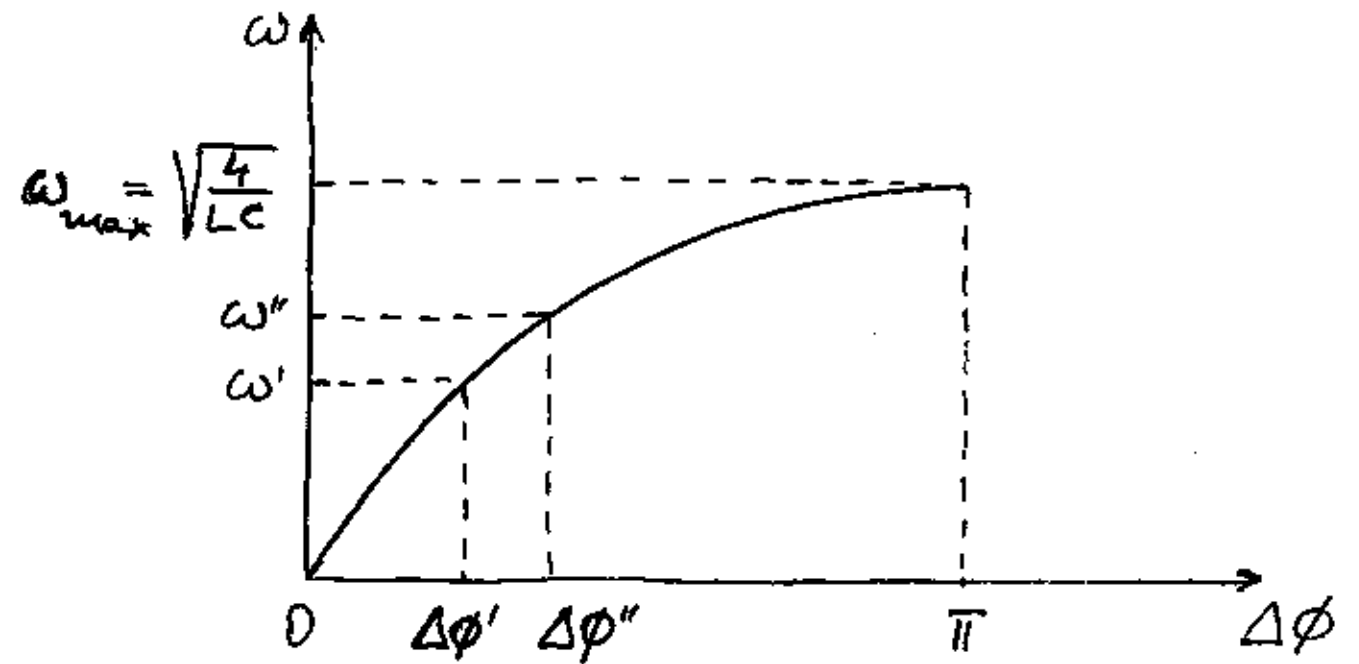
$$\omega = \sqrt{\frac{4}{LC}} \sin \frac{\Delta\phi}{2}$$

Kao što se "ka" u mehaničkom sustavu može mijenjati od 0 do  $\pi$ , tako se i u električnom sustavu može javljati

$$0 < \Delta\phi < \pi$$

↑  
vrlo maleno  
kašnjenje struje  
u uzastopnim  
zavojnicama

↑  
struja u zavojnici  
kasni za polovicu  
perioda bitraja prema  
onoj u prethodnoj



Grada električnog sustava određena je izborom veličina L i C. Dani sustav ima maksimalnu frekvenciju  $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{4}{LC}}$ .

Frekvencija izvora elektromotorne sile određuje fazno kašnjenje struje u uzastopnim zavojnicama ( $\omega' \rightarrow \Delta\phi'$ ,  $\omega'' \rightarrow \Delta\phi''$ , itd.)

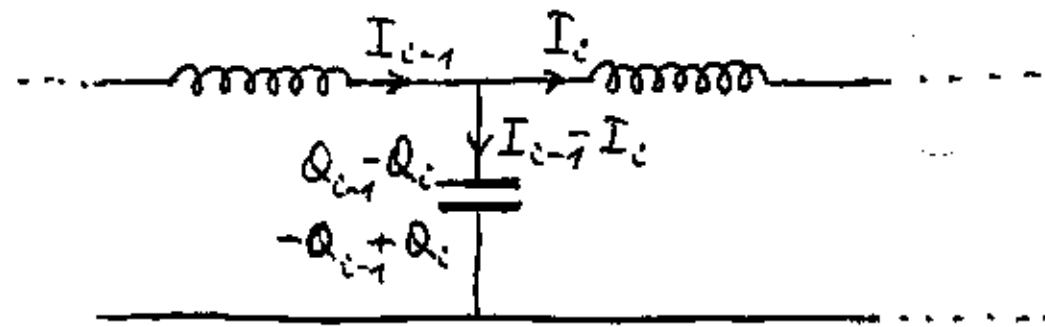
Ako je frekvencija izvora  $\omega > \omega_{\max} = \sqrt{\frac{4}{LC}}$ , onda se kroz električni sustav ne može širiti val takve frekvencije. U tome slučaju, struje  $I_1, I_2, \dots$  su uzastopno u protufazi te imaju eksponencijalno opadajuće amplitude (v. analogiju s mehaničkim sustavom).



## Impedancija električnog sustava

Kod mehaničkog sustava tražili smo odnos između sile koja tjera val od neke čestice pa dalje i pomake te čestice.

Kod električnog sustava tražimo odnos između napona na nekom kondenzatoru i struje u sljedećoj zavojnici od koje se dalje širi strujni val.



Napon na  $i$ -tom kondenzatoru iznosi

$$V_i = \frac{Q_{i-1} - Q_i}{C}$$

Pojedini dopinosi naboju na kondenzatoru nastaju usljed odgovarajućih struja kojima se kondenzator nabija (izbija)

$$I_{i-1} = \frac{dQ_{i-1}}{dt} \Rightarrow Q_{i-1} = \int I_{i-1} dt$$

$$I_i = \frac{dQ_i}{dt} \Rightarrow Q_i = \int I_i dt$$

Prema tome napon na  $i$ -tom kondenzatoru možemo poverati se strujama

$$V_i = \frac{1}{C} \int (I_{i-1} - I_i) dt$$

Zbog faze varlike među uzastopnim strujama, možemo varliku struje izraziti pomoću jedne struje i faznog pomaka (v. analogiju s mehaničkim sustavom)

$$\begin{aligned} I_{i-1} - I_i &= I \{ \sin[\omega t - (i-1)\Delta\phi] - \sin(\omega t - i\Delta\phi) \} = \\ &= -(1 - \cos\Delta\phi)I_i + \frac{\sin\Delta\phi}{\omega} \frac{dI_i}{dt} \end{aligned}$$

Konačno za vezu između napona na  $i$ -tom kondenzatoru i struje u  $i$ -toj zavojnici dobivamo

$$V_i = \underbrace{-\frac{1}{C}(1 - \cos\Delta\phi)}_{Z_d} \int I_i dt + \underbrace{\frac{\sin\Delta\phi}{\omega C}}_{Z_a} I_i$$

Disperzijska komponenta impedancije  $Z_d$  u električnom sustavu poveruje napon  $V_i$  s nabojem  $Q_i$  a apsorpcijska komponenta  $Z_a$  sa strujom  $I_i = \frac{dQ_i}{dt}$ . To je potpuno analogno mehaničkom sustavu (u i  $\frac{du}{dt}$ ).

## Aproksimacija kontinuuma

Od praktičnog interesa je razmotriti slučaj  $\Delta\phi \ll 1$  (tj. jako maleni kašnjenje struje u odnosu prema struji u prethodnoj zavojnici). To znači da imamo mnogo zavojnica sa strujama farno raspodijeljenim unutar jednog perioda od  $2\pi$  (v. analogiju s mehaničkim sustavom).

Impedancija je u tome slučaju

$$Z_a \approx 0$$

$$Z_a \approx \frac{\Delta\phi}{\omega C} = Z \quad (\text{izostavljamo indeks "a"})$$

Koristeći se disperzijskom relacijom za slučaj  $\Delta\phi \ll 1$

$$\omega \approx \sqrt{\frac{4}{LC}} \frac{\Delta\phi}{2} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Delta\phi$$

dobivamo za impedanciju električnog sustava građenog od  $L$  i  $C$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Dakle, za  $\Delta\phi \ll 1$  napon  $V_i$  i struja  $I_i$  su u fazi

$$V_i = Z I_i$$

Jedinica za impedanciju je  $\frac{1V}{1A} = 1\Omega$ .

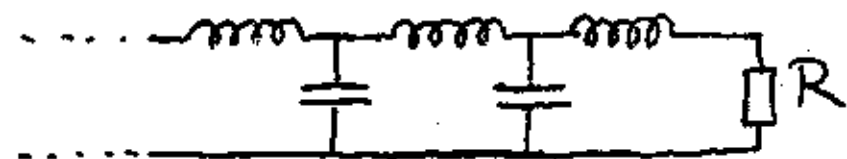
## Napomena:

U navedeni električni sustav nisimo uključili otpornike (dovodne žice i žice od kojih su načinjene zavojnice idealizirali smo kao da nemaju ovisnog otpora).

Impedancije prikazanog električnog sustava naprosto znači da je za tjeranje vala struje potreban neki napon (v. analogni odnos između  $F$  i  $\frac{du}{dt}$  kod mehaničkog sustava).

Vidimo da se impedancija u prikazanom električnom sustavu izražava u istim jedinicama kao električni otpor ( $1\Omega$ ), no to ne znači da se električna snaga pretvara u toplinu nego se snaga prenosi putem strujnoga vala duž električnog valnog sredstva.

U idealiziranom beskonačnom valnom sredstvu ta snaga odlazi u beskonačnost. Ako na nekome mjestu završava valno sredstvo nekim ovisnim otpornikom



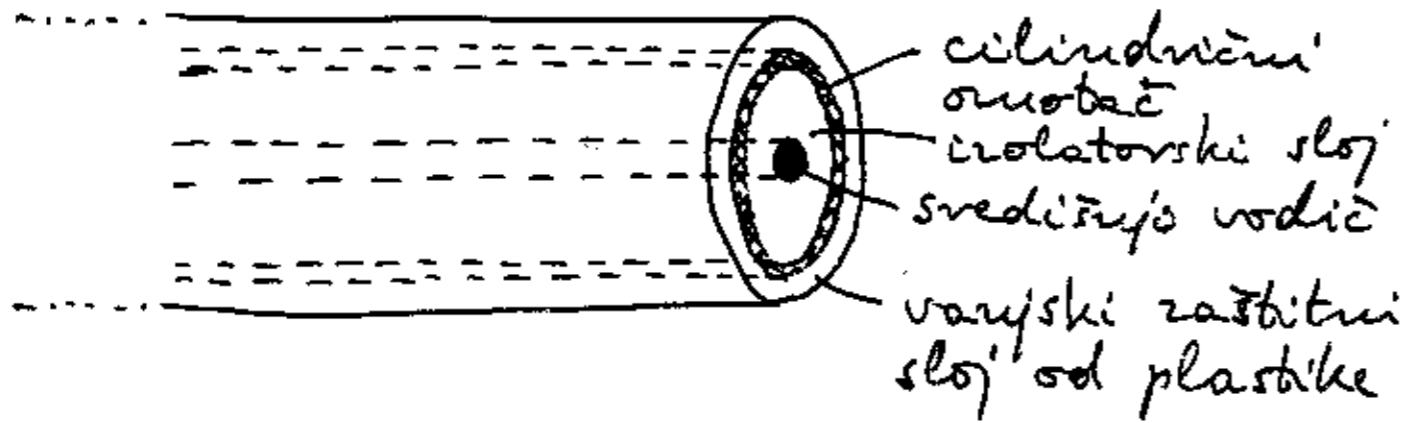
te ako je njegov otpor upravo jednak impedanciji valnog sredstva ( $R=Z$ ) onda se u njemu snaga potpuno apsorbira (savršeni završetak).

## 6.4. Prijenosne linije

Prijenosne linije su kablovi koji služe za prijenos visokofrekventnih signala npr. u telekomunikacijama, kompjuterskim mrežama i mjernim instrumentima koji rabe visoke frekvencije.

Prijenosnu liniju čine dva vodiča kod kojih je geometrija stalna duž linije.

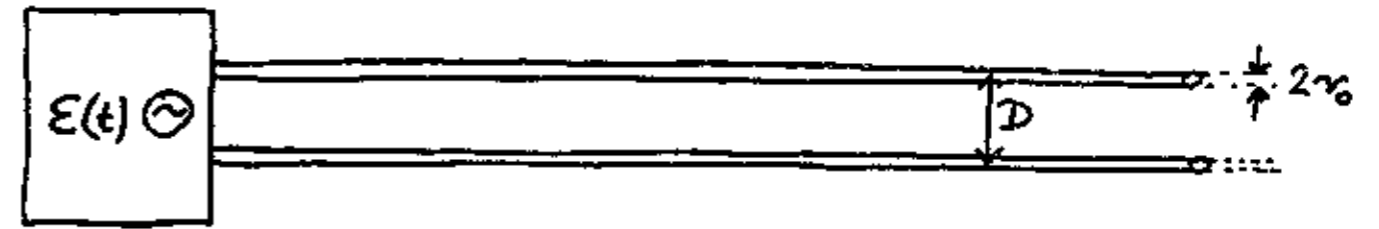
Najčešća prijenosna linija je koaksijalni kabel koji se sastoji od središnjeg vodiča (žica) i cilindričnog omotača od plnene žice. Između njih se nalazi izolatorski sloj.



U koaksijalnom kablov je omjer radiusa cilindričnog omotača i središnjeg vodiča konstantan duž linije. Taj omjer određuje impedanciju koaksijalnog kablov kao prijenosne linije.

Također se kao prijenosna linija rabi par žica postavljenu u izolatorsku traku tako da razmak između žica bude stalan duž linije.

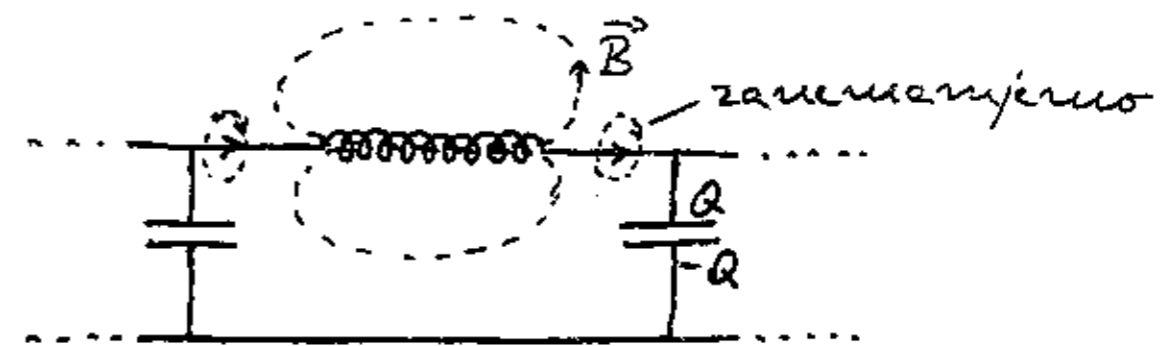
Sustav para usporednih vodiča je jednostavniji za teorijsku analizu pa ćemo njega obraditi.



Na izvor izmjenične elektromotorne sile priključena su dva vodiča radiusa  $r_0$  razmaknuta na udaljenost  $D$ .

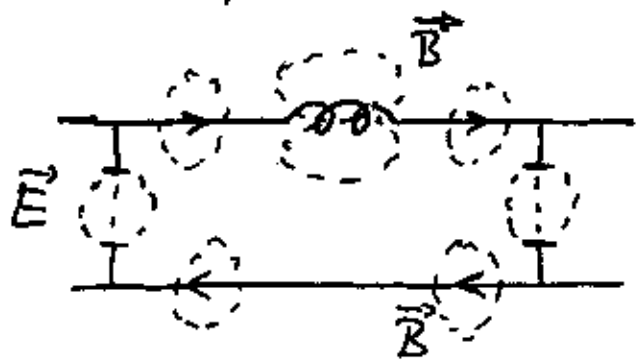
Postoji li u tom sustavu neki  $L$  i  $C$  pa sukladno tome i neki val struje?

U prethodnome odjeljku 6.3. razmatrali smo sustav sa zavojnicama. Ako je broj zavoja velik onda je magnetsko polje u zavojnici mnogo veće od onoga oko dovodnih žica pa potonje zanemarujemo.



Također, naboji se gomilaju na pločama kondenzatora a one su blizu jedna drugoj pa je električno polje između njih puno veće nego između dovodnih žica te potonje možemo zanemariti (tj. zanemarimo doprinos dovodnih žica ukupnom kapacitetu sustava).

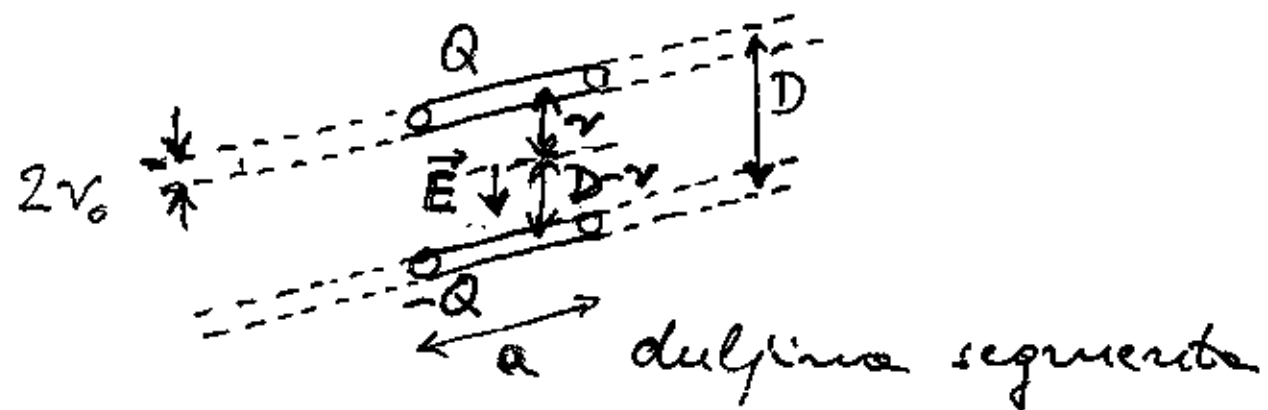
Završimo da zavojnice imaju sve manji broj zavoja, a ploče kondenzatora sve manju površinu i da se razmiču



Tada moramo početi voditi računa o polju što ih stvaraju dovodne žice.

Kada nestane zavojnice i kondenzatori ostanu samo dvije paralelne žice. To je prijenosna linija.

Razmotrimo mali segment prienosne linije



$\frac{Q}{a}$  - linijska gustoća naboja

$$E(r) = \frac{\frac{Q}{a}}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\frac{Q}{a}}{2\pi\epsilon_0 (D-r)}$$

električno polje u točki koje je udaljena za r od gornjeg vodiča

Napon između dva vodiča (od površine do površine)

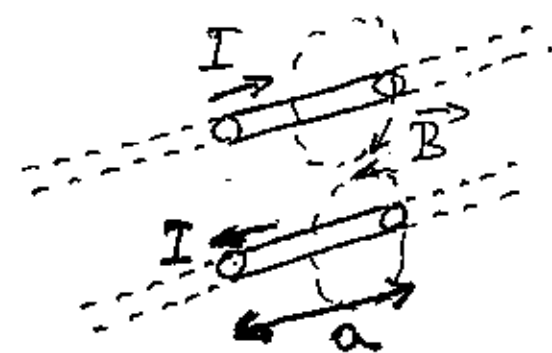
$$V = \int_{r_0}^{D-r_0} E(r) dr = \frac{Q}{a} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} 2 \ln \frac{D-r_0}{r_0}$$

Možemo uvesti veličinu

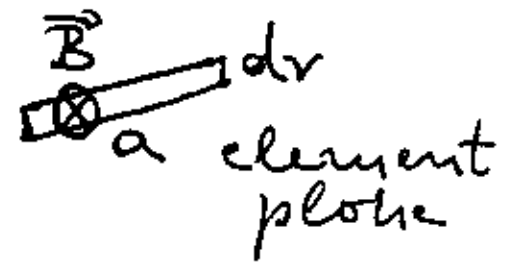
$\frac{C}{a}$  - kapacitet po jedinici duljine

$$\frac{Q}{a} = \frac{C}{a} V \Rightarrow \frac{C}{a} = \pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{D-r_0}{r_0}}$$

Razmotrimo sada magnetsko polje u istome segmentu linije



između vodiča



$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (D-r)}$$

doprinosi dviju struja se zbrajaju

Magnetski tok između dva vodiča (unutar segmenta) iznosi

$$\Phi = \int_{r_0}^{D-r_0} B(r) dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a 2 \ln \frac{D-r_0}{r_0}$$

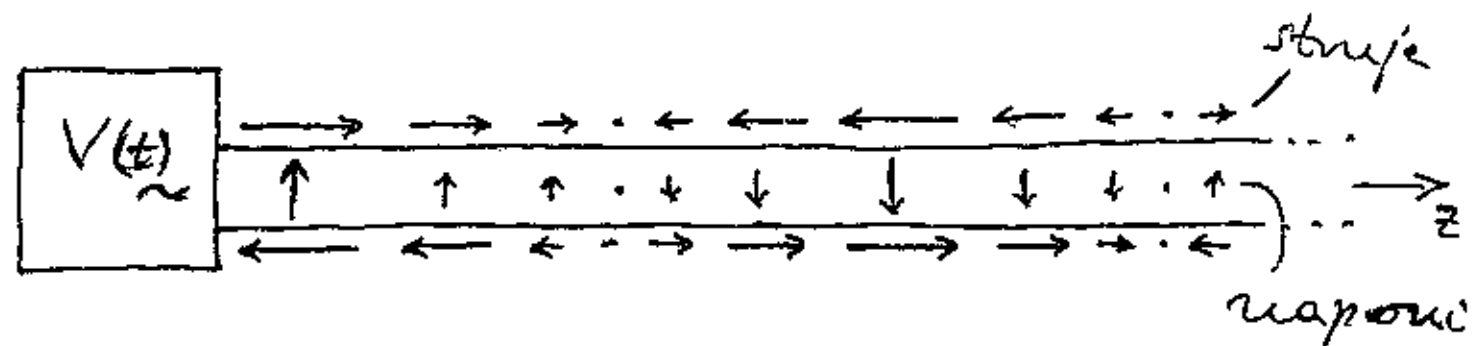
$dS = a dr$  element plohe

Uvedimo veličinu

$\frac{L}{a}$  - samoindukcija po jedinici duljine

$$\frac{\Phi}{a} = \frac{L}{a} I \implies \frac{L}{a} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D-r_0}{r_0}$$

Sada možemo razmotriti električni val u (beskonačnoj) prijenosnoj liniji



Možemo smatrati da se linija sastoji od segmenta duljine "a".

Ako uzmemo granični slučaj  $a \rightarrow 0$ , fazno kašnjenje postaje kontinuirano

$$i \Delta \phi \rightarrow kz$$

Kod prijenosne linije veličine "k" i "z" imaju realan smisao (kao kod mehaničkog kontinuuma)

$$I(z, t) = I_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$V(z, t) = V_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{LC}} \sin \frac{ka}{2} \xrightarrow{ka \ll 1} \omega \approx \sqrt{\frac{4}{LC}} \frac{ka}{2} = \sqrt{\frac{1}{\frac{L}{a} \frac{C}{a}}} k$$

Prema analogiji s mehaničkim kontinuumom  $\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k$  nalazimo

$$T \leftrightarrow \frac{1}{\frac{L}{a}}$$

$$\rho \leftrightarrow \frac{L}{a}$$

Za prijenosnu liniju vrijedi

$$\frac{L}{a} \frac{C}{a} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D-r_0}{r_0} \pi \epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{D-r_0}{r_0}} = \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\omega = ck$$

brzina svjetlosti

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c$$

U prijenosnoj liniji val struje i napona širi se brzinom svjetlosti.

Impedancija prijenosne linije

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0 L}{\epsilon_0 C}}$$

Analogija s mehaničkim sustavom  $Z = \sqrt{T\rho}$  je zadovoljena.

Za prienosnu liniju dobivamo

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\pi} \ln \frac{D-r_0}{r_0}$$

impedancija za par jednakih usporodnih žica

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega \quad \text{važna konstanta}$$

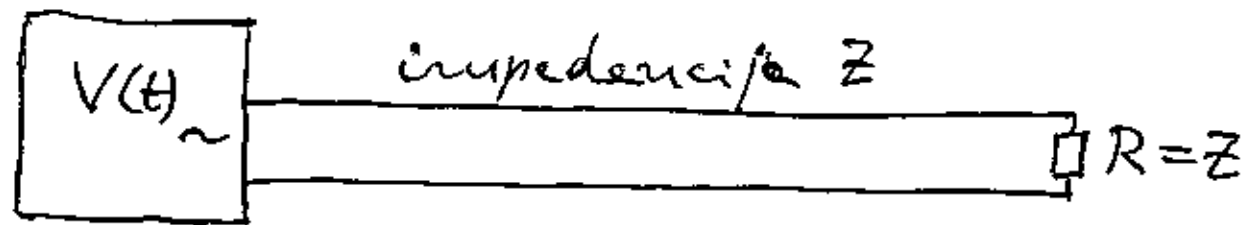
Impedancija prienosne linije ovisi o radiusu žice  $r_0$  i razmaku  $D$  između žica (računamo od ose do ose žice).

$$D > 2r_0 \Rightarrow \frac{D-r_0}{r_0} > 1 \Rightarrow Z > 0$$

Impedancija je uvijek pozitivna veličina.

### Savršeni završetak

U prienosnoj liniji imamo  $V = ZI$ , gdje se  $Z$  mjeri u omima. Ako na kraju prienosne linije priključimo otpor  $R = Z$ , na njemu je  $V = RI$  pa smo ostvarili savršeni završetak



Otpor  $R = Z$  naziva se još i zaključni otpor za danu prienosnu liniju.

### Refleksija

Ako stavimo na kraj linije otpor  $R' \neq Z$  dobivamo refleksiju struje

$$\frac{I_r}{I_u} = \frac{Z - Z'}{Z + Z'} \quad (Z' = R' \text{ u savršeni završetak})$$

Ako promatramo reflektirani napon

$$\frac{V_r}{V_u} = - \frac{Z - Z'}{Z + Z'}$$

### Posebni slučajevi:

a)  $R' = 0$  (kratak spoj)

$$\frac{I_r}{I_u} = 1 \quad \text{struja ima trbuč na kratkome spoju}$$

$$\frac{V_r}{V_u} = -1 \quad \text{napon ima čvor na kratkome spoju}$$

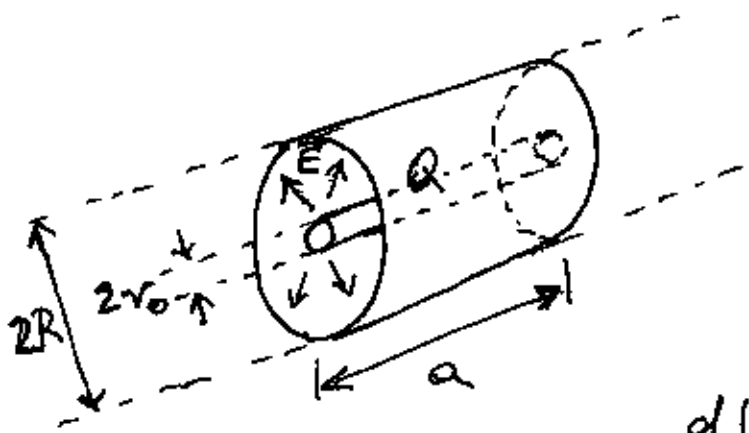
b)  $R' = \infty$  (otvoreni kraj)

$$\frac{I_r}{I_u} = -1 \quad \text{na otvorenome kraju struja ne teče (čvor)}$$

$$\frac{V_r}{V_u} = 1 \quad \text{napon je maksimalan (trbuč) na otvorenome kraju}$$

## Račun za koaksijalni kabl

Prema analogiji s parom usporudnih žica, provedimo račun za segment koaksijalnog kabla



$Q$  - naboj na segmentu unutarnjeg vodiča

$\frac{Q}{a}$  - linijska gustoća

$dU = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$  promjena potencijala duž  $\vec{r}$

$$U_R - U_{r_0} = - \int_{r_0}^R \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{r_0}^R \frac{\frac{Q}{a}}{2\pi\epsilon_0 r} dr = - \frac{\frac{Q}{a}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r_0}$$

Napon  $V$  je apsolutna vrijednost razlike potencijala

$$V = \frac{\frac{Q}{a}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r_0}$$

### Napomena:

U praksi se oklop radijusa  $R$  uvijek uzemljuje ( $U_R = 0$ ), pa je središnji vodič na potencijalu  $U_{r_0} = \frac{\frac{Q}{a}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r_0} = V$ .

Kod koaksijalnog kabla također uodimo veličinu

$\frac{C}{a}$  - kapacitet po jedinici duljine

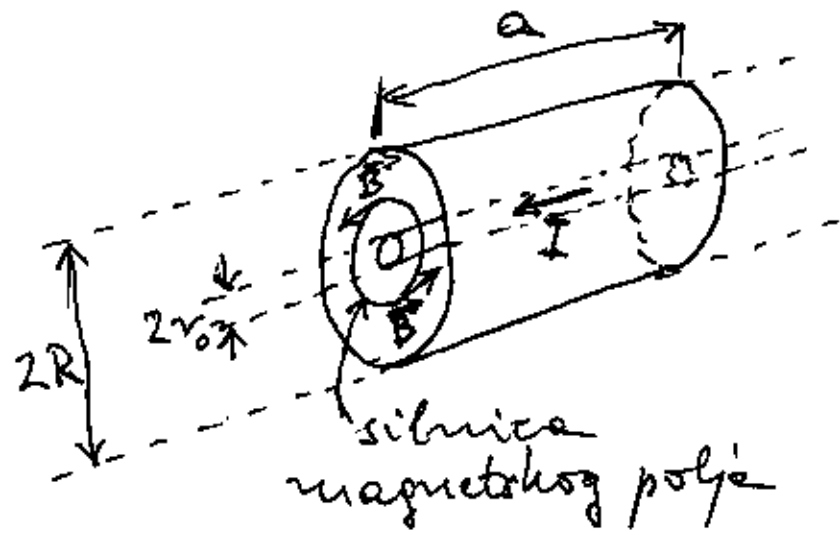
$$\frac{Q}{a} = \frac{C}{a} V \Rightarrow \frac{C}{a} = 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{R}{r_0}}$$

### Napomena:

Dodatni račun za koaksijalni kabl proveden je uz pretpostavku da se između središnjeg vodiča i oklopa nalazi vakuum (ili zrak). Međutim, to je u praksi neodrživa konstrukcija. U realnoj izvedbi stavlja se dielektrik oko središnjeg vodiča, a oko dielektrika se navlači mrežica (oklop). Električno polje u dielektriku je umanjeno za  $\epsilon_r$  (relativna permitivnost dielektrika) u odnosu prema električnom polju koje bi bilo na istome mjestu kada ne bi bilo dielektrika. U slučaju koaksijalnog kabla s dielektrikom, električno polje i kapacitet iznose

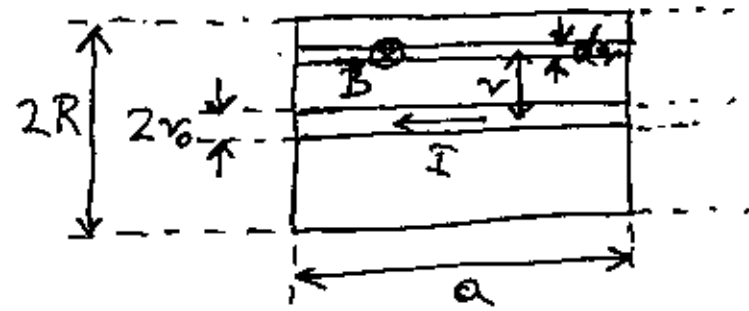
$$E = \frac{\frac{Q}{a}}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 r} \Rightarrow \frac{C}{a} = 2\pi\epsilon_r\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{R}{r_0}}$$

Razmotrimo sada struju  $I$  u istome segmentu i odgovarajuće magnetsko polje između središnjeg vodiča i oklopa.



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{magnetsko polje na udaljenosti } r$$

uzdužni presjek



$$d\Phi_B = B dS = B a r dr \quad \begin{matrix} \text{element} \\ \text{magnetskog toka} \\ \uparrow \\ \text{element površine} \end{matrix}$$

Ukupen magnetski tok kroz površinu od  $r_0$  do  $R$  u dužini  $a$

$$\Phi_B = \int_{r_0}^R B a r dr = \int_{r_0}^R \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0}{2\pi} I a \ln \frac{R}{r_0}$$

Uvodimo veličinu

$\frac{L}{a}$  - samoindukcija po jedinici dužine

$$\frac{\Phi_B}{a} = \frac{L}{a} I \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{r_0}$$

Napomena:

Dielektrik koji se radi kod koaksijalnih kablova nije magnetski, pa se magnetsko polje ne treba uводити  $\mu_r$  (relativna permeabilnost).

Za disperzijsku relaciju dobivamo isti izraz kao ranije

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\frac{L}{a} \frac{C}{a}}} k$$

$$\frac{L}{a} \frac{C}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R}{r_0} 2\pi \epsilon_r \epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{R}{r_0}} = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_0 = \frac{\epsilon_r}{c^2}$$

$$\boxed{\omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} k}$$

(Tipične vrijednosti za dielektrik su  $\epsilon_r \approx 2-3$ )

$$\begin{matrix} v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \\ v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \end{matrix}$$

U koaksijalnom kablu val struje i napona širi se brzinom koja je manja od brzine svjetlosti za  $\sqrt{\epsilon_r}$ .

Impedancija koaksijalnog kabla iznosi

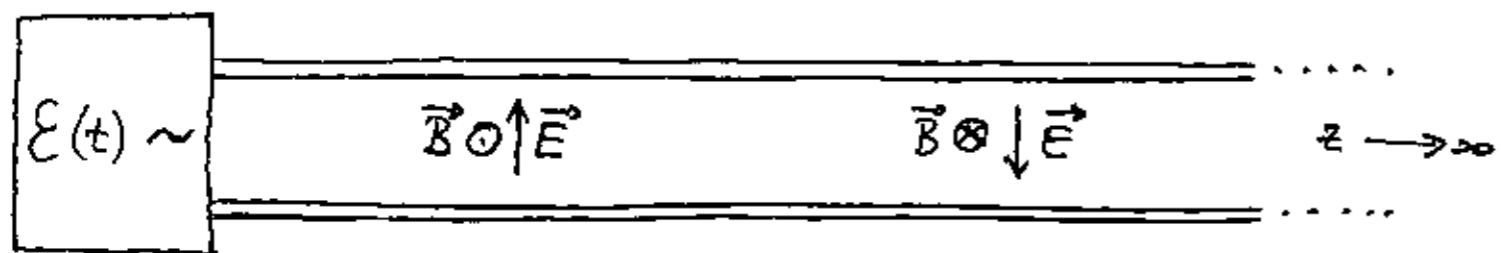
$$Z = \sqrt{\frac{L/C}{a/a}} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r_0}}}$$

Najviše se upotrebljavaju koaksijalni kablovi koji imaju impedanciju  $Z = 50 \Omega$ .



# 7. ELEKTROMAGNETSKI VALOVI

Kod prijenosne linije s dvije paralelne žice (prethodno poglavlje) upormali sinus val struje i napona. Ujedno se oko vodiča javljaju električno i magnetsko polje, pa možemo govoriti i o elektromagnetskom valu.



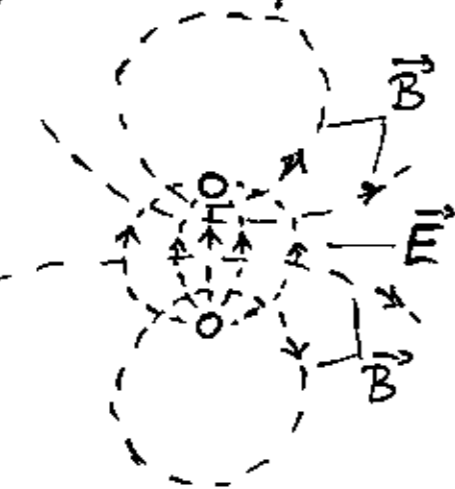
prikaz stanja u nekome trenutku  $\frac{\lambda}{2}$

Na udaljenosti  $\frac{\lambda}{2}$  polja su u protufazi (kao što su u protufazi i struje odnosno naponi na tim mjestima).

U kasnijem trenutku dotična faza titranja pomakne se duž osi  $z$ . Imamo  $v_{\varphi} = v_g = c$ .

Prikažimo polja u popničnom presjeku govoreći transverzalnoj liniji

prikaz stanja u nekome trenutku



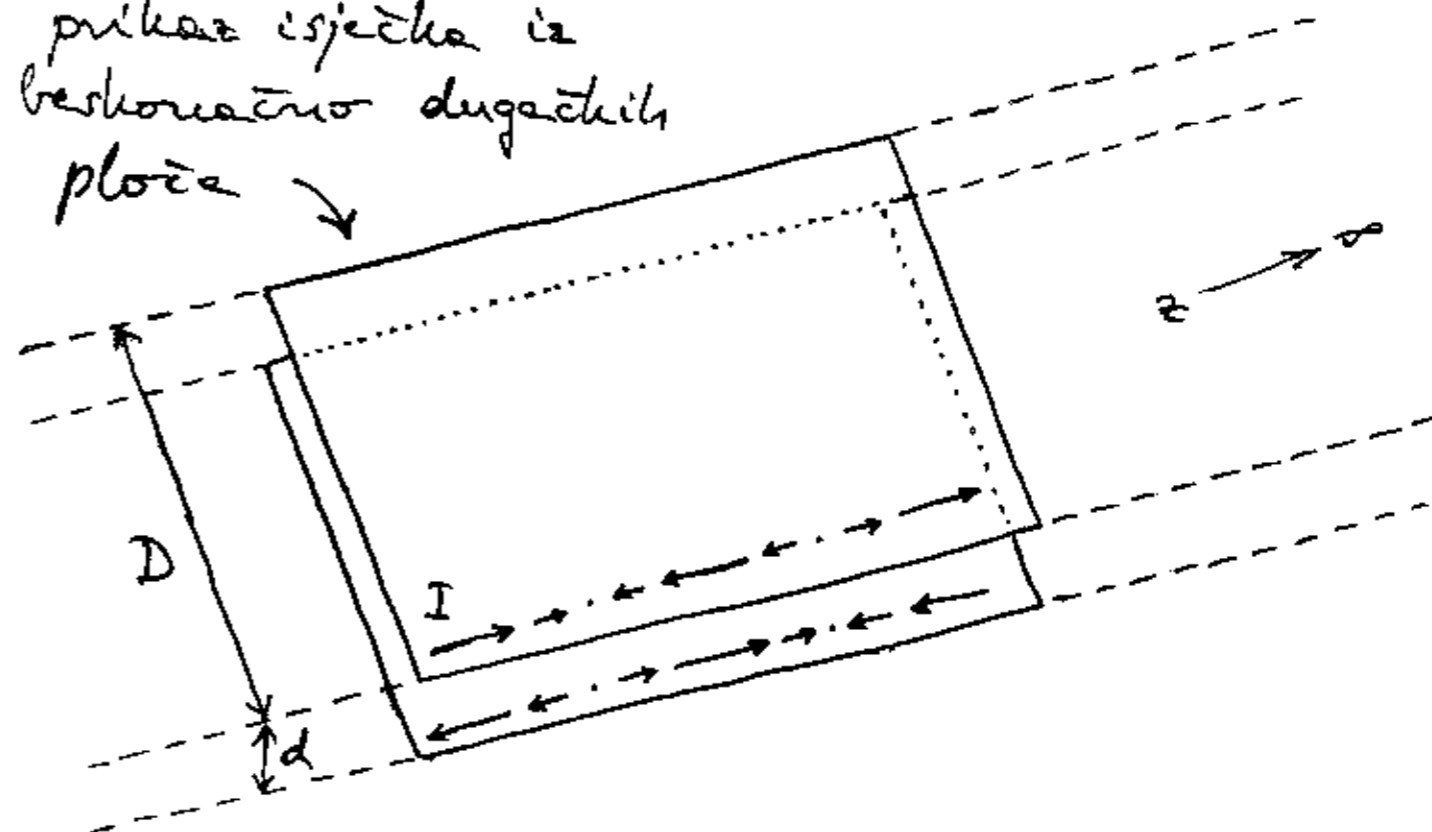
Zbog geometrijskih razloga  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  nisu homogeni u prostoru oko dviju žica.

Ako želimo dobiti  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  kao ravan val (po analogiji s mehaničkim ravnim valom) moramo napraviti prijenosnu liniju drugačije geometrije.

## 7.1. Val između paralelnih ploča

Razmotrimo prijenosnu liniju koja se sastoji od dviju paralelnih ploča širine  $D$ , razmaknute za iznos  $d$ , te beskonačne duljine (duž osi  $z$ ).

prikaz isjeka iz beskonačno dugachih ploča



Pretpostavljamo da je na  $z=0$  postavljen izvor izmjenične elektromotorne sile  $E(t)$  frekvencije  $\omega$  pa se duž prijenosne linije širi val struje i napona

Uzimamo da struja ima istu jakost u svim  
točkama duž širine ploče  $D$  (za dani  $z$ ) pa  
val struje i napona pišemo

$$I(z,t) = I_0 \sin(\omega t - kz)$$

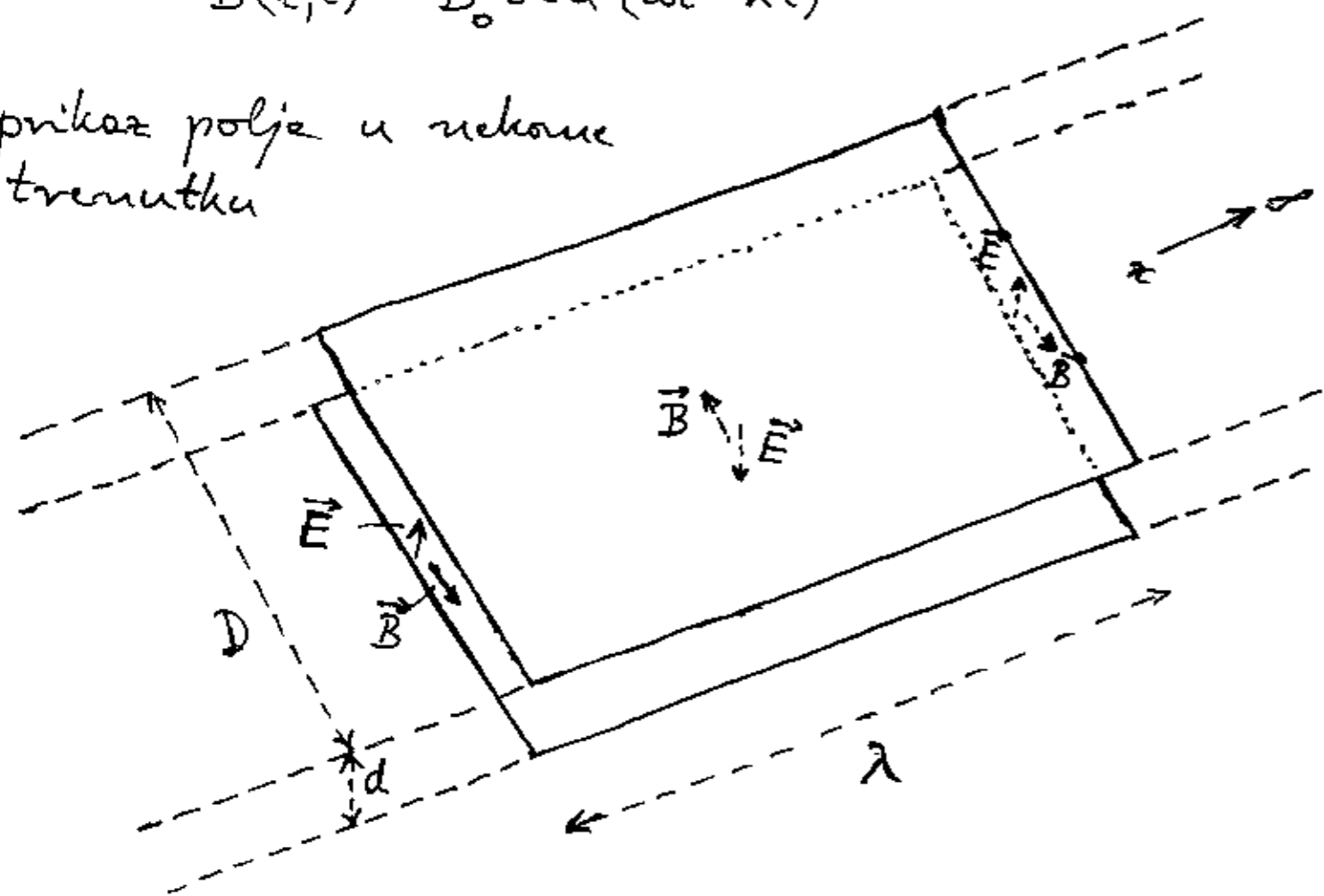
$$V(z,t) = V_0 \sin(\omega t - kz)$$

Struja uvijek stvara magnetsko polje oko vodiča  
a napon je uvijek vezan uz električno polje.  
Zato imamo elektromagnetski val.

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kz)$$

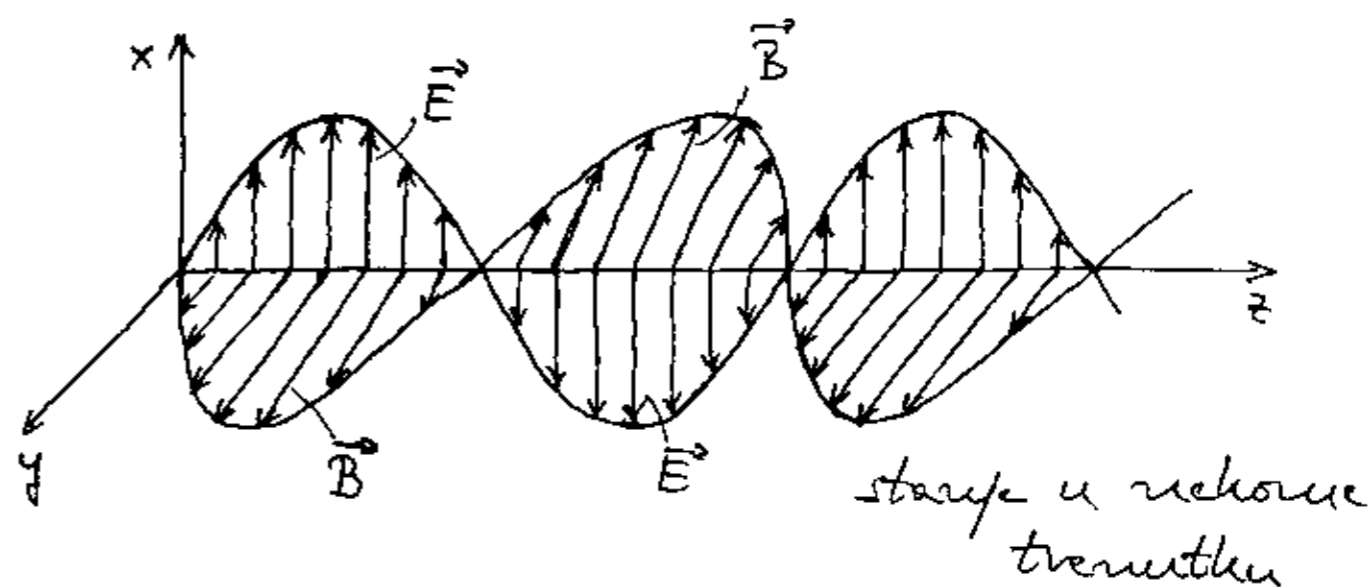
$$\vec{B}(z,t) = \vec{B}_0 \sin(\omega t - kz)$$

prikaz polja u nekom  
trenutku



Ako je  $d \ll D$  (ploče su blizu jedna drugoj u usporedbi  
s vijakovom širinom) polje su homogena duž  
širine  $D$  (osim blizu rubova).

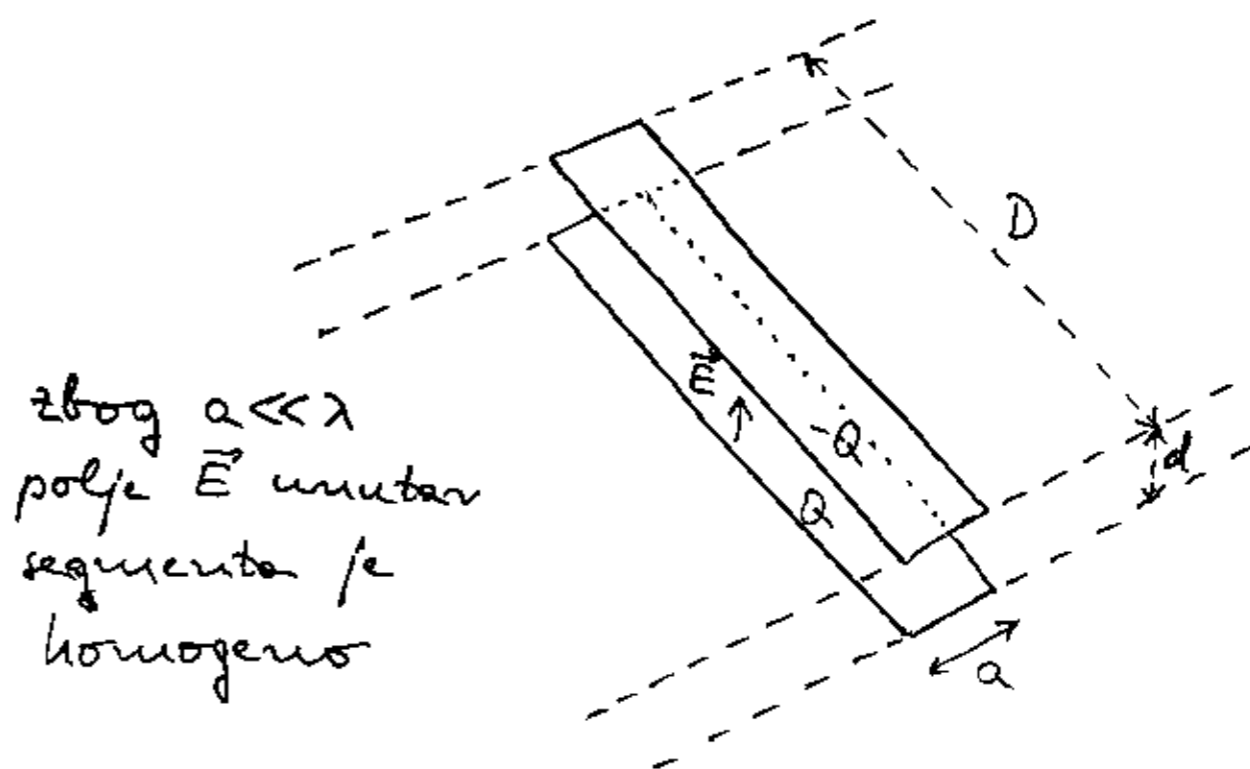
Možemo prikazati polja u raznim točkama  
duž osi  $z$  između ploča transmisijske linije



U kasnijem trenutku faza titranje se pomiče  
duž osi  $z$ .

Izvedimo odnose koji vrijede za transmisijsku  
liniju s paralelnim pločama.

Razmotrimo jedan segment duljine " $a$ " koji  
je mnogo kraći od valne duljine ( $a \ll \lambda$ ).



Polje  $E$  računamo kao kod idealnog kondenzatora

$$E = \frac{\text{plošna gustoća naboja}}{\epsilon_0} = \frac{\frac{Q}{Da}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 Da}$$

Razlika potencijala između ploča iznosi

$$V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 Da}$$

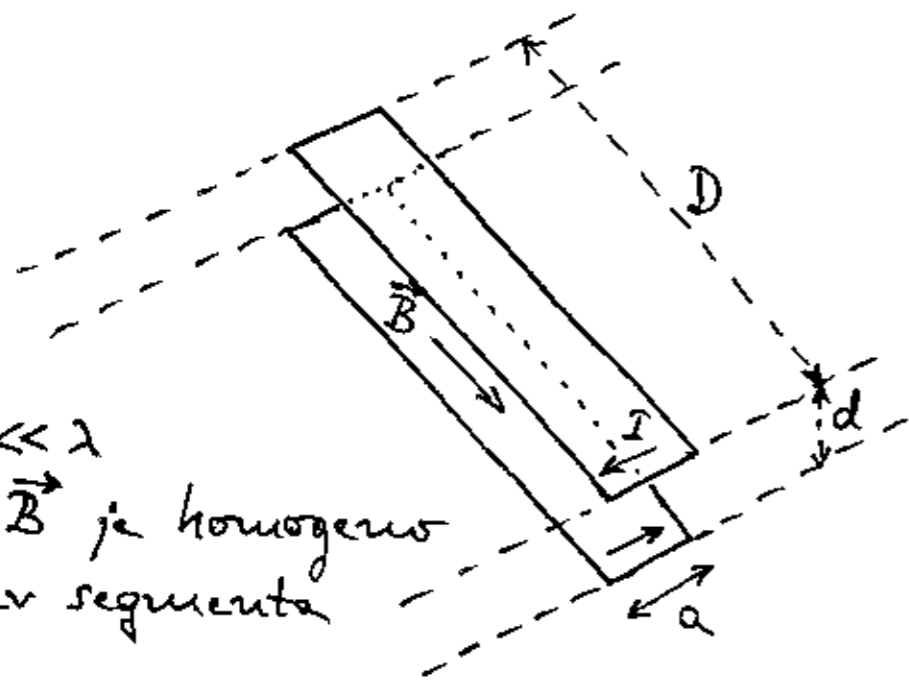
Iz jednačine kondenzatora  $Q = CV$  slijedi

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{D}{d} a \quad \text{kapacitet segmenta}$$

Za prienosnu liniju je važna veličina

$$\frac{C}{a} = \epsilon_0 \frac{D}{d} \quad \text{kapacitet linije po jedinici dužine}$$

Izračunamo i magnetske veličine.



za  $a \ll \lambda$   
polje  $\vec{B}$  je homogeno  
unutar segmenta

Ukupna struja  $I$  jednolika je razmazana duž  
čitave širine  $D$  tako da imamo veličinu

$$\frac{I}{D} = \text{plošna gustoća struje}$$

Magnetsko polje  $B$  između ploča iznosi

$$B = \mu_0 \frac{I}{D}$$

Zamislimo presjek segmenta okomito na  
srujev polje  $\vec{B}$ . Površina presjeka je " $da$ "  
te kroz njege prolazi magnetski tok

$$\Phi = Bda$$

Iz ovog odnosa  $\Phi = LI$  slijedi

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \frac{I}{D} da}{I} = \mu_0 \frac{d}{D} a \quad \text{samoindukcija segmenta}$$

Za prienosnu liniju je važna veličina

$$\frac{L}{a} = \mu_0 \frac{d}{D} \quad \text{samoindukcija po jedinici dužine linije}$$

Prema tome imamo disperzijsku relaciju

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\frac{L}{a} \frac{C}{a}}} k = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \frac{d}{D} \epsilon_0 \frac{D}{d}}} k = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} k = ck$$

Za formu i grupnu brzinu elektromagnetskog vala dobivamo

$$v_{\varphi} = v_g = c$$

U prijenosnoj liniji građenoj od paralelnih ploča elektromagnetski val (ili ekvivalentno val struje i napona) širi se brzinom svjetlosti.

Za impedanciju ove prijenosne linije dobivamo

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \frac{d}{D}}{\epsilon_0 \frac{D}{d}}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}_{377 \Omega} \frac{d}{D}$$

Za  $d \ll D$  impedancija prijenosne linije mnogo je manja od  $377 \Omega$ .

Impedanciju možemo pisati i na drugi način.

Pomoću relacija  $E = \frac{V}{d}$  i  $B = \mu_0 \frac{I}{D}$  imamo

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{Ed}{\frac{B D}{\mu_0}} = \mu_0 \frac{E}{B} \frac{d}{D}$$

tj. možemo je zamisliti na odnosu polja  $E$  i  $B$  te geometrijskih veličina  $d$  i  $D$ .

Izjednačavanjem dvaju izraza za  $Z$  dobivamo važan odnos između polja u valu

$$E = cB$$

## 7.2. Elektromagnetski val u vakuumu

Zamislimo da prijenosna linija završava na nekoj mjestu. Elektromagnetski val se djelomično reflektira ali djelomično se i transmitira u otvoreni vakuum.

U otvorenom vakuumu imamo  $\frac{d}{D} \rightarrow 1$  jer ograničenja nema a sujevoni su ekvivalentni. Stoga je impedancija otvorenog vakuuma

$$Z = \mu_0 \frac{E}{B} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$$

Vakuum je prazan prostor. Što onda znači impedancija vakuuma?

Imamo sljedeće analogije za valove u kontinuumu

<u>mehanički</u>	<u>struje i naponi</u>	<u>polja</u>
$F$	$V$	$E$
$\frac{dx}{dt}$	$I$	$\frac{B}{\mu_0}$
$F = Z \frac{dx}{dt}$	$V = Z I$	$E = Z \frac{B}{\mu_0}$

Impedancija vakuuma naprosto znači da je za širenje vala magnetskog polja u vakuumu potrebno bitnije električnog polja.

Možemo napraviti i analogije za parametre valnog sredstva

<u>mehaničko sredstvo</u>	<u>prijenosna linija</u>	<u>vakuum</u>
T	$\frac{1}{\frac{c}{a}}$	$\frac{1}{\epsilon_0}$
$\rho$	$\frac{L}{a}$	$\mu_0$

Mehanička sredstva mogu imati različite vrijednosti parametara T i  $\rho$ . Iz toga slijede različite brzine mehaničkih valova  $v_p = v_g = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$  i različite impedancije  $Z = \sqrt{T\rho}$ .

Prijenosne linije mogu imati različite  $\frac{c}{a}$  i  $\frac{L}{a}$  zbog različitih geometrija. Stoga su impedancije  $Z = \sqrt{\frac{L}{\frac{c}{a}}}$  različite.

Međutim, vakuum je jedan s parametrima  $\epsilon_0$  i  $\mu_0$  te impedancijom  $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$ .

### Napomena:

Vakuum je sasvim sigurno prazan prostor, tj. ne sadrži nikakvu napetost T ili gustoću mase  $\rho$ . Također ne sadrži ni kapacitet i samoinдукciju. Konstante  $\epsilon_0$  i  $\mu_0$  naprosto daju odnose između E i B koji tvore elektromagnetski val u vakuumu.

Snaga koju prenosi mehanički val

$$P = Z \frac{\omega^2 A^2}{2} = Z \overline{\left(\frac{du}{dt}\right)^2} \leftarrow \text{povlače označava srednju vrijednost u jednom periodu}$$

Analogno imamo

$$P = Z \overline{[I(t)]^2} \text{ za val struje u prijenosnoj liniji}$$

$$I = Z \overline{\left[\frac{B(t)}{\mu_0}\right]^2} \text{ za elektromagnetski val u vakuumu (intenzitet)}$$

Ako iskoristimo relaciju  $E = cB$  dobivamo

$$I = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \overline{\frac{B(t) B(t)}{\mu_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{E(t) B(t)}{\mu_0} = \overline{E(t) \frac{B(t)}{\mu_0}} = \frac{1}{2} E \frac{B}{\mu_0}$$

$$\text{jer je } \overline{\sin^2(\omega t - kz)} = \frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} E \text{ se mjeri u } \frac{V}{m} \\ \frac{B}{\mu_0} \text{ --- } \frac{A}{m} \end{array} \right\} I \text{ se mjeri u } \frac{W}{m^2} \text{ intenzitet vala}$$

Intenzitet elektromagnetskog vala izražava snagu koja se prenosi kroz jedinicu površine okomitu na smjer širenja vala.

### 7.3. Elektromagnetski spektar

Za sve frekvencije vrijedi

$$\omega = ck \Rightarrow 2\pi\nu = c \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda\nu = c}$$

Razmotrimo odnose veličina u nekim važnim slučajevima:

1. Električna struja za napajanje (u daljnovodima i gradskoj mreži) ima frekvenciju  $\nu = 50 \text{ Hz}$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6 \cdot 10^6 \text{ m} = 6000 \text{ km}$$

Žice koje spajaju izvor elektromotorne sile (npr. elektrana) s lokalnom trafostanicom i dalje s potrošačima mnogo su kraće od  $\lambda$ . To znači da struja i napon na potrošaču titraju praktički u fazi (tj. bez kašnjenja) s izvornim. Valno ponašanje se ne opaža. Impedancija nema nikakva učinka pa se žice mogu slobodno postavljati (tj. ne moraju biti paralelne jedna drugoj).

2. Audiofrekventna tehnika (npr.  $\nu = 1 \text{ kHz}$ )

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^3} = 3 \cdot 10^5 \text{ m} = 300 \text{ km}$$

Žice koje spajaju izvor (pojačalo) i potrošač (zvučnik) mnogo su kraće od  $\lambda$  pa u valno ponašanje ne opaža. Žice se mogu slobodno postavljati.

3. Radiofrekventna i TV tehnika (npr.  $\nu = 100 \text{ MHz}$ )

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3 \text{ m}$$

Valna svojstva se očituju u kablovima sobnih (laboratorijskih) dimenzija. Uvjeti se moraju spajati kablovima kod kojih dvije žice imaju jednoliku geometriju duž cijele dužine (definirana impedancija). U protivnom bi neujednena promjena impedancije dovela do refleksije vala struje i napona.

Instrumenti koji se spajaju imaju dobro definirane ulazne i izlazne impedancije. Prijenosne linije (najčešće koaksijalni vodovi) moraju imati istu impedanciju da ne bi dovelo do neželjenih refleksija.

Najčešći standard je impedancija od  $50 \Omega$  (odnosi se i na koaksijalne vodove za povezivanje kompjutera na mrežu).

Koaksijalni vodovi od antene do ulaza u TV prijemnik imaju impedanciju od  $75 \Omega$ .

4. Mikrovalovi (područje GHz) se također mogu širiti koaksijalnim vodovima od metalnih žica.

5. Svjetlost se može širiti optičkim kablovima (dielektrična vlakna).

Svi se elektromagnetski valovi mogu širiti u vakuumu (i u zraku).

Svako elektromagnetsko zračenje može se ekvivalentno označiti bilo pomoću frekvencije  $\nu$  ili valne duljine  $\lambda$  ili energije fotona  $E=h\nu$  ( $h$  - Planckova konstanta).

Ipak, uobičajeno je iskazivati:

<u>a) pomoću frekvencije</u>	<u>karakterističnu područje</u>
audiofrekventno	kHz
radiofrekventno (i TV)	MHz
mikrovalno	GHz

<u>b) pomoću valne duljine</u>	
infracrveno	$\mu\text{m}$
vidljivo	400-800 nm
ultraljubičasto	$< 400 \text{ nm}$

<u>c) pomoću energije fotona</u>	
rendgensko	keV
$\gamma$ -zrake	MeV

$$(1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J})$$

## 7.4. Maxwellove jednačine u diferencijalnom obliku

U prethodnom smo razmatranju došli do valnih funkcija  $E(z,t)$  i  $B(z,t)$  za ravan elektromagnetski val koji se širi duž osi  $z$ . No, za svaki val mora postojati odgovarajuća diferencijalna valna jednačina. Kod mehaničkih valova diferencijalnu jednačinu nam daje II. Newtonov zakon. Kod valova struje i napona, diferencijalnu jednačinu dobivamo iz Kirchhoffovih zakona. Stoga kod elektromagnetskih valova očekujemo primjenu Maxwellovih jednačina.

Ovdje ćemo pokazati da se Maxwellove jednačine, pored integralnog oblika, mogu prikazati ekvivalentno i u diferencijalnom obliku. Krenimo najprije u obradu dviju Maxwellovih jednačina koje sadrže integral po zatvorenoj plohi  $S$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

$Q$  - naboj unutar zatvorene plohe  $S$

## Pojam divergencije vektorskog polja

Zamislimo bilo koje vektorsko polje  $\vec{F}(\vec{r}, t)$ . To znači da vektor  $\vec{F}$  mijenja svoj iznos i smjer od točke do točke u prostoru (funkcija je od  $\vec{r}$ , odnosno od  $(x, y, z)$ ), a može se mijenjati i tijekom vremena (funkcija od  $t$ ).

Odaberimo neku točku promatranja  $P_i$  i okružimo je nekom malenom zatvorenom plohom  $S_i$  tako da ona obuhvata volumen  $\Delta V_i$ . Prema općoj definiciji, tok polja  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  koji izlazi iz volumena  $\Delta V_i$  dan je izrazom

$$\Phi_i = \oint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{a}$$

gdje se vrijednosti za  $\vec{F}$  uzimaju u točkama na površini  $S_i$ , a  $d\vec{a}$  uvijek ima smjer iz volumena  $\Delta V_i$  prema van. Divergencija vektorskog polja  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  u točki  $P_i$  se definiše kao

$$(\text{div } \vec{F})_i = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Phi_i}{\Delta V_i} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{a}}{\Delta V_i}$$

Budući da su veličine  $\Phi_i$  i  $\Delta V_i$  skalari, to je i divergencija vektorskog polja



skalarna veličina. Razumije se, ako je vektorsko polje statičko (tj. ne mijenja se tijekom vremena), onda i divergencija tog polja u nekoj točki ima stalnu vrijednost. Međutim, od točke do točke u prostoru divergencija od  $\vec{F}(\vec{r})$  može poprimiti različite vrijednosti.

Primijenimo sada pojam divergencije na električno i magnetsko polje. U nekoj točki promatranja  $P_i$  imamo

$$(\text{div } \vec{E})_i = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a}}{\Delta V_i} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{Q_i}{\epsilon_0 \Delta V_i}$$

$Q_i$  je naboj koji se nalazi u volumenu  $\Delta V_i$ . Taj se naboj može sastojati od nespoja elementarnih naboja. Ako utvrimo dovoljno mali volumen  $\Delta V_i$  oko točke  $P_i$  imat ćemo u njemu gotovo jednolike rasporedene elementarne naboje. Za potrebe matematičke obrade, pogodno je realnu diskretnu raspodjelu naboja zamijeniti zamisljenom kontinuiranom raspodjelom naboja koja ima gustoću  $\rho_i = \frac{Q_i}{\Delta V_i}$ .

Divergencija električnog polja u točki  $P_i$  postaje

$$(\text{div } \vec{E})_i = \frac{\rho_i}{\epsilon_0}$$

Ova nam jednačina kaže da ako u nekoj točki  $P_i$  postoji gustoća naboja  $\rho_i$ , onda ta točka postaje izvor električnog toka.

Gustoća naboja može varirati od točke do točke kao funkcija  $\rho(\vec{r})$ . Tada se i  $\text{div } \vec{E}$  mijenja od točke do točke, pa općenito pišemo (bez posebnog indeksa "i")

$$\boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Ovo je I. Maxwellova jednačina u diferencijalnom obliku. Njen ekvivalent u integralnom obliku je  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ .

Po analogiji, iz II. Maxwellove jednačine u integralnom obliku ( $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$ ) dobivamo

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$$

II. Maxwellove jednačine u diferencijalnom obliku utvrđuje da niti jedna točka

u prostoru ne predstavlja izvor magnetskog toka.

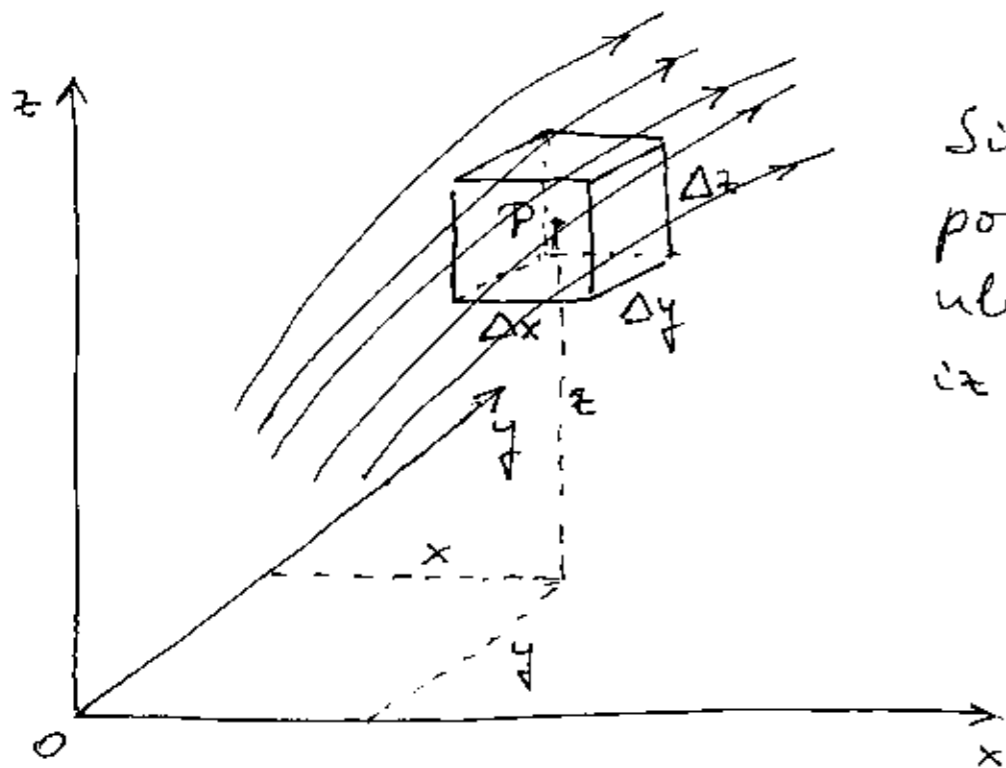
### Izračunavanje divergencije

Možemo utvrditi matematički postupak za izračunavanje divergencije proizvoljnog vektorskog polja  $\vec{F}(\vec{r})$ . U kartezijem koordinatnom sustavu pišemo

$$\vec{F}(x, y, z) = \hat{x}F_x(x, y, z) + \hat{y}F_y(x, y, z) + \hat{z}F_z(x, y, z)$$

U svakoj točki prostora vektor  $\vec{F}$  možemo razbiti na tri komponente, a od točke do točke svaka se komponenta može mijenjati po nekoj svojoj funkciji.

Oko neke točke promatramo  $P(x, y, z)$  postavimo zamišljeni kutijicu volumena  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .



Silnice vektorskog polja  $\vec{F}(\vec{r})$  mogu ulaziti i izlaziti iz volumena  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

Izračunajmo ukupan tok kroz gornju i donju plohu kutijice. Na gornjoj plohi kutijice uzimamo za vektor površine  $\Delta \vec{a}' = \hat{z} \Delta x \Delta y$ , tako da je tok kroz nju

$$\Phi_z' = \vec{F}(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) \cdot \Delta \vec{a}' = \Delta x \Delta y F_z(x, y, z + \frac{\Delta z}{2})$$

Napomena:

Zbog  $\hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$  samo komponenta  $F_z$  sudjeluje u toku kroz plohu  $\Delta \vec{a}'$ .

Za izračunavanje toka kroz donju plohu možemo uzeti vektor površine  $\Delta \vec{a}'' = -\hat{z} \Delta x \Delta y$  koji ima smjer iz kutijice prema van. Zato je

$$\Phi_z'' = \vec{F}(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}) \cdot \Delta \vec{a}'' = -\Delta x \Delta y F_z(x, y, z - \frac{\Delta z}{2})$$

U gornjim izrazima smo pretpostavili da  $F_z$  ima konstantnu vrijednost u svim točkama dane plohe, što je opravdano ako uzamemo  $\Delta x$  i  $\Delta y$  dovoljno male. Ukupan tok kroz obje plohe okomite na os  $z$  iznosi

$$\Phi_z = \Phi_z' + \Phi_z'' = \Delta x \Delta y \left[ F_z(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) - F_z(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}) \right]$$

za mali  $\Delta z$  vrijedi razvoj u red do prvog člana

$$F_z(x, y, z \pm \frac{\Delta z}{2}) = F_z(x, y, z) \pm \frac{\partial F_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}$$

Uvrštavanjem u prethodni izraz dobivamo

$$\Phi_z = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} = \Delta V \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Analogne izraze možemo dobiti za tok kroz plohe koje su okomite na osi  $x$  i  $y$  tako da ukupan tok kroz kutijicu iznosi

$$\Phi = \Delta V \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)$$

Prema tome, divergencija vektorskog polja  $\vec{F}(\vec{r})$  u točki  $P(x, y, z)$  iznosi

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi}{\Delta V} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Operator divergencije možemo napisati pomoću operatore nabra  $\vec{\nabla}$  koji skalerno umnoži vektor  $\vec{F}$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) (F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}) = \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Primjenjujući izvedeno pravilo na električno i magnetsko polje, možemo pisati dvije Maxwellove jednačbe u obliku

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{div } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Priostaje još naći diferencijalni oblik za Maxwellove jednačbe koje u integralnom obliku glase

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Ovdje imamo linijske integrale po zatvorenom krivuljama  $C$ .  $\Phi_B$  je magnetski tok koji prolazi kroz površinu  $S$  koja je omeđena zatvorenom krivuljom  $C$ . U drugoj jednačbi nalazimo struju  $I$  i električni tok  $\Phi_E$  koji prolaze kroz površinu  $S$  koja je omeđena zatvorenom krivuljom  $C$ .

Napomena:

Ploha  $S$  ovdje nije zatvorena.

## Pojam rotacije vektorskog polja

Razmotrimo neko proizvoljno vektorsko polje  $\vec{F}(\vec{r})$  i odaberimo neku točku promatranja  $P_i$ . Zamislimo neku zatvorenu krivulju  $C_i$  oko točke  $P_i$ .

Zamislimo plohu  $\Delta a_i$  koja je omeđena krivuljom  $C_i$ , te točka  $P_i$  leži na toj plohi. Rotacija polja  $\vec{F}(\vec{r})$  u točki  $P_i$  definira se izrazom

$$(\text{rot } \vec{F})_i \cdot \hat{u}_i = \lim_{\Delta a_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta a_i}$$

Pri tome je uočljivo sljedeći dogovor:

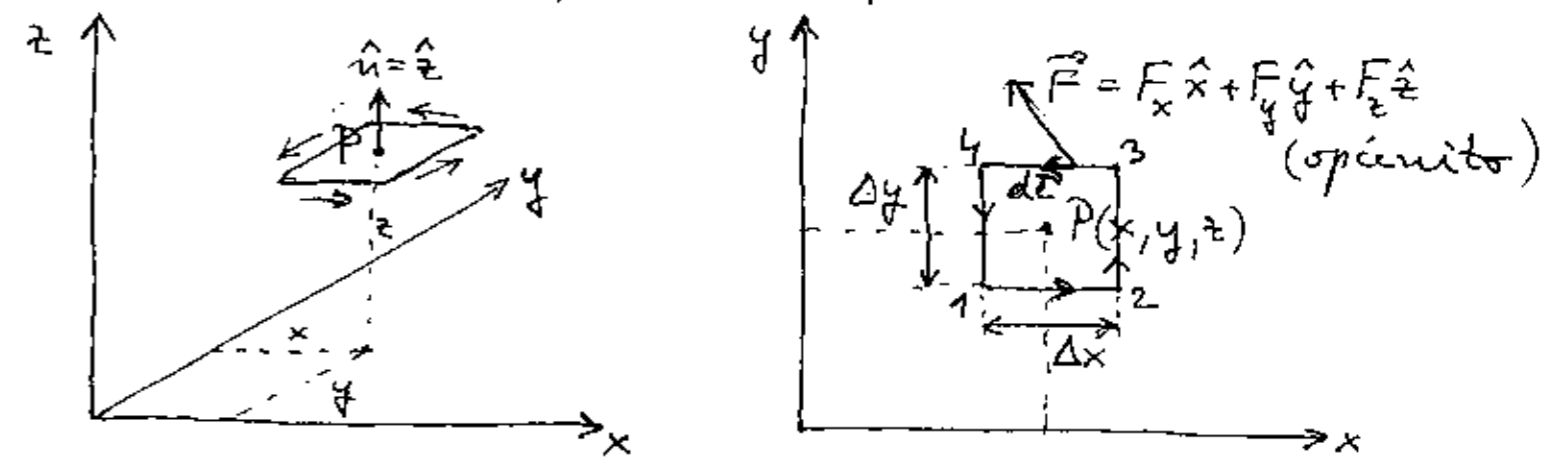
U izračunavanju linijskog integrala  $\oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}$  možemo slobodno odabrati jedan od dva moguća smjera obilaska petlje  $C_i$ . Uz dani izbor povezujemo jedinični vektor  $\hat{u}$  po pravilu desne ruke tako da savijeni prsti idu u odabranom smjeru obilaska petlje  $C_i$ , a ispruženi palac pokazuje smjer vektora  $\hat{u}$  koji je okomit na plohu  $\Delta a$ .

Iz definicijske jednačine je jasno da  $(\text{rot } \vec{F})_i$  predstavlja vektor. Skalarnim množenjem tog vektora s  $\hat{u}_i$  dobivamo samo komponentu vektora  $(\text{rot } \vec{F})_i$  u smjeru vektora  $\hat{u}_i$ .

Svaki vektor je zadan s tri komponente. Prema tome, za utvrđivanje vektora  $(\text{rot } \vec{F})_i$  bilo bi potrebno primijeniti definicijsku jednačinu tri puta s različito odabranim zatvorenim krivuljama  $C_i$  tako da pripadajući vektori  $\hat{u}_i$  budu duž tri uzajamno ortogonalna smjera.

## Izračunavanje rotacije

Izračunajmo rotaciju polja  $\vec{F}(\vec{r})$  u nekoj proizvoljnoj točki promatranja  $P(x, y, z)$ . Za izračunavanje  $(\text{rot } \vec{F})_z$ , tj. komponente vektora  $\text{rot } \vec{F}$  duž osi  $z$ , postavljamo  $\hat{u} = \hat{z}$  i odgovarajući smjer obilaska petlje prema pravilu desne ruke.



Moramo izračunati  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$  po pravokutnoj petlji C. Krenimo od vrha 1 prema 2. Vektor  $d\vec{l}$  na toj stranici ima smjer  $\hat{x}$ , pa skalarni produkt  $\vec{F} \cdot d\vec{l} = F_x dl$  uključuje samo komponentu  $F_x$ . Ako je  $\Delta x$  dovoljno maleno, smatramo da se  $F_x$  ne mijenja duž te stranice, pa je

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = F_x(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z) \int_1^2 dl = \Delta x F_x(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)$$

Duž gornje stranice od vrha 3 do 4 imamo

$$d\vec{l} = -\hat{x} dl, \text{ pa je}$$

$$\int_3^4 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -F_x(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) \int_3^4 dl = -\Delta x F_x(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z)$$

Te dovoljno maleni  $\Delta y$  možemo primijeniti razvoj u red do prvog člana

$$F_x(x, y \pm \frac{\Delta y}{2}, z) = F_x(x, y, z) \pm \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Integrali duž donje i gornje stranice pravokutnika daju ukupno

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\Delta x \Delta y \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Analognim postupkom dobivamo doprinose duž lijeve i desne stranice pravokutnika

$$\int_2^3 \vec{F} \cdot d\vec{l} = F_y(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) \int_2^3 dl = \Delta y F_y(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$$

$$\int_4^1 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -F_y(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \int_4^1 dl = -\Delta y F_y(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z)$$

Te dovoljno maleni  $\Delta x$  primijenjujemo razvoj u red do prvog člana

$$F_y(x \pm \frac{\Delta x}{2}, y, z) = F_y(x, y, z) \pm \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Integrali duž lijeve i desne stranice pravokutnika daju ukupno

$$\int_2^3 \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \Delta x \Delta y \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Konačno, cjelokupni integral po zatvorenoj petlji iznosi

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \Delta x \Delta y \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Uzimajući u obzir da je u ovom slučaju  $\Delta a = \Delta x \Delta y$ , dobivamo rezultat

$$(\text{rot } \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Za izračunavanje komponente  $(\text{rot } \vec{F})_x$  postavili bismo vektor  $\hat{u} = \hat{x}$  i pravokutnu petlju oko točke P sa stranicama  $\Delta y$  i  $\Delta z$  tako da površina omeđena petljom iznosi  $\Delta a = \Delta y \Delta z$ . Nakon izračunavanja dobivamo

$$(\text{rot } \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

Analogno se postupa i kod izračunavanja komponente  $(\text{rot } \vec{F})_y$  postavljajući  $\hat{u} = \hat{y}$  i pravokutnu petlju u ravni  $xz$  oko točke P.

$$(\text{rot } \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

Prema tome, u točki P nalazimo vektor rotacije polja  $\vec{F}$

$$\text{rot } \vec{F} = \hat{x} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Ovaj se složeni izraz može napisati u obliku determinante koja se lako pamti:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Ovdje je također iskorišteno pravilo po kojemu vektorski produkt dva vektora  $\vec{A} \times \vec{B}$  možemo napisati u obliku determinante istog oblika, te činjenica da je nabra vektorski operator  $\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$ .

Primijenimo sada pojam rotacije na električno polje koje nalazimo u Maxwellovoj integralnoj jednačini

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Odeberimo točku promatranja u prostoru i pišimo

$$(\text{rot } \vec{E}) \cdot \hat{u} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\Delta a}$$

Jedinični vektor  $\hat{u}$  možemo slobodno postaviti u bilo koji smjer. Sukladno tome odaberimo, zatvorenu krivulju C leži u ravni okomitoj na  $\hat{u}$ , te omeđuje površinu  $\Delta a$  kojoj pripisujemo vektor  $\Delta \vec{a} = \hat{u} \Delta a$ . S druge strane Maxwellove jednačine nalazimo magnetski tok  $\Phi_B$  koje prolazi kroz površinu omeđenu krivuljom C. Ako

je ta krivulja dovoljno stežnuta oko neke  
točke promatranja, možemo smatrati  
da magnetsko polje  $\vec{B}$  u točki promatranja  
ima istu vrijednost i u svim točkama  
male površine  $\Delta a$ , pa je

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \Delta \vec{a} = \vec{B} \cdot \hat{u} \Delta a$$

U tom slučaju Maxwellova jednačina  
postaje

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \cdot \hat{u} \Delta a$$

Te komponentu rotacije dobivamo  
uvrstavanjem

$$(\text{rot } \vec{E}) \cdot \hat{u} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\Delta a} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \cdot \hat{u}$$

Ova jednakost kaže da vektori  $\text{rot } \vec{E}$  i  
 $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  imaju jednake komponente duž smjera  
jediničnog vektora  $\hat{u}$ . No, budući da  
vektor  $\hat{u}$  možemo postaviti u bilo koji  
smjer, slijedi zaključak da vektori  $\text{rot } \vec{E}$  i  
 $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  imaju jednake projekcije duž bilo  
kojeg smjera, a to znači da su jednaki

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Dobili smo Maxwellovu jednačinu u  
diferencijelnom obliku. Ane kaže da  
ako u nekoj točki promatranja postoji  
vremenski promjenljivo magnetsko polje,  
onda u toj točki postoji i električno  
polje koje ima prostorne derivacije  
sukladno operatoru rotacije. To je  
Faradajev zakon indukcije sveden na  
odnose u jednoj točki promatranja.

Na analogan način možemo postupiti  
s Maxwellovom integralnom jednačinom

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Konačno dobivamo odgovarajuću  
Maxwellovu jednačinu u diferencijelnom  
obliku

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Ovdje je  $\vec{j}$  gustoća struje u točki proma-  
tranja, a  $\vec{E}$  je električno polje u istoj  
točki. Ova jednačina kaže da ukoliko u  
točki promatranja postoji gustoća struje  
i/ili vremenski promjenljivo električno polje,  
onda u toj točki postoji i magnetsko polje

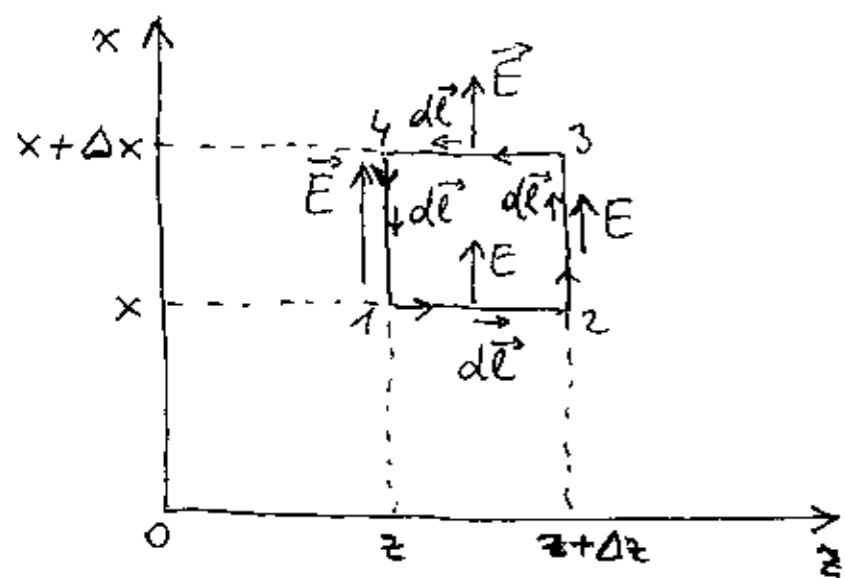
koje ima prostorne derivacije sukladno operatoru rotacije. To je prošireni Ampereov zakon sveden na odnosu u jednoj točki promatranja.

### 7.5. Valna jednačina za elektromagnetski val

Razmotrimo najprije jednostavan slučaj ravnog elektromagnetskog vala. Neka u tome valu električno polje ima polarizaciju duž osi  $x$ , magnetsko polje duž osi  $y$ , a val se širi duž osi  $z$ .

Valnu jednačinu možemo dobiti bilo primjenom Maxwellovih jednačina u integralnom obliku, bilo primjenom Maxwellovih jednačina u diferencijalnom obliku.

Instruktivno je pokazati najprije jedan, a zatim i drugi izvod.



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\vec{E} = E_x \hat{x}$$

$$\vec{B} = B_y \hat{y}$$

Integral po zatvorenoj petlji daje doprinose samo duž stranica 2-3 i 4-1.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \Delta x E_x(x, y, z) + \Delta x E_x(x, y, z + \Delta z)$$

Ako uzmemo dovoljno mali  $\Delta z$ , vrijedi razvoj u red do prvog člana

$$E_x(x, y, z + \Delta z) = E_x(x, y, z) + \Delta z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Napomena:

Budući da se radi o ravnomernom valu,  $E_x$  ima konstantnu vrijednost za bilo koji  $x$  u zadani  $z$ .  $E_x$  se mijenja samo promjenom  $z$  novu vrijednost  $z$ .

Konačno, za integral po zatvorenoj petlji dobivamo

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \Delta x \Delta z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Za magnetski tok kroz petlju možemo pisati (uz pretpostavku da je  $\Delta z$  dovoljno mali)

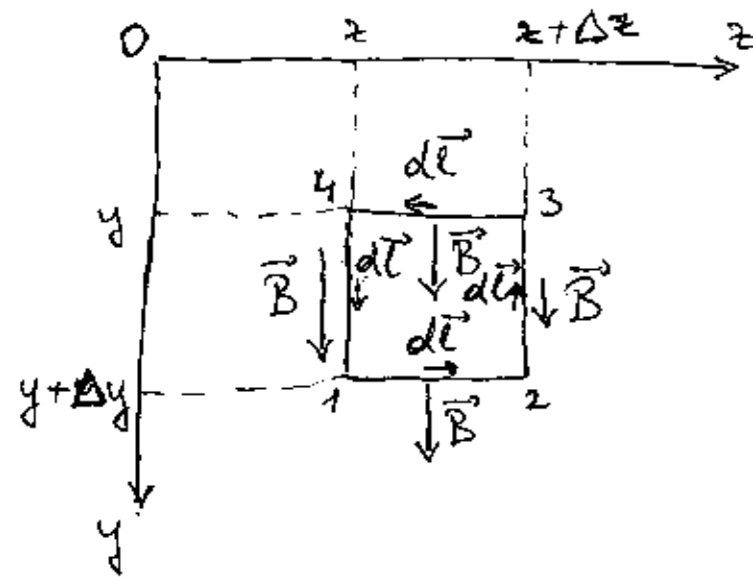
$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \Delta \vec{a} = B_y \hat{y} \cdot \Delta \vec{a} = B_y \Delta x \Delta z$$

Prema tome, iz Maxwellove jednačine slijedi

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{\partial B_y}{\partial t}$$



Možemo sada primijeniti Maxwellovu jednačinu u kojoj se pojavljuje linijski integral magnetskog polja po zatvorenoj petlji C koja leži u ravni yz.



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

" 0 nema struje kroz petlju C

Nakon izračunavanja dobivamo

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Ako želimo dobiti jednačinu koja uključuje samo električno polje  $E_x$ , onda prethodno dobivenu jednačinu deriviramo po z, a omu potonju po t

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} \\ -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial z} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}} \text{ valna jednačina za } E_x$$

$$E_x(z, t) = E_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$\omega = ck$$

Valnu jednačinu za  $B_y$  dobivamo ako prvu jednačinu deriviramo po t, a drugu po z

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} &= -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}} \text{ valna jednačina za } B_y$$

$$B_y(z, t) = B_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$\omega = ck$$

Pokažimo da iste rezultate možemo dobiti izravnom primjenom Maxwellovih jednačina u diferencijalnom obliku.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \text{ jer } \vec{B} \text{ ima samo komponentu duž osi } y$$

Prema pravilu za rotaciju

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

" 0 jer  $\vec{E}$  ima samo komponentu duž osi x

Tako dobivamo jednačinu

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

Ova jednačina je identična onoj koju smo izveli primjenom odgovarajuće Maxwellove jednačine u integralnom obliku.

Slijedeća Maxwellova jednačina u diferencijalnom obliku daje

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \implies (\vec{\nabla} \times \vec{B})_x = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \text{jer je } \vec{E} = E_x \hat{x}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}$$

0 jer je  $\vec{B} = B_y \hat{y}$

Tako dobivamo jednačinu

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Ova jednačina je identična onoj koju smo već izveli iz odgovarajuće Maxwellove jednačine u integralnom obliku.

Prema tome, iz dobivene dvije diferencijalne jednačine možemo izvesti valne jednačine za  $E_x$  i  $B_y$  kao što smo to već napravili, te utvrditi rješenja.

U općem slučaju za elektromagnetsko polje u vakuumu primjenjujemo Maxwellove jednačine

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{jer nema naboja } (\rho=0)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Primjenom operatora rotacije na lijevu i desnu stranu treće jednačine

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

zbog četvrte jednačine  
"  $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  "

Dosljednom primjenom operatora nabla može se pokazati da vrijedi

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_0 - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

Laplaciov operator  
"0" zbog prve jednačine

Konačno dobivamo valnu jednačinu za  $\vec{E}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{E}}$$

Analogno bismo primjenom operatora rotacije na lijevu i desnu stranu četvrte jednačine i uvrštavanjem druge i treće jednačine dobili valnu jednačinu za  $\vec{B}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{B}}$$

## 7. poglavlje - Matematičke dopune

### a) Jednostruka primjena operatora $\vec{\nabla}$

Operatorom  $\vec{\nabla}$  možemo djelovati na skalarnu funkciju  $f(x, y, z)$ , ili na vektorsku funkciju  $\vec{F}(x, y, z) = \hat{x}F_x(x, y, z) + \hat{y}F_y(x, y, z) + \hat{z}F_z(x, y, z)$  no pri tome nastaju različiti rezultati

$$\vec{\nabla}f = \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{dobiva se vektor koji zovemo grad f}$$

Djelovanje operatora  $\vec{\nabla}$  na vektorsko polje  $\vec{F}$  može se izvršiti na dva načina

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \text{dobiva se skalar koji zovemo div  $\vec{F}$ }$$

$$\vec{\nabla}_x \vec{F} = \hat{x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

dobiva se vektor koji zovemo rot  $\vec{F}$

Možemo zamisliti situacije u kojima imamo dodatno skalarno polje  $g(x, y, z)$  i vektorsko polje  $\vec{G}(x, y, z) = \hat{x}G_x(x, y, z) + \hat{y}G_y(x, y, z) + \hat{z}G_z(x, y, z)$ . Tada možemo istražiti djelovanje  $\vec{\nabla}$  na zbroj dvaju polja (možemo zbrajati

samo skalarno sa skalarnim, te vektorsko s vektorskim poljem)

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \quad \text{dobivamo vektor grad f + grad g}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G} \quad \text{dobivamo skalar div  $\vec{F}$  + div  $\vec{G}$ }$$

$$\vec{\nabla}_x (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla}_x \vec{F} + \vec{\nabla}_x \vec{G} \quad \text{dobivamo vektor rot  $\vec{F}$  + rot  $\vec{G}$ }$$

zadatak: dosljednom primjenom operatora  $\vec{\nabla}$  uvjerite se u ispravnost gornjih triju izraza

Nadalje, možemo napraviti razne produkte

$f g$  - produkt dviju skalarnih funkcija je skalar

$f \vec{F}$  - produkt skalare i vektorske funkcije je vektor

$\vec{F} \cdot \vec{G}$  - skalarni produkt dvaju vektora je skalar

$\vec{F} \times \vec{G}$  - vektorski produkt dvaju vektora je vektor

Operator  $\vec{\nabla}$  možemo primijeniti na gore navedene produkte.

Na skalare  $f, g$ :  $\vec{F} \cdot \vec{G}$  možemo primijeniti samo operator gradijenta

$$\vec{\nabla}(fg) = f \vec{\nabla}g + g \vec{\nabla}f \quad (\text{dokažite dosljednom primjenom } \vec{\nabla})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \dots \quad (\text{postoji složen izraz ali se ne upotrebljava})$$

Ako su poznata vektorska polja  $\vec{F}$  i  $\vec{G}$ , onda je nepraktičnije izračunati  $\vec{F} \cdot \vec{G} = F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z$  te primijeniti operator gradijenta.

Na vektor  $f\vec{F}$  možemo primijeniti  $\vec{\nabla}$  na dva načina (divergencija i rotacija)

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + \vec{F} \cdot (\vec{\nabla}f) = f \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} f$$

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \times (\vec{\nabla}f) = f \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} f$$

Zadatak: dokažite gornje dva izraza dosljednom primjenom operatora  $\vec{\nabla}$

Na vektor  $\vec{F} \times \vec{G}$  možemo također primijeniti operator  $\vec{\nabla}$  na dva načina

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$$

(dokažite ovaj izraz)

$$\operatorname{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \dots \quad (\text{postoji složen izraz ali se ne upotrebljava})$$

b) Dvostruka primjena operatora  $\vec{\nabla}$

Razmotrimo najprije skalarno polje  $f(x, y, z)$ .

U prvoj primjeni operatora  $\vec{\nabla}$  na  $f(x, y, z)$  možemo dobiti samo vektor  $\vec{\nabla}f = \operatorname{grad} f$ .

Drugu primjenu operatora  $\vec{\nabla}$  možemo izvesti na  dva  načina

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}f) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} f && \text{divergencija vektora je skalara} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \leftarrow (\text{dokažite uzastopnom primjenom } \vec{\nabla}) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \leftarrow \text{Laplace-ov operator}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \quad (\text{dokažite ovaj važnu tvrdnju})$$

Uvjetite da vrijedi  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  itd.

Razmotrimo sada učinak na vektorsko polje  $\vec{F}(x, y, z)$ . Prva primjena operatora  $\vec{\nabla}$  može dati skalara ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F}$ ) ili vektor ( $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{F}$ ). Na skalara možemo djelovati operatorom  $\vec{\nabla}$  samo tako da dobijemo vektor gradijenta

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} \quad (\text{izračunajte komponente vektora})$$

### Napomena:

Uočite bitnu razliku između  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$  i  $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$ . Na skalar  $f$  može djelovati samo operator gradijenta (nemie "točke (·)" između  $\vec{\nabla}$  i  $f$ ). Na vektor  $\vec{F}$  djeluje operator divergencije (obvezno se stavlja "točka (·)" između  $\vec{\nabla}$  i  $\vec{F}$  koje predstavlja skalarno umnoženje). U drugoj primjeni operatore  $\vec{\nabla}$  imamo djelovanje na vektor  $\vec{\nabla} f$  po pravilu za skalarni produkt  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$  pa obvezno stavljamo "točku (·)" između  $\vec{\nabla}$  i  $\vec{\nabla} f$ . Nasuprot tome,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  je skalar, pa druga primjena operatore  $\vec{\nabla}$  predstavlja gradijent tog skalara  $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$  te se ne stavlja "točka (·)" između  $\vec{\nabla}$  i  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ .

Drugim djelovanjem operatore  $\vec{\nabla}$  na vektor  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  možemo dobiti:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \text{div rot } \vec{F} = 0 \quad (\text{dokažite om } \underline{\text{vakuu}} \text{ tivrifn})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad (\text{dokažite om } \underline{\text{jednakost}})$$

### Napomena:

Pod oznakom  $\nabla^2 \vec{F}$  podrazumijeva se izraz

$$\nabla^2 \vec{F} = \hat{x}(\nabla^2 F_x) + \hat{y}(\nabla^2 F_y) + \hat{z}(\nabla^2 F_z)$$

### c) Primjena na Maxwellove jednačbe

Maxwellove jednačbe u diferencijalnom obliku uključuju samo jednostinku primjenu operatore  $\vec{\nabla}$  (prve derivacije)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Valna jednačba uvijek sadrži druge derivacije. Za elektromagnetski val u vakuumu ( $\rho=0$  i  $\vec{j}=0$ ) dobivamo

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{E}}$$

valna  
jednačba

### d) Skalarni i vektorski potencijal

Možemo primijeniti dvije prethodno izvedene relacije

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \text{rot grad } f = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \text{div rot } \vec{F} = 0$$

One vrijede uvijek, tj. za bilo koje skalarno polje  $f(x, y, z)$  i za bilo koje vektorsko polje  $\vec{F}(x, y, z)$ . Primijenimo ih na neke Maxwellove jednačine.

Budući da uvijek vrijedi jednačina

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0$$

možemo zamisliti da postoji vektorsko polje  $\vec{A}(x, y, z)$  tako da je

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{rot } \vec{A}$$

Vektorsko polje  $\vec{A}(x, y, z)$  naziva se vektorski potencijal. Uistinu, uvrštavanjem u Maxwellovu jednačinu dobivamo

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

što je sigurno zadovoljeno za bilo koje vektorsko polje  $\vec{A}(x, y, z)$ .

U općenitom slučaju, preostale tri Maxwellove jednačine nemaju nulu s desne strane znaka jednakosti. Međutim, u slučajevima kada električno i magnetsko polje nemaju vremenske ovisnosti (statička polja), treća Maxwellova jednačina postaje

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_s = 0 \quad (\text{jer je } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0)$$

Elektrostatičko polje je označeno kao  $\vec{E}_s$ . Iz OF2 je poznato da se to polje može izraziti putem gradijenta električnog potencijala  $U$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U = -\text{grad } U$$

$U(x, y, z)$  je skalarno polje koje ćemo ovdje nazvati općenito skalarnim potencijalom.

Prijetimo sada na općenit slučaj u kojemu električno i magnetsko polje imaju neku vremensku ovisnost, pa vrijedi Maxwellova jednačina

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

za magnetsko polje možemo u svakom

slučaju pisati  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , a za električno polje možemo pisati da se sastoji općenito od dva doprinosa

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_{ind}$$

gdje inducirano polje  $\vec{E}_{ind}$  nastaje zbog vremenski promjenljivog magnetskog polja  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . Uvrštavanjem u Maxwellov jednadžbu dobivamo

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}_s + \vec{E}_{ind}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}_s}_{=0} + \vec{\nabla} \times \vec{E}_{ind} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\vec{E}_{ind} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Inducirano električno polje možemo izravno izraziti putem vremenske promjene vektorskog potencijala.

Ukupno električno polje iznosi

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

### e) Gaussov teorem

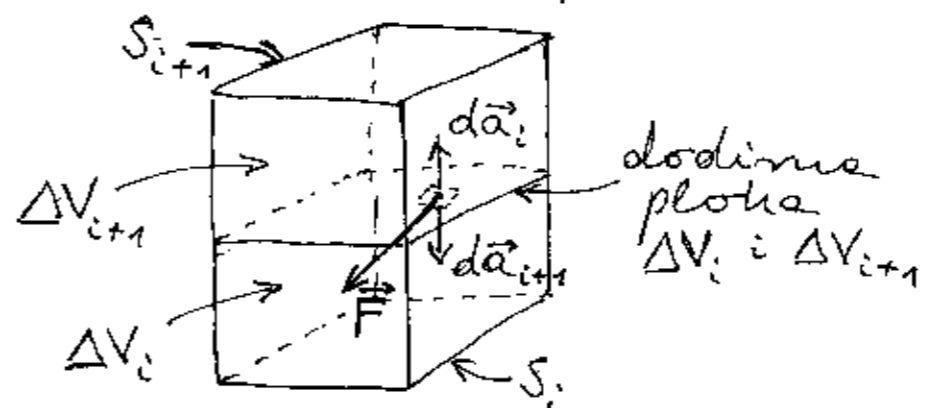
Krenimo od ranije postavljene definicije divergencije nekog vektorskog polja  $\vec{F}(x, y, z)$ . U točki promatranja  $P_i$  imamo

$$(\text{div } \vec{F})_i = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{a}}{\Delta V_i}$$

Ako uzmemo konačan, ali dovoljno mali volumen  $\Delta V_i$  oko točke  $P_i$ , možemo smatrati da je  $\text{div } \vec{F}$  već dosegao svoju graničnu vrijednost, tj. da ima istu vrijednost u svim točkama unutar  $\Delta V_i$ , tako da možemo pisati

$$\oint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{a} = (\text{div } \vec{F})_i \Delta V_i$$

Uzmimo sada točku promatranja  $P_{i+1}$  u blizini volumena  $\Delta V_i$  i zamislimo oko nje mali volumen  $\Delta V_{i+1}$  koji se jednim dijelom naslanja na volumen  $\Delta V_i$



$$\boxed{d\vec{a}_i = -d\vec{a}_{i+1}}$$

na dodirnoj  
plohi

(jer se  $d\vec{a}$  uvijek računa iz volumena prema van)

Budući da se na dodirnoj plohi  $\vec{F} \cdot d\vec{a}_i$  i  $\vec{F} \cdot d\vec{a}_{i+1}$  jednaki po iznosu ali suprotni po predznaku (bez obzira na iznos i smjer vektora  $\vec{F}$  u dotičnoj točki na graničnoj plohi), može biti

$$\oint_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{a}_i + \oint_{S_{i+1}} \vec{F} \cdot d\vec{a}_{i+1} = \oint_{S_{i,i+1}} \vec{F} \cdot d\vec{a}$$

Ovdje je stavljena oznaka  $S_{i,i+1}$  za zatvorenu plohu koja obuhvaća oba volumena  $\Delta V_i$  i  $\Delta V_{i+1}$  kao cjelinu. Možemo reći da se doprinosi pojedinim integralima po zatvorenim plohama  $S_i$  i  $S_{i+1}$  poništavaju u onome dijelu koji predstavlja zajedničku graničnu plohu.

Sada možemo pisati

$$\oint_{S_{i,i+1}} \vec{F} \cdot d\vec{a} = (\text{div } \vec{F})_i \Delta V_i + (\text{div } \vec{F})_{i+1} \Delta V_{i+1}$$

Ako umjesto malenih volumena  $\Delta V$  potpuno zauzima neki volumen  $V$  koji obuhvaća zatvorena ploha  $S$ , vrijedi

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \sum_i (\text{div } \vec{F})_i \Delta V_i$$

U graničnom slučaju malenih volumena  $\Delta V_i \rightarrow dV$ , a suma preleti u integral

$$\boxed{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int_V \text{div } \vec{F} dV} \quad \text{Gaussov teorem}$$

Gaussov teorem kaže da ako poznamo veličinu  $\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  (skalarnu) u svakoj točki unutar volumena  $V$ , onda integriranjem svih doprinosa  $\text{div } \vec{F} dV$  dobivamo ukupni tok vektorskog polja  $\vec{F}$  kroz zatvorenu plohu  $S$  koja obuhvaća volumen  $V$ .

Napomena:

$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  sadrži prostorne derivacije vektorskog polja  $\vec{F}$  u određenoj točki. Za volumni integral potrebno je, dakle, poznavanje promjene (derivacije) polja  $\vec{F}$  u svakoj točki volumena  $V$ .

Ekvivalentan rezultat dobivamo ako poznamo vrijednost polja  $\vec{F}$  u svakoj točki na zatvorenoj plohi  $S$  pa integriramo sve doprinose  $\vec{F} \cdot d\vec{a}$ .



Primer za primjenu Gaussove teorema nalazimo u Maxwellovoj jednačini u diferencijelnom obliku

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ako nam je poznata gustoća naboja  $\rho(x, y, z)$  u svakoj točki u volumenu  $V$  (u nekom dijelu volumena može biti  $\rho=0$ , tj. u tome dijelu nema naboja), onda možemo naći integral

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Primjenom Gaussove teorema dobivamo

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Dobili smo Maxwellovu jednačinu u integralnom obliku.

Na isti način, primjenom Gaussove teorema možemo iz Maxwellove jednačine u diferencijelnom obliku

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

dobiti odgovarajuću Maxwellovu jednačinu u integralnom obliku

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

## f) Stokesov teorem

Za dokaz Stokesove teorema možemo krenuti od definicije rotacije nekog vektorskog polja  $\vec{F}(x, y, z)$  u točki promatranja  $P_i$

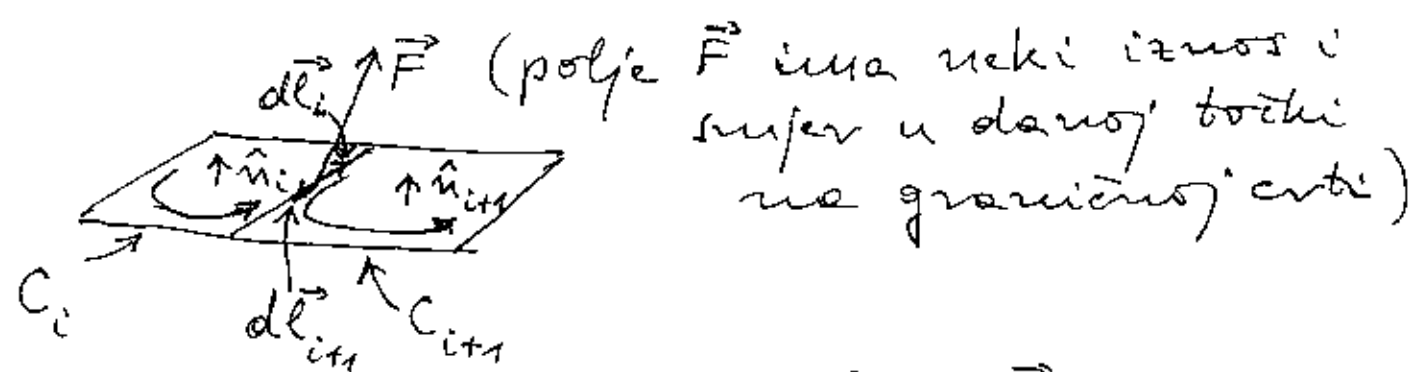
$$(\operatorname{rot} \vec{F})_i \cdot \hat{n}_i = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta S_i}$$

Ove definicijske jednačine daje samo komponentu vektora  $(\operatorname{rot} \vec{F})_i$  u smjeru jediničnog vektora  $\hat{n}_i$  koji je proizvoljno odabran. Točke  $P_i$  se nalaze na površini  $\Delta S_i$  koja je omeđena zatvorenom krivuljom  $C_i$  a površina  $\Delta S_i$  je postavljena okomito na jedinični vektor  $\hat{n}$ . Smjer integracije po zatvorenoj krivulji  $C_i$  i smjer jediničnog vektora  $\hat{n}$  povezani su pravilom desne ruke.

Kada je površina  $\Delta S_i$  dovoljno mala možemo smatrati da je  $(\operatorname{rot} \vec{F})_i$  dosegnuo praktički granicu vrijednost (tj. ima istu vrijednost u svim točkama na  $\Delta S_i$ ), pa možemo pisati

$$\oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l} = (\operatorname{rot} \vec{F})_i \cdot \hat{n}_i \Delta S_i$$

Možemo sada odabrati točku  $P_{i+1}$  u blizini površine  $\Delta S_i$  i postaviti površinu  $\Delta S_{i+1}$  tako da  $P_{i+1}$  leži na njoj, te da ona dodiruje (graniči) jednim dijelom s plohom  $\Delta S_i$ .



Na graničnoj crti je  $d\vec{l}_i = -d\vec{l}_{i+1}$  jer su smerovi obilaska suprotni. Stoga je  $\vec{F} \cdot d\vec{l}_i = -\vec{F} \cdot d\vec{l}_{i+1}$  na graničnoj crti, te vrijedi

$$\oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}_i + \oint_{C_{i+1}} \vec{F} \cdot d\vec{l}_{i+1} = \oint_{C_{i,i+1}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

gdje je sa  $C_{i,i+1}$  označena samo obodna krivulja koje obuhvata obje površine  $\Delta S_i$  i  $\Delta S_{i+1}$ , ali isključuje unutarnju graničnu crtu.

Možemo zamisliti dodavanje mnoštva malenih površina  $\Delta S$  koje potpuno prekrivaju neku veću površinu  $S$ , tako

da dobivamo

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_i \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}_i = \sum_i (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{n}_i \Delta S_i$$

Zatvorena krivulja  $C$  okružuje površinu  $S$ . U sumi integrala po krivuljama  $C_i$  poništavaju se doprinosi po svim unutarnjim graničnim crtama tako da preostanu samo doprinosi po vanjskoj obodnoj krivulji  $C$ .

U graničnom slučaju malenih površina  $\Delta S_i \rightarrow dS$ , te sumu izražavamo integralom po cijeloj površini  $S$

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{a}} \quad \text{Stokesov teorem}$$

Ovdje smo za element površine stavili uobičajenu oznaku  $d\vec{a} = \hat{n} dS$ .

Stokesov teorem kaže da, ukoliko nam je poznat vektor  $\text{rot } \vec{F}$  u svakoj točki neke površine  $S$ , možemo integrirati  $(\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{a}$  po toj površini, te dobiti rezultat koji je jednak linijskom integralu  $\vec{F} \cdot d\vec{l}$  po

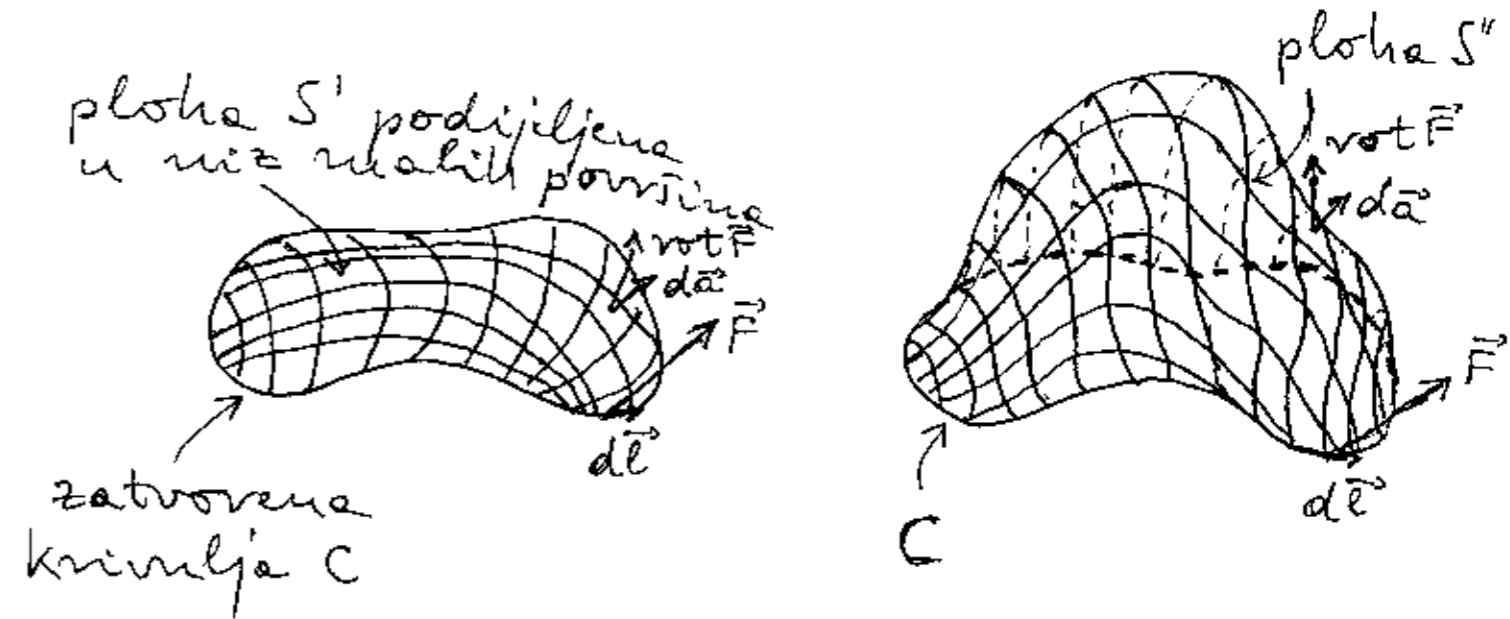
krivulji  $C$  koje omeđuje površinu  $S$ . Za potonji integral dovoljno je poznavati vrijednosti polja  $\vec{F}$  u točkama na krivulji  $C$ .

### Napomena:

Kod Gaussove teorema je odnos između volumena  $V$  i zatvorene plohe  $S$  jednoznačan. Naime, za dani volumen  $V$  postoji samo jedna zatvorena ploha  $S$  koja točno obuhvaća taj volumen. Ili obrnuto rečeno, za odabranu zatvorenu plohu  $S$  uzimamo se cjelokupni volumen  $V$  koji se nalazi unutar te plohe  $S$ .

Nasuprot tome, kod Stokesove teorema možemo naći beskonačno mnogo ploha  $S$  (nezatvoreni) koje su omeđene jednom te istom zatvorenom krivuljom  $C$ . Stokesov teorem vrijedi jednako za bilo koju od beskonačno mnogo ploha  $S$  u kombinaciji sa zatvorenom krivuljom  $C$  koje tu plohu omeđuje. Ovo ćemo veću tvrdnju sada dokazati.

Razmotrimo primjer u kojemu su preko jedne te iste zatvorene krivulje  $C$  razapete dvije plohe  $S'$  i  $S''$ . U cijelom prostoru postoji polje  $\vec{F}(\vec{r})$ , a u svakoj točki imamo i vektor  $\text{rot } \vec{F}$ .



### Napomena:

zatvorena krivulja  $C$  ne mora biti u nekoj ravнини, nego može imati bilo koji prostorni oblik. Svaku plohu  $S$  koju razapinjemo preko krivulje  $C$  možemo podijeliti poput mreže na mnogo malenih površina. Za svako okno vrijedi

$$(\text{rot } \vec{F})_i \Delta a_i = \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}_i$$

Ako zbrojimo sve doprinose na oknima dane plohe dobivamo

$$\sum_i (\text{rot } \vec{F})_i \cdot \Delta \vec{a}_i = \sum_i \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}_i = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Posljednja jednakost uvažava činjenicu da se linijski integral po svakoj unutarnjoj grani, koja spaja dva susjedna okna, prolazi dva puta u suprotnim smjerovima, pa je ukupni rezultat jednak nuli. Preostaje samo linijski integral po krivulji  $C$  po kojoj se prolazi samo jednom.

Međutim, doprinosi  $(\text{rot } \vec{F})_i \cdot \Delta \vec{a}_i$  se zbrajaju tako da dobivamo Stokesov teorem

$$\int_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Opisani postupak vrijedi za svaku plohu  $S$  koje razapire zatvorenu krivulju  $C$ . Ako je krivulja  $C$  zadana, onda je desna strana u gornjoj jednačini jednoznačno zadana. Na lijevoj strani možemo imati različite plohe, npr. plohe  $S'$  i  $S''$  iz primjera na slici, no rezultat integriranja

može biti isti

$$\int_{S'} (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{a} = \int_{S''} (\text{rot } \vec{F}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Napomene:

Kod integrala po nekoj površini vrijednost  $\text{rot } \vec{F}$  se uzima u točki na toj površini i uzima se s pripadnim elementom  $d\vec{a}$  koji je okomit na tu površinu. Dakle, kod integrala po  $S'$  i  $S''$  vrijednosti  $\text{rot } \vec{F}$  i  $d\vec{a}$  se uzimaju na potpuno različitim mjestima u prostoru, no ukupni rezultat integriranja je u oba slučaja potpuno isti. To je pomalo iznenadjući rezultat, pogotovo zato što on vrijedi za bilo koje vektorsko polje  $\vec{F}(\vec{r})$ . U tome svojstvu nalazimo posebnu važnost Stokesova teorema.

Stokesov teorem možemo zgodno primijeniti na Maxwellov jednadžbu u diferencijalnom obliku

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Odobravemo li neku zamisliju zatvorenu krivulju  $C$ , možemo primijeniti Stokesov teorem na električno polje

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot } \vec{E}) \cdot d\vec{a} = \int_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{a}$$

Napomena:

Slobodno možemo odabrati bilo koju od beskonačnog mnoštva plohe  $S$  koje razapiraju istu zatvorenu krivulju  $C$ . Pretpostavlja se da nam je poznat vektor  $\text{rot } \vec{E}$  (odnosno vektor  $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ) u svakoj točki odabrane plohe  $S$ .

Površina  $S$  i njen element  $d\vec{a}$  ne mijenjaju se u vremenu, tako da vrijedi

$$\int_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Ovdje je  $\Phi_B$  magnetski tok koji prolazi kroz plohu  $S$ . Konačno dobivamo

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Maxwellova jednadžba u integralnom obliku

Analognu primjenu Stokesove teoreme možemo pokazati na Maxwellovoj jednadžbi u diferencijalnom obliku

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Pretpostavlja se da nam je poznata gustoća struje  $\vec{j}(\vec{r})$  u svim točkama prostora, te vremenska promjena električnog polja  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . (U nekim točkama prostora može biti  $\vec{j}=0$ , ili  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=0$ , važno je da nam je to poznato).

Odobravemo po želji zatvorenu krivulju  $C$  i neku plohu  $S$  koja razapiruje krivulju  $C$ , pa vrijedi Stokesov teorem za  $\vec{B}$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot } \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \int_S \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{a}$$

Gustoću struje  $\vec{j}$  uzimamo u točkama na plohi  $S$ , tako da je  $\int_S \vec{j} \cdot d\vec{a} = I$  struja koje prolazi kroz plohu  $S$ .

Također  $\vec{E}$  uzimamo na plohi  $S$ , pa je

$$\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Konačno dobivamo

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right)$$

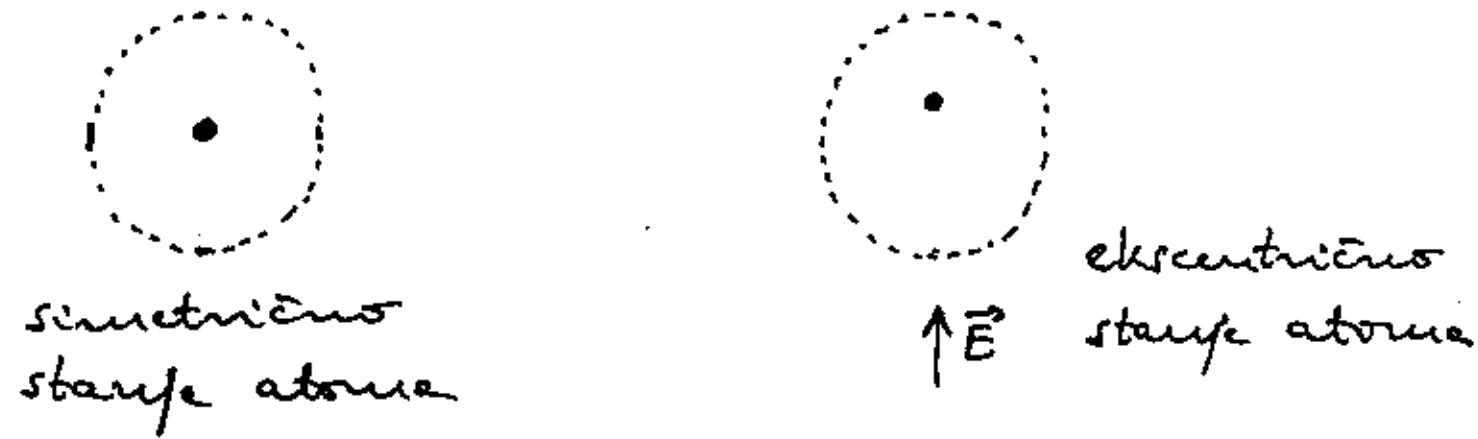
Maxwellova jedn. u integralnom obliku

# 8. OPTIKA

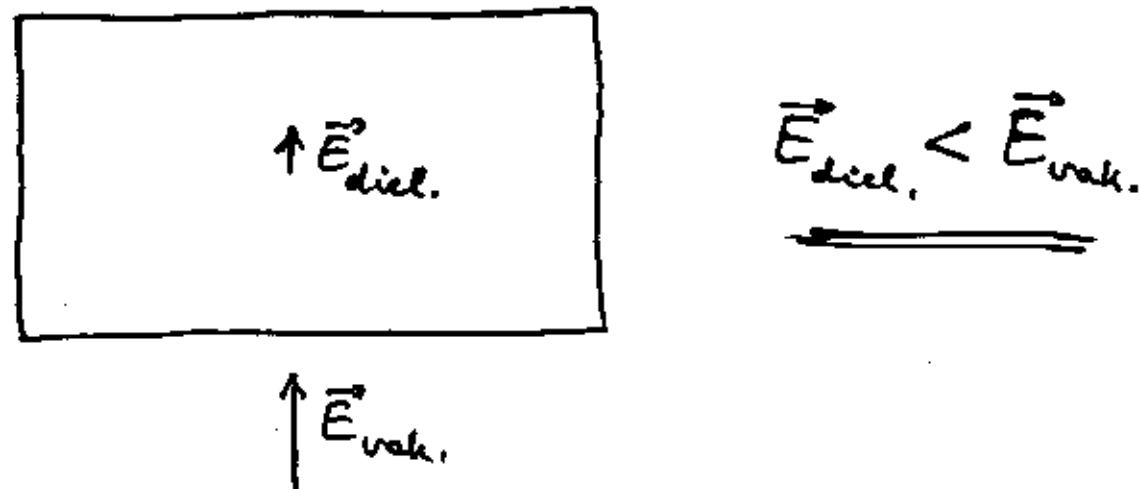
## 8.1. Svjetlost u dielektriku

Dielektrici su tvari koje ne vode električnu struju (izolatori). Elektroni ostaju vezani uz materijalni atomi (nema globalne pokretljivosti). Pod utjecajem vanjskog električnog polja dolazi u svakom atomu do malenog pomaka elektronskog oblaka u odnosu prema jezgri atoma.

Primer jednog (zamisljenog) atoma u dielektriku



Makroskopski učinak svih atoma u dielektriku



Električno polje unutar dielektrika  $\vec{E}_{diel.}$  manje je od električnog polja  $\vec{E}_{vak.}$  koje bi bilo na tome mjestu da nema dielektrika.

Za danu vrstu dielektrika pišemo

$$\vec{E}_{diel.} = \frac{\vec{E}_{vak.}}{\epsilon_r}$$

gdje je  $\epsilon_r$  bezdimenzionalan broj koji se naziva relativna permitivnost dielektrika.

$\epsilon_r$  ovisi o vrsti atoma u dielektriku. Za vakuum je očito  $\epsilon_r = 1$  a za sve dielektrike je  $\epsilon_r > 1$ .

Formalno možemo u svim jednadžbama gdje se pojavljuje permitivnost zamijeniti:

$$\epsilon_0 \xrightarrow{\hspace{2cm}} \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

u vakuumu  u dielektriku

Ovi odnosi vrijede i kod elektromagnetskog vala. Titranje električnog polja dovodi do titranja ekscentričnosti atoma u dielektriku. Makroskopski gledano opet zamjenjujemo  $\epsilon_0$  s  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ .

Stoga imamo disperzijsku relaciju

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} k = ck \xrightarrow{\hspace{2cm}} \omega = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} k = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} k$$

u vakuumu  u dielektriku

Dakle, brzina svjetlosti u dielektriku je

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} < c$$

tj. manje je od brzine svjetlosti u vakuumu.



Granična čestica ima (transmitnu) brzinu koja odgovara zbroju  $v_u + v_v$  sudedi preme valovine u prvom sredstvu, odnosno brzinu  $v_t$  sudedi preme transmiviranoj valu u drugom sredstvu. Džto more biti

$$v_u + v_v = v_t$$

Brzine možemo izraziti pomoću sile i inpedancije iz početnih jednadžbi te dobivamo

$$\frac{F_u}{Z} - \frac{F_v}{Z} = \frac{F_t}{Z'}$$

Istovremeno još i jednadžbu za silu

$$\frac{F_u - F_v}{Z} = \frac{F_u + F_v}{Z'}$$

$$(F_u - F_v)Z' = (F_u + F_v)Z$$

$$-F_v(Z + Z') = F_u(Z - Z')$$

Koeficijent refleksije za silu iznosi

$$R_F = \frac{F_v}{F_u} = -\frac{Z - Z'}{Z + Z'}$$

Vidimo da se sila reflektira sa suprotnim predznakom od amplitude pomaka u mehaničkom valu. Isto smo imali i za tlak u odjeljku 4.5.

Za koeficijent transmisije slijedi iz jednadžbe za silu

$$F_t = F_u + F_v = F_u + R_F F_u = (1 + R_F) F_u$$

$$T = \frac{F_t}{F_u} = 1 + R_F$$

Možemo se sada vratiti na svjetlost koja upada iz vakuma okomito na dielektrik.

Za električno polje vrijedi

$$R_E = -\frac{Z_{\text{vak.}} - Z_{\text{diel.}}}{Z_{\text{vak.}} + Z_{\text{diel.}}} = -\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = -\frac{n-1}{n+1}$$

$$T_E = 1 + R_E = \frac{2}{n+1}$$

Npr. za prijelaz iz vakuma (ili zraka) u staklo ( $n = \frac{3}{2}$ ) imamo  $R_E = -\frac{1}{5}$ , a  $T_E = \frac{4}{5}$ . Reflektira se oko 4% upadnog intenziteta.

Što se zbiva s ostalim veličinama?

Frekvencija se ne može promijeniti. Međutim, za valne brojeve (valne duljine) imamo

$$\omega = ck_{\text{vak.}} = \frac{c}{n} k_{\text{diel.}} \Rightarrow k_{\text{diel.}} = nk_{\text{vak.}}$$

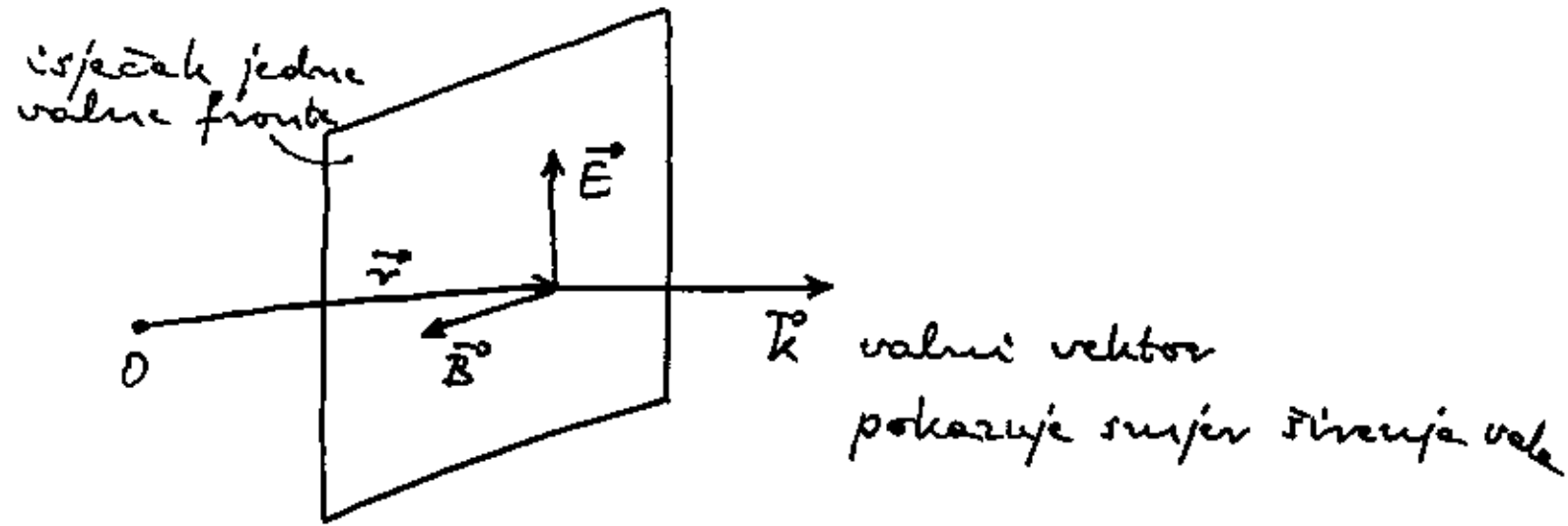
$$\frac{2\pi}{\lambda_{\text{vak.}}} = \frac{1}{n} \frac{2\pi}{\lambda_{\text{diel.}}} \Rightarrow \lambda_{\text{diel.}} = \frac{\lambda_{\text{vak.}}}{n}$$

Valni broj se u dielektriku povećava u odnosu preme vakuumu za faktor  $n$ , a valna duljina postane kraća za faktor  $n$ .



## 8.2. Aproksimacija geometrijske optike

Ravan elektromagnetski val (u vakuumu ili u dielektriku) je idealizacija koja podrazumijeva beskonačne ravne valne fronte.



$k$  valni vektor  
pokazuje smjer širenja vala

Vektori polja  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  okomiti su na  $k$ , tj. leže u ravnini valne fronte.

Vektor  $\vec{r}$  služi za označavanje položaja točke (vrh vektora) u kojoj želimo promatrati polja  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ . Valne funkcije ravnog elektromagnetskog vala su

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} \sin(\omega t - k \cdot \vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B} \sin(\omega t - k \cdot \vec{r})$$

Amplitude  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  ne ovise o  $\vec{r}$ . Za sve točke u ravnini jedne valne fronte skalarni produkt  $k \cdot \vec{r}$  ima istu vrijednost.

Stoga u danome trenutku svako polje ima istu vrijednost u svim točkama jedne valne fronte.

## Važna tvrdnja:

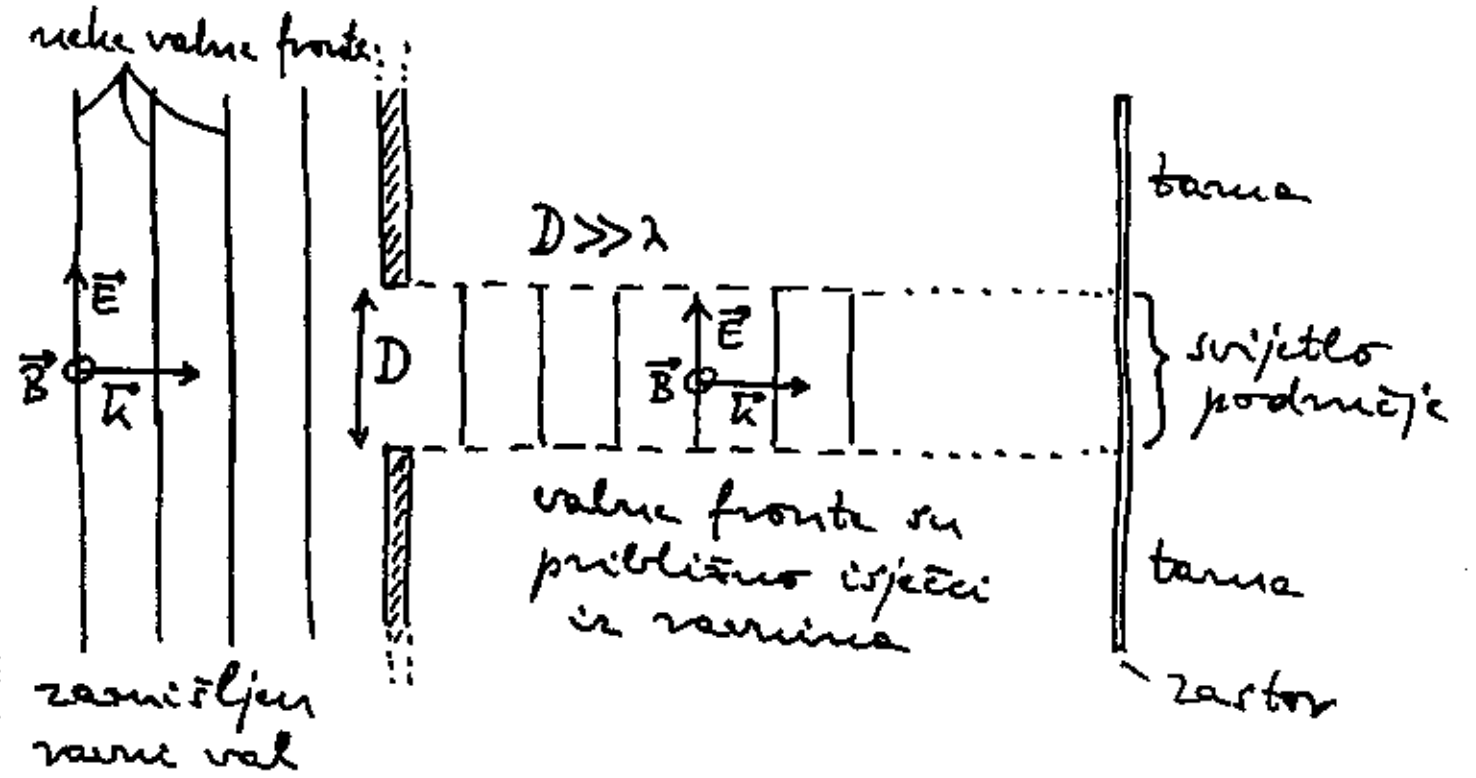
Za ravan val se može reći da se širi strogo pravocrtno u smjeru valnog vektora  $k$ .

Međutim, u realnosti nikada nemamo valne fronte kao beskonačne ravne.

U kojim uvjetima možemo govoriti o približno pravocrtnom širenju svjetlosti?

Razmotrimo dva primjera:

### a) svjetlost prolazi kroz otvor



raspršljen ravnog val

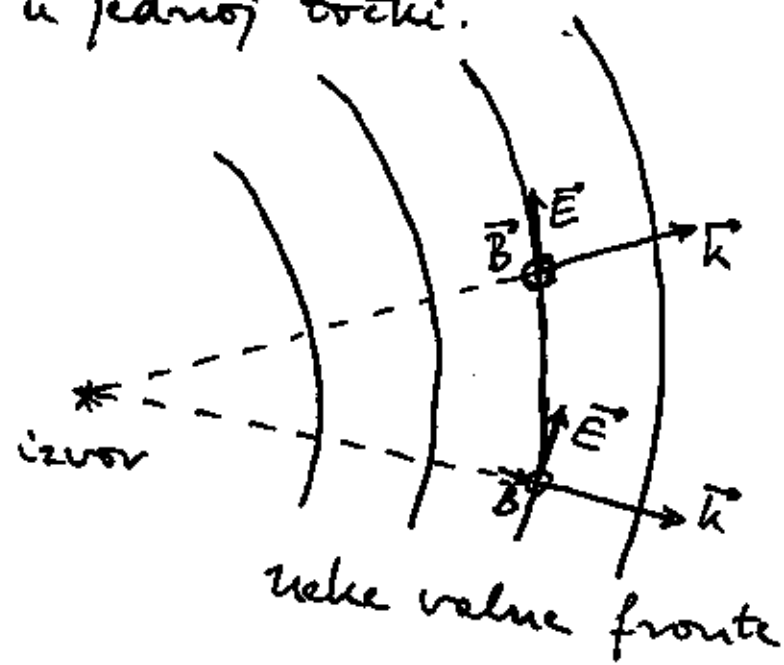
Ako je otvor mnogo veći od valne duljine svjetlosti ( $D \gg \lambda$ ), možemo smatrati da je snop svjetlosti nakon otvora aproksimativno ravan val koji se širi u dobro definiranom smjeru (smjer valnog vektora  $k$ ).

Npr. otvor promjera  $D = 5 \text{ mm}$  je velik otvor za vidljivu svjetlost (za  $\lambda = 500 \text{ nm}$  omjer  $\frac{D}{\lambda} = 10^4$  je jako velik).

Na rastoru se vidi svjetlo područje koje odgovara širine snopa svjetlosti. Rub svjetlog područja i tamne oštar je ako se gleda na skali širine  $D$ . To je aproksimacija geometrijske optike u kojoj uvažavamo da se svjetlost širi pravocrtno.

### b) svjetlost iz točkastog izvora

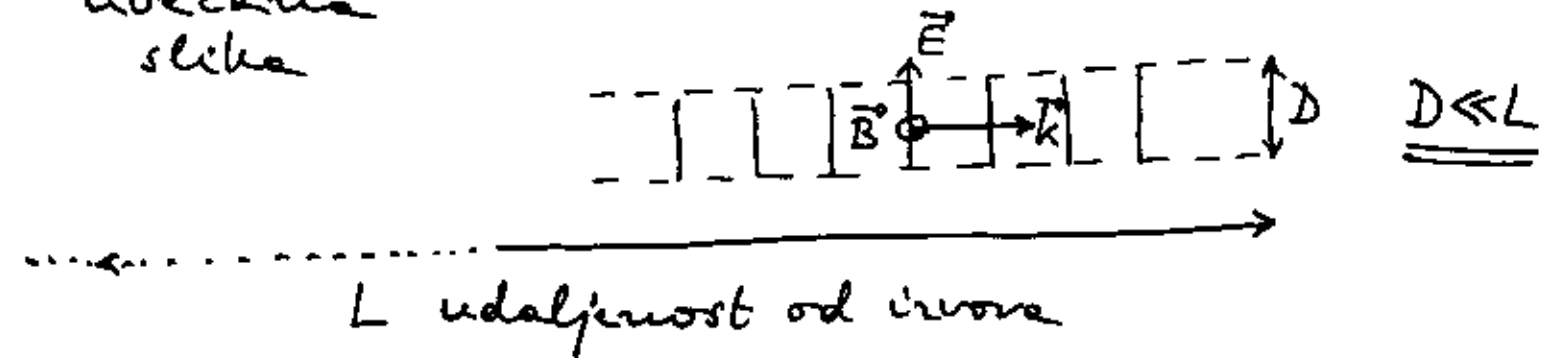
Svaki realan izvor svjetlosti ima konačne dimenzije. Na udaljenostima koje su mnogo veće od dimenzija izvora čini nam se da je izvor gotovo u jednoj točki.



Valne fronte definiramo i u ovom slučaju kao skup točaka u kojima je faza tih valova polja ista. Valne fronte očito nisu ravne pa ovo nisu ravni valovi. Valni vektori  $\vec{k}$  imaju različite smjerove u raznim točkama iste valne fronte. Isto vrijedi i za polja  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ .

Međutim, ako uvažimo dovoljno uzak snop svjetlosti možemo na nekoj udaljenosti  $L$  od izvora smatrati da su valne fronte približno isječci iz ravnine.

uvodna slika



Ipak, mora se uzeti širina snopa mnogo veća od valne duljine svjetlosti ( $D \gg \lambda$ ). Npr. za snop širine  $D = 0,5 \text{ mm}$  na udaljenosti  $L = 0,5 \text{ m}$  od izvora imamo  $\frac{D}{L} = 10^{-3}$  pa su valne fronte unutar snopa približno ravne a istodobno je za vidljivu svjetlost od  $\lambda = 500 \text{ nm}$  omjer  $\frac{D}{\lambda} = 10^3$  jako velik.

Za takav snop možemo reći da se širi pravocrtno, tj. s valnim vektorom  $\vec{k}$  određenog smjera.

Od izvora svjetlosti možemo zamisljati mnoštvo uzkih snopova u raznim smjerovima (različiti  $\vec{k}$ ). Aproksimacija geometrijske optike zamjenjuje svaki takav dovoljno uzak ( $D \ll L$ ) i dovoljno širok ( $D \gg \lambda$ ) snop svjetlosti jednom zrakom kao pomoćnom geometrijskom točevinom. Smjer zrake svjetlosti je duž valnog vektora  $\vec{k}$  dotičnog snopa.

### 8.3. Zakoni geometrijske optike

Zakoni geometrijske optike opisuju put zrake svjetlosti. Njih izvodimo iz valne prirode svjetlosti uz uvažavanje aproksimacija koje su nužne za geometrijsku optiku.

#### a) Prvi zakon geometrijske optike

Već smo u prethodnom odjeljku 8.2. razjasnili da se unutar aproksimacije geometrijske optike svjetlost širi pravocrtno. Stoga prvi zakon geometrijske optike kaže da se zrake svjetlosti šire pravocrtno u danom optičkom sredstvu (vakuumu ili dielektriku).

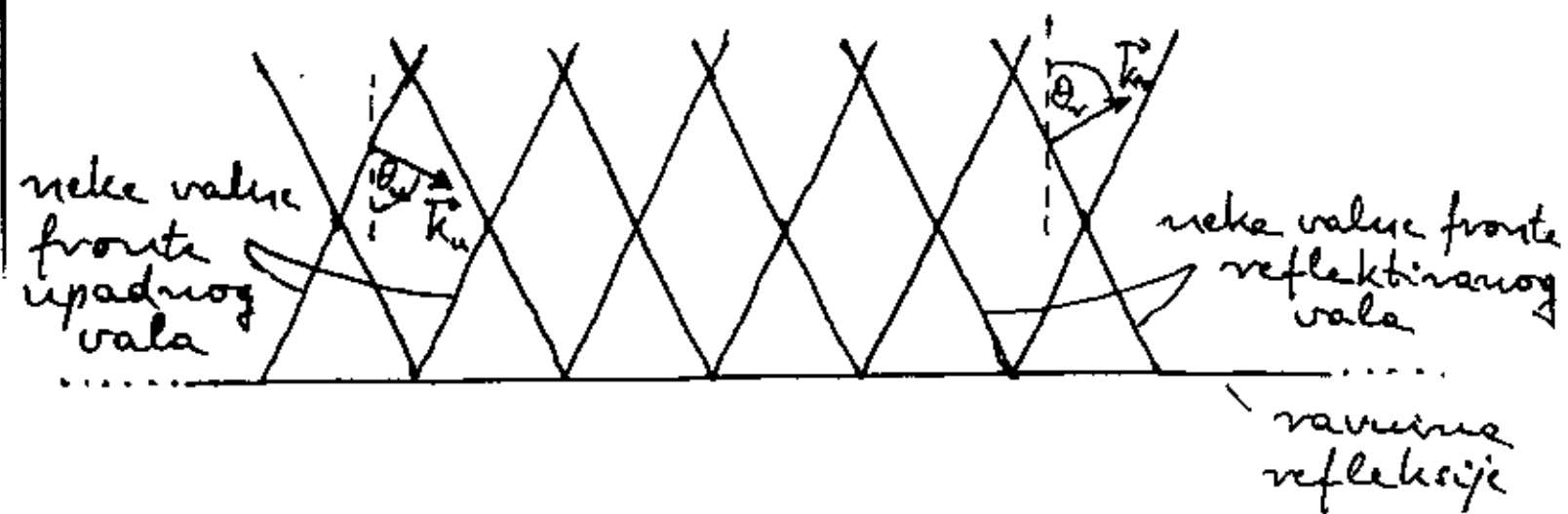
#### b) Drugi zakon geometrijske optike

Drugi zakon se odnosi na refleksiju svjetlosti. Do refleksije dolazi uvijek kada svjetlost naiđe na promjenu impedancije valnog sredstva.

#### Napomena:

Impedancije određuju koeficijente refleksije i transmisije. Određivanje snjega reflektiranog i transmimiranog vala temelji se na odnosima valnih vektora (v. odjeljak 4.3).

Za elektromagnetske ravne valove vrijedi isto što i za mehančke (uz zamjenu  $\sqrt{\frac{T}{\rho}} \rightarrow \frac{c}{n}$ ).



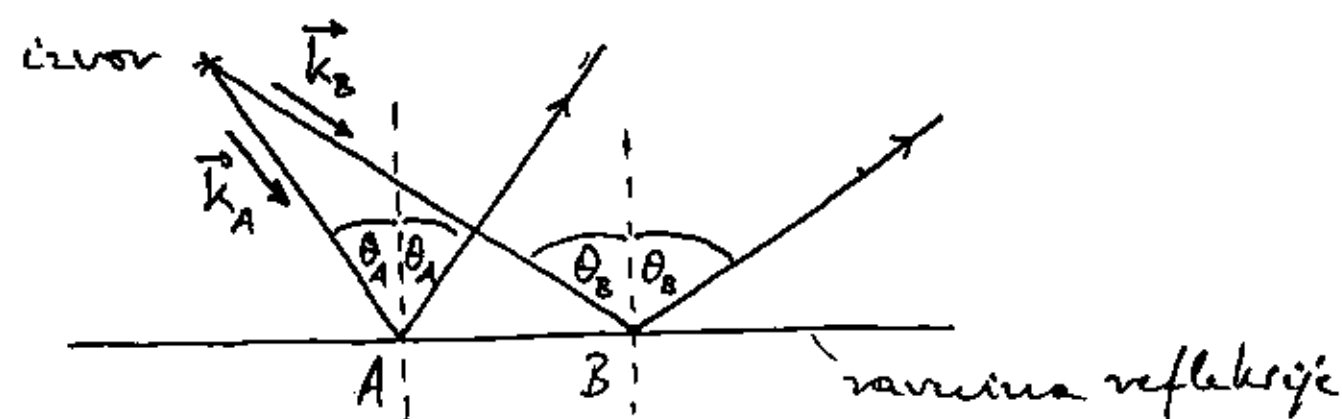
Ravan val je beskonačan pa se refleksija zbiva u svim točkama granične plohe na isti način. Valni vektor  $\vec{k}_u$  je jednak to isti za cijeli upadni val. Također je  $\vec{k}_r$  jednak to isti za cijeli reflektirani val. Vrijedi rezultat (izvod u odjeljku 4.3)

$$\theta_u = \theta_r$$

Kut refleksije jednak je upadnom kutu. Kutovi se mjere od okomice na ravninu refleksije do snjega valnog vektora.

Što se zbiva ako upadni val nije ravan val?

Uzmimo primjer točkastog izvora svjetlosti na konačnoj udaljenosti od ravnine refleksije



Primijenimo aproksimaciju geometrijske optike. Od izvora prema točki A unesemo uzak snop svjetlosti unutar kojega su valne fronte približno isječci ravnine a valni vektor je  $\vec{k}_A$ . Snop je makroskopski gledano uzak ali ipak mu je širina mnogo veća od valne duljine svjetlosti. U točkama ravnine refleksije oko A nastaje refleksija približno kao za ravan val ( $\theta_A$  je upadni kut i kut refleksije).

Za refleksiju u okolini točke B na zrcalu moramo uzeti drugi uzak snop svjetlosti koji se ponaša približno kao ravan val s valnim vektorom  $\vec{k}_B$ . On čini upadni kut  $\theta_B$  i reflektira se pod tim istim kutom.

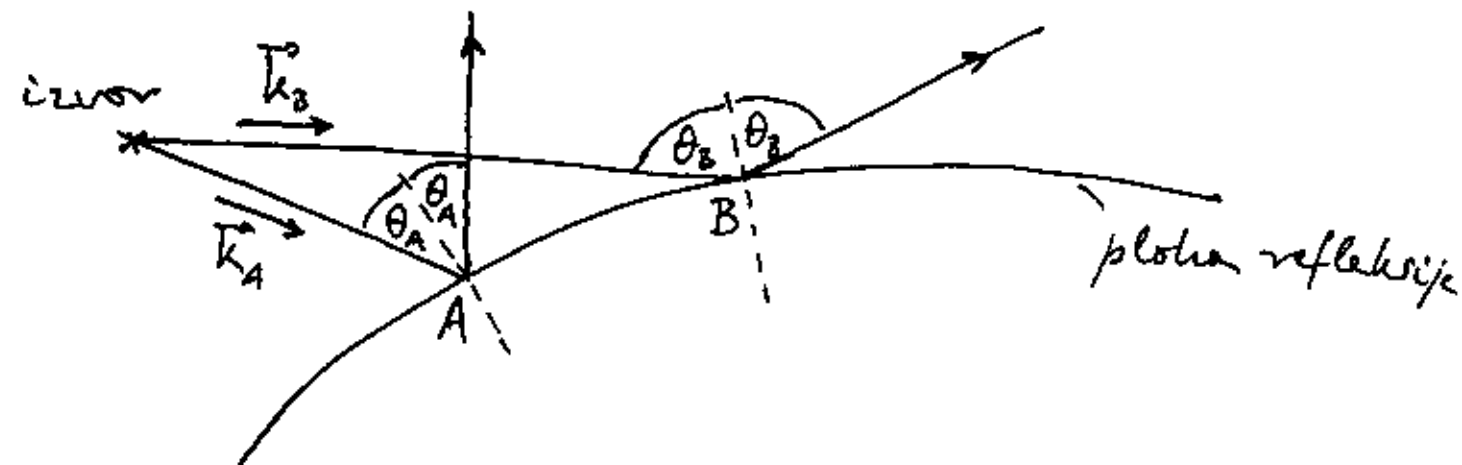
Mogli bismo uzimati po volji točke C, D, ... u ravni refleksije. U aproksimaciji geometrijske optike razmjerujemo takve uske snopove zraka svjetlosti kao pomoćnim geometrijskim trokutovima.

Drugi zakon geometrijske optike kaže da se zraka svjetlosti reflektira pod istim kutom pod kojim i upada na ravnu refleksiju

$$\theta_u = \theta_r$$

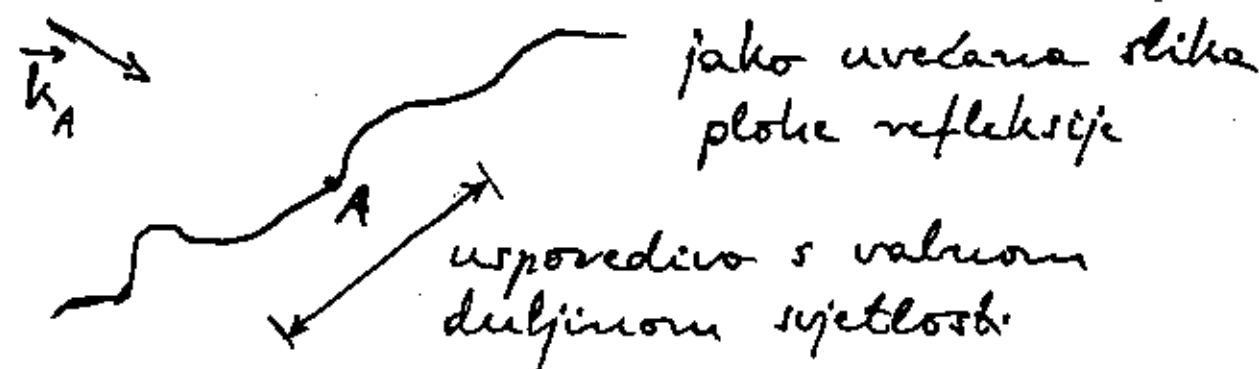
Kutovi se računaju od okomice na ravni refleksije i to za svaku zraku zasebno.

Što ako je ploha refleksije zakrivljena?



Za uzak snop svjetlosti od izvora do neke točke na plohi refleksije bitna je zakrivljenost plohe u okolini te točke. Ako je zakrivljenost plohe malena unutar širine snopa D, možemo smatrati da je taj dio plohe približno ravan pa vrijedi zakon refleksije  $\theta_u = \theta_r$  s time da se kutovi računaju od okomice na tangencijalnu ravni na toj mjestu.

Što ako je ploha refleksije neravna (krakava)?



Za primjenu zakona geometrijske optike moramo uzeti snop širine  $D \gg \lambda$ . Ako je ploha refleksije neravna unutar dimenzije D onda nema dobro definirane refleksije iz točke A. Nastaje difuzna svjetlost.

### c) Treći zakon geometrijske optike

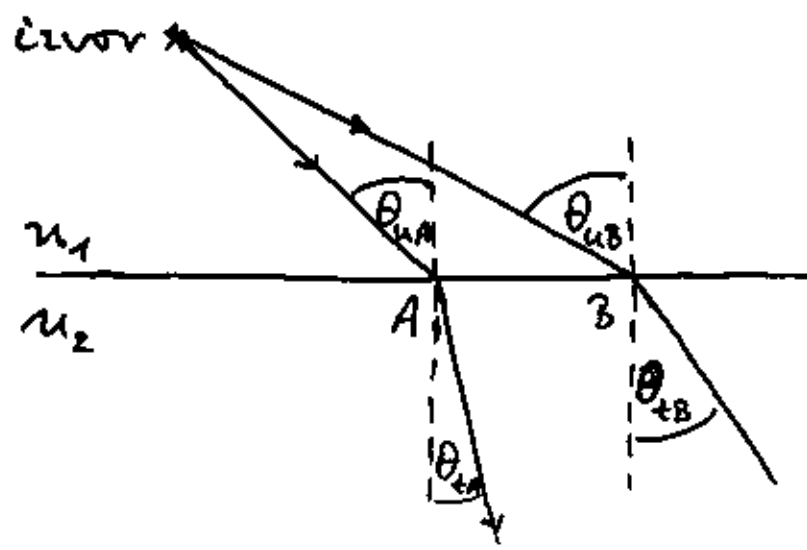
Treći zakon geometrijske optike odnosi se na određivanje srujenja srujenja transmitirane svjetlosti.

Za (idealizirane) ravne svjetlosne valove vrijedi izvod iz odjeljka 4.3 uz razmjernu  $\sqrt{\frac{T}{\rho}} \rightarrow \frac{c}{n_1}$  i  $\sqrt{\frac{T}{\rho'}} \rightarrow \frac{c}{n_2}$  (svjetlost ide iz sredstva s indeksom loma  $n_1$  u sredstvo s indeksom loma  $n_2$ )

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_u} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{Snellov zakon loma}$$

Kod ravnih valova svjetlost se lomi u svakoj točki granične ravnine na isti način ( $\theta_u$  i  $\theta_t$  su posvuda isti).

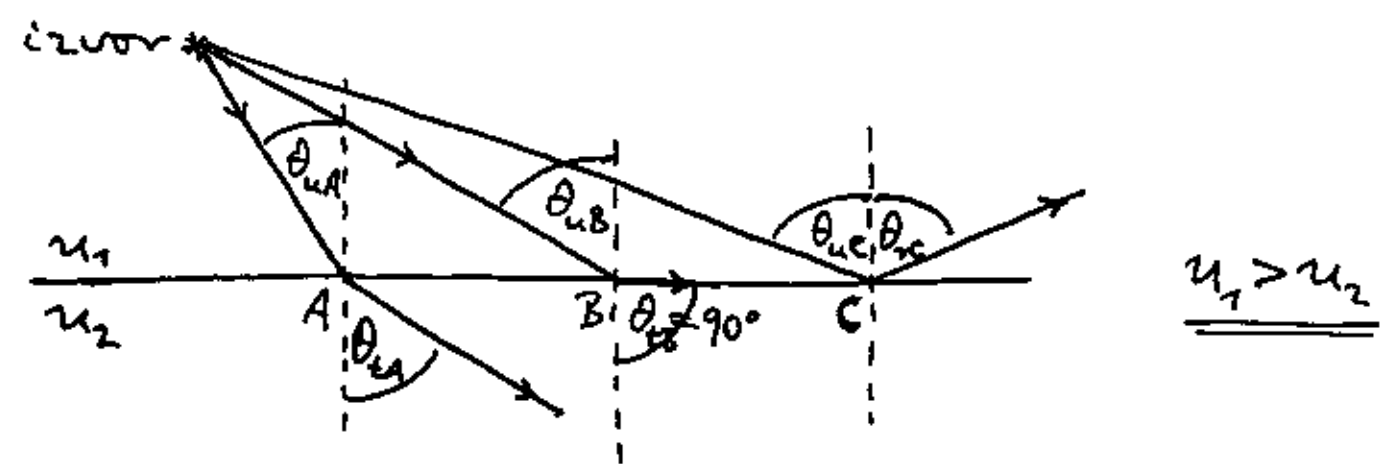
Ako imamo točkasti izvor svjetlosti na konačnoj udaljenosti od granične ravnine postupamo po analogiji s prethodnim slučajem refleksije, tj. odabivemo uske snopove i uspostavljamo aproksimaciju geometrijske optike



$$\frac{\sin \theta_{uA}}{\sin \theta_{tA}} = \frac{\sin \theta_{uB}}{\sin \theta_{tB}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Zraka svjetlosti koja ide iz optički vješteg u optički gušće sredstvo ( $n_1 < n_2$ ) lomi se prema okonici.

Razmotrimo i obrnut slučaj, tj. kada zraka svjetlosti dolazi iz optički gušćeg sredstva ( $n_1 > n_2$ )



Granica mogućeg loma dosegne se za  $\theta_t \rightarrow 90^\circ$ , a to se postiže za kritičan upadni kut

$$\frac{\sin \theta_{\text{krit.}}}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1} \implies \sin \theta_{\text{krit.}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Za  $\theta_u < \theta_{\text{krit.}}$  imamo transmitiranu svjetlost koja se lomi od okonice po Snellovu zakonu.

Za  $\theta_u > \theta_{\text{krit.}}$  nema transmitirane svjetlosti. Sve se svjetlost reflektira pa se fenomen naziva totalna refleksija.

Ako je granična ploha blago zakrivljena kutovi se računaju od okonice na tangencijalnu ravninu u dotičnoj točki granične plohe (analogno kao kod razmatranja refleksije).

### Napomena:

Ako je granična ploha krapava na skali usporedivoj s valnom dužinom svjetlosti, aproksimacija geometrijske optike nije više primjenjiva jer se ne može dobro definirati okonica na graničnoj plohi. Stoga lomljene zrake nemaju određen smjer, nego nastaje difuzna svjetlost u transmisiji (isto kao i u refleksiji).

### Pokusi:

pravocrtno širenje, zakon refleksije, zakon loma svjetlosti, totalna refleksija

## 8.4. Pojam predmeta i slike u geometrijskoj optici

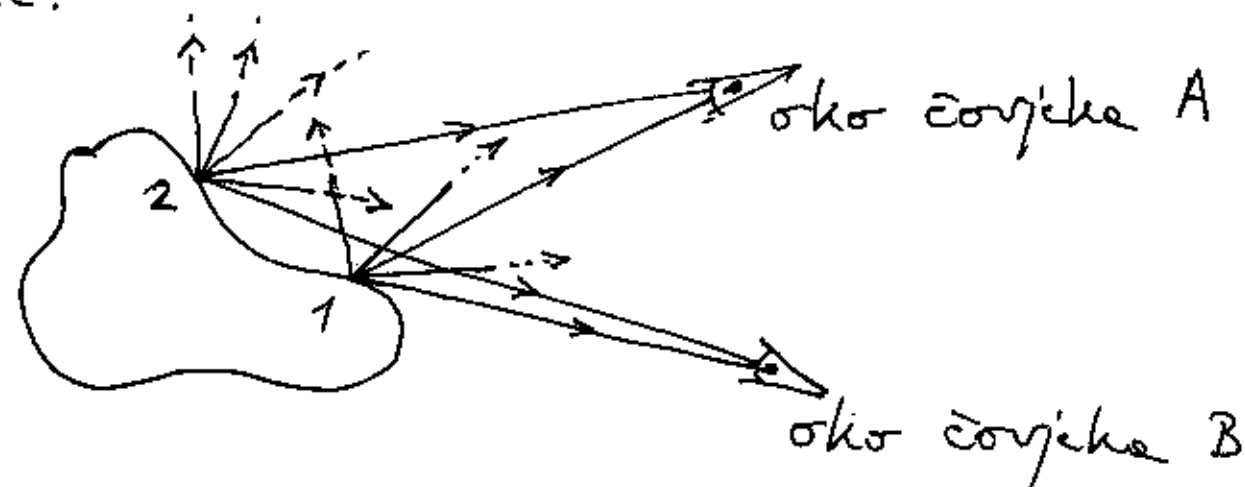
Za potrebe geometrijske optike predmet može biti bilo koje tijelo od kojega se iz pojedinih njegovih točaka šire divergentni snopovi svjetlosti, ponekad na sve strane (puni prostorni kut), a ponekad samo u ograničenom prostornom kutu.

Predmet je, dakle, izvor svjetlosti koju dalje razmatramo u geometrijskoj optici. Možemo razlikovati primarne i sekundarne izvore svjetlosti. Npr. plamen upaljene svijeće predstavlja primarni izvor svjetlosti. Naime, plamen svijeće se vidi i u zamračenoj prostoriji u kojoj nema drugih primarnih izvora svjetlosti. Plamen upaljene svijeće obično osvjetljava neke okolne predmete u prostoriji, pa i samo tijelo svijeće. Ti su predmeti obično krapavi na skali valne dužine svjetlosti, pa se upadne svjetlost od njih reflektira difuzno. To znači da se iz pojedinih njihovih točaka šire divergentni snopovi svjetlosti, pa ih možemo smatrati predmetima u smislu geometrijske optike. Ovi postaju sekundarni izvori svjetlosti.

### Napomena:

Zrcala i leće ne smatramo "predmetima" u geometrijskoj optici, nego instrumentima za stvaranje slike.

U nesvijetljenoj prostornoj svjetlosti se višestruko difuzno reflektira na zidovima, namještaju i svim predmetima. Valja naglasiti da se od sveke točke na površini predmeta širi svjetlost na sve moguće strane.



Sveki čovjek vidi predmet tako što u njegovo oko dolaze poneka zraka iz sveke od točaka predmeta na površini koja je okrenuta prema čovjeku. Čovjek A može raspoznati dvije točke (npr. točke 1 i 2 na slici) zato što iz tih točaka dolaze u njegovo oko zrake iz različitih smjerova.

Iste točke predmeta može vidjeti i drugi čovjek B (na slici) s tim da u njegovo oko dolaze druge zrake iz istih točaka.

U geometrijskoj optici svaki izvor svjetlosti (primaran ili sekundaran) može poslužiti kao predmet (ili "objekt"). Pomocu instrumenata geometrijske optike (zrcala, leće) možemo napraviti sliku tog predmeta.

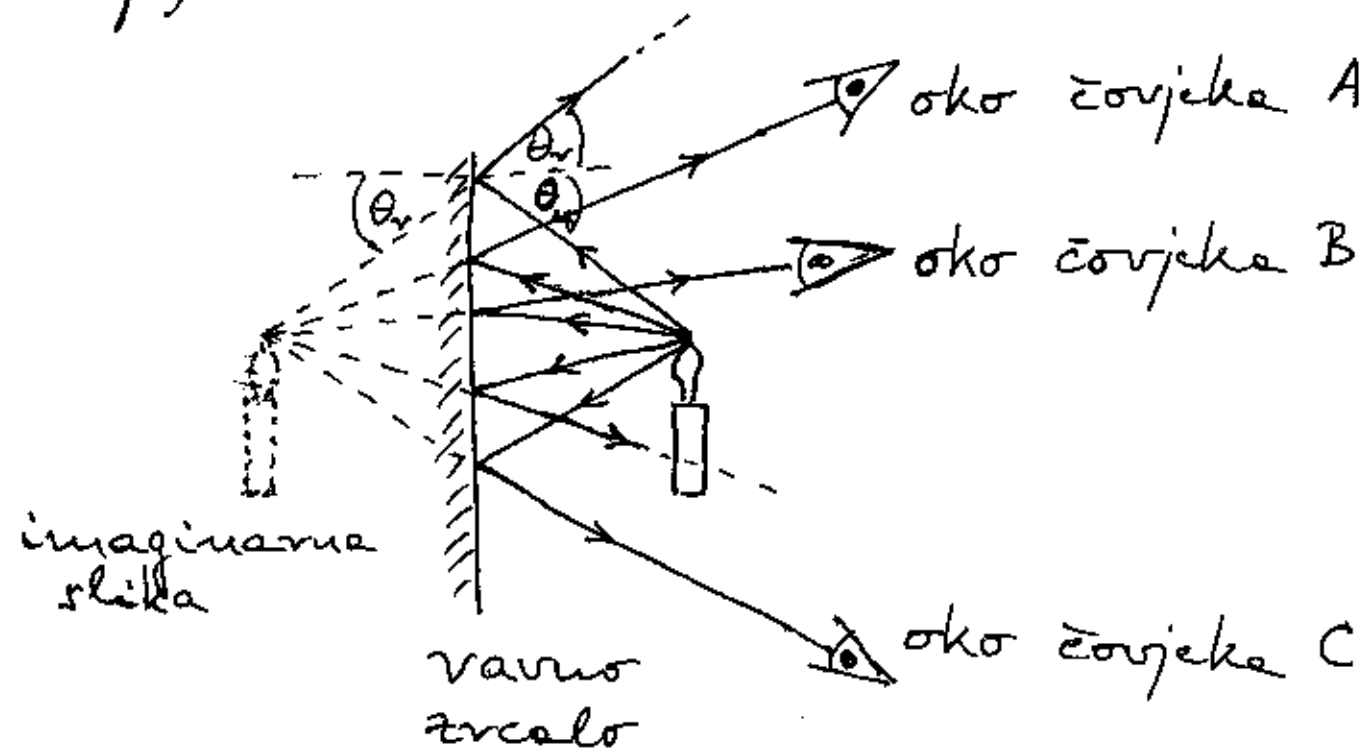
Ako je predmet točkast, onda će idealan optički instrument napraviti točkastu sliku. Kažemo da su te dvije točke stigmatične. Ako optički instrument ne napravi točkastu nego "razmazanu" sliku, kažemo da postoji astigmatizam. O toj pojavi ne ćemo ovdje detaljnije govoriti.

Predmeti najčešće imaju neku veličinu u prostoru, pa možemo smatrati kao da se sastoje od mnoštva točkastih predmeta. Optički instrument će od sveke točke predmeta napraviti sliku u obliku točke na nekomu mjestu. Skup svih točkastih slike predstavlja cjelokupnu sliku predmeta koja ima neki svoj položaj i veličinu u prostoru.

Nastanak slike i njena svojstva razmatrat ćemo u nastavku na nekim primjerima.

## 8.5. Nastanak slike na ravnom zrcalu

Razmotrimo kao primjer upaljeni svijeću ispred ravnog zrcala. Radi jednostavnosti analizirajmo samo zrake koje izlaze iz vrha svijeće (divergentan snop).



Iz vrha plamena upada na ravno zrcalo mnoštvo zraka svjetlosti. Kutovi upada  $\theta_u$  za pojedine zrake se razlikuju, no uvijek ih prati odgovarajući kut refleksije  $\theta_r$  prema zakonu refleksije ( $\theta_u = \theta_r$ ).

Smjer reflektirane zrake možemo zamisljeno upotpuniti pravcem koji se proteže i na drugu stranu (neprozirnog) zrcala. Ako to

napravimo za veći broj zraka, nalazimo da se svi ti produženi pravci sijeku u točki koja je s obzirom na zrcalo u simetričnom položaju prema vrhu plamena. Stvaramo važan zaključak: Sve zrake svjetlosti koje su iz vrha plamena išle prema ravnom zrcalu, reflektirale su se od njega i nastavile svoj put kao da su došle iz simetrične točke s druge strane zrcala. Ta se točka naziva imaginarna slika vrha plamena.

Sada je jasno zašto imaginarnu sliku ne možemo vidjeti na zrcalu. Naime, ako zrcalo postavimo na mjesto imaginarne slike, na njemu se ne će ništa pojaviti jer tu uopće ne dolaze zrake svjetlosti. One su se stvarno reflektirale na zrcalu.

Imaginarnu sliku možemo vidjeti izravno gledajući okom. U oko dolaze reflektirane zrake, ali se čini kao da je ta zraka došla iz točke u kojoj je imaginarna slika. Oku se čini kao da na mjestu imaginarne



slike stoji stvaran objekt.

### Napomena:

Valja uočiti da iz imaginarne slike (prividno) izlazi divergentan snop svjetlosti, baš kao što je to slučaj i s realnim predmetom (objektom).

Iz konstrukcije slike je jasno da za promatranje imaginarne slike možemo postaviti ljudsko oko bilo gdje unutar reflektiranog snopa svjetlosti. Također, više ljudi može istodobno promatrati istu imaginarnu sliku.

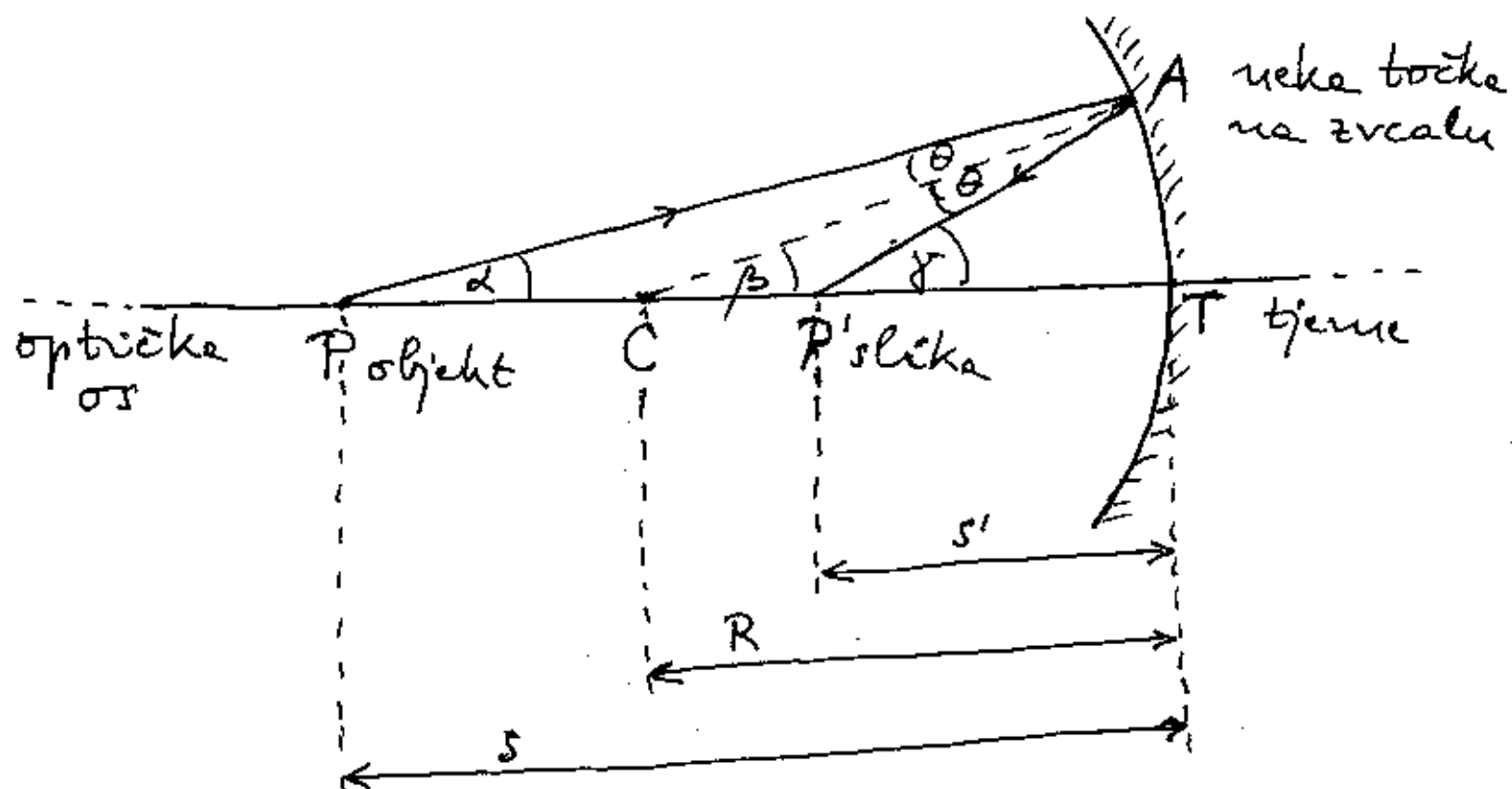
### Pokusi:

slike u nepropusnom ravnom zrcalu  
polupropusno ravno zrcalo i dvije svijeće

## 8.6. Sferno zrcalo

Razmotrimo najprije konkavno (udubljeno) sferno zrcalo. Središnju točku sfernog zrcala nazivamo tjemenom  $T$ . Pravac kroz centar zakrivljenosti  $C$  i tjeme  $T$  zove se optička os sfernog zrcala.

Neka je  $P$  točka objekta. Iz nje izlazi divergentan snop zraka svjetlosti i dolazi na zrcalo gdje se reflektira. Postavlja se pitanje što se zbiva s reflektiranim snopom. Postavimo točku  $P$  na optičku os, dalje od centra zakrivljenosti  $C$ .



Ako se objekt nalazi jako daleko ( $s \rightarrow \infty$ ), njegova se slika približava položaju  $s' \rightarrow \frac{R}{2}$ . Ta se točka naziva fokus F, a njena udaljenost od tjemena predstavlja žarišnu daljinu

$$f = \frac{R}{2}$$

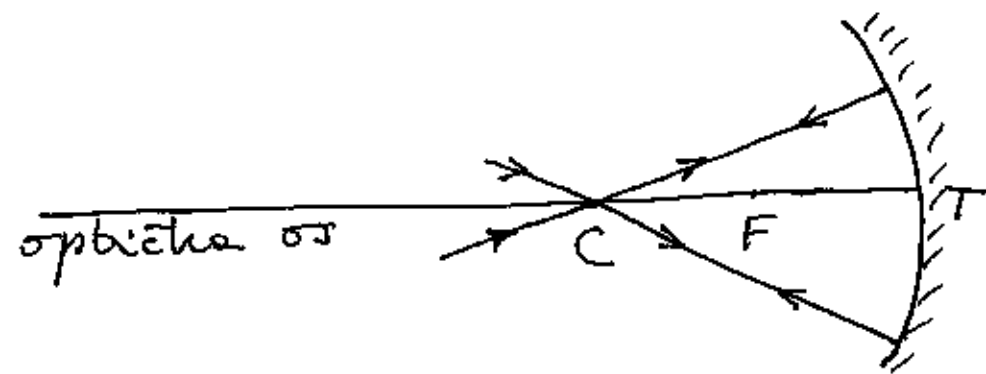
Možemo pisati jednadžbu sfernog zrcala u obliku

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

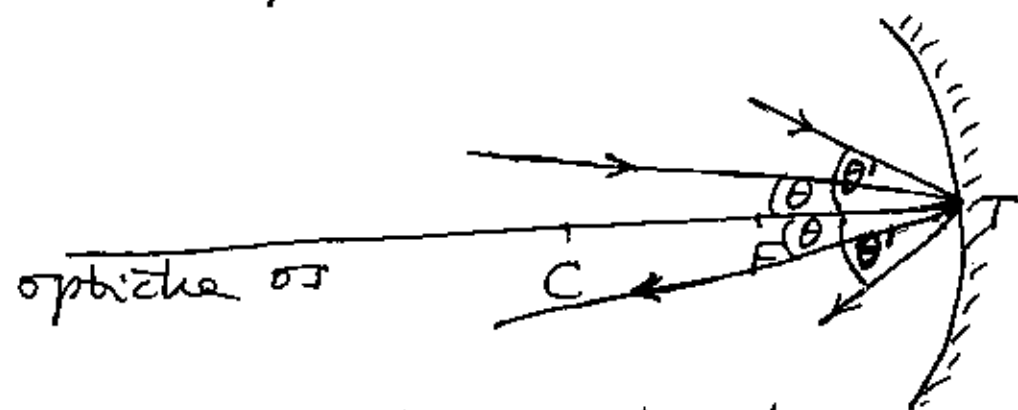
Realan predmet (objekt) ima svoju veličinu. Iz svake njegove točke prostire se divergentan snop svjetlosti prema sfernom zrcalu i nakon refleksije nastaje konvergentan snop koji daje realnu sliku u nekoj točki. Skup slike svih točaka predstavlja ukupnu sliku koja ima svoju veličinu.

U svrhu konstrukcije položaja i veličine slike zgodno je poslušati se pravilima za karakteristične zrake.

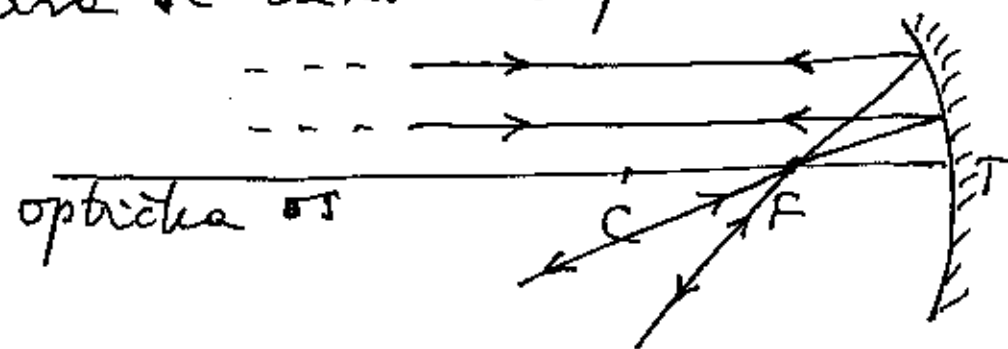
I. pravilo: Svaka zraka koja prolazi kroz središte zakrivljenosti C i upade u nekoj točki na sferno zrcalo, reflektira se istim putem natrag.



II. pravilo: Svaka zraka koja upade na sferno zrcalo u točki tjemena T i tvori neki kut  $\theta_u$  s optičkom osi, reflektira se pod jednakim kutom ( $\theta_r = \theta_u$ ) na drugu stranu od optičke osi.



III. pravilo: Svaka zraka koja upade na sferno zrcalo paralelno s optičkom osi reflektira se tako da prolazi kroz fokus F.

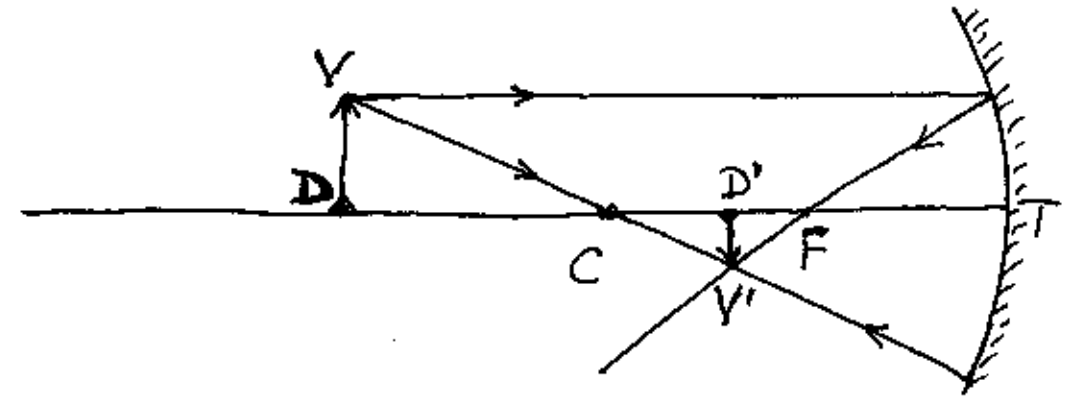


uvijedi i obrat snop zrake

Za svaku zraku svjetlosti vrijedi i obrat  
 snijera, tj. ako iz reflektiranog snijera pota-  
 ljemo zraku istim putem natrag na zrcalo,  
 ona će se reflektirati u ovaj snijer duž kojega  
 je prethodno upadala. Drugim riječima,  
 upadna i reflektirana zraka čine vrtanu  
 par snijerova koji vrijedi i kada obrnemo  
 put zrake.

Navedeno svojstvo kod obrata svjetlosti  
 ne mijenja ništa u I. i II. pravilu, a za  
 III. pravilo daje dopunu: Svake zrake koje  
 prolazi kroz fokus i upada na sferno  
 zrcalo, reflektira se tako da postane  
 paralelna s optičkom osi (prikazano  
 strelicama na prethodnom crtežu).

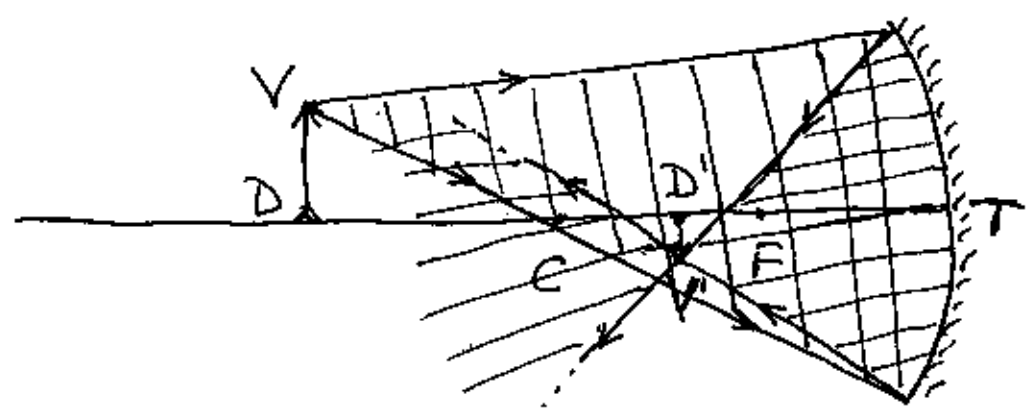
Možemo sada konstruirati sliku jednog  
 predmeta (strijele) koji se proteže od dna  $D$   
 do vrha  $V$



Dovoljno nam je nacrtati samo dvije  
 karakteristične zrake i naći njihovo  
 sjecište nakon refleksije. Sve ostale zrake  
 moraju se sjeći u istoj točki. Na crtežu  
 je prikazan samo postupak u kojemu  
 od vrha  $V$  dobivamo njegovu sliku  $V'$ .  
 Po istome postupku mogli bismo od svake  
točke strijele između  $D$  i  $V$  dobiti sliku u  
 obliku točke između  $D'$  i  $V'$ . Dakle, skup  
 svih točkastih slika od  $D$  do  $V$  predstavlja  
 ukupnu sliku predmeta (strijele) od  $D$  do  $V$ .

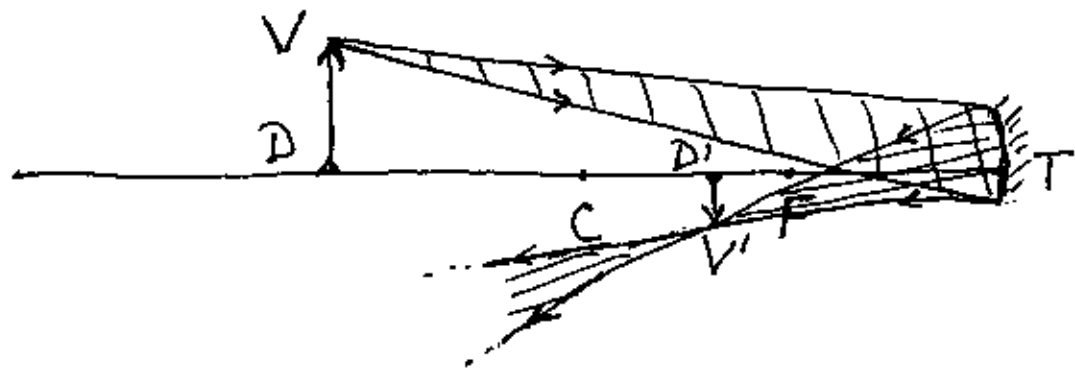
Napomene:

a) Pogrešno bi bilo shvatiti da slika  $V'$   
 nastaje samo od karakterističnih zraka  
 koje možemo povući iz vrha  $V$  prema  
 zrcalu. Naprotiv, sliku  $V'$  stvaraju sve zrake  
 u snopu svjetlosti koji od vrha predmeta  $V$   
 upada na sferno zrcalo.



Na crtežu su prikazane samo rubne zrake snopa svjetlosti koji iz  $V$  upada na sferno zrcalo (cijeli upadni snop je simbolički obilježen kotnim puzama  $\parallel$ ). Reflektirani snop se nalazi unutar rubnih zraka (simbolički obilježen crtama  $\equiv$ ). Sve zrake u reflektiranom snopu sijeku se u točki  $V'$ , a zatim se razilaze u divergentnom snopu.

[b] Veličina sfernog zrcala može biti manje od predmeta, a ipak nastaje cjelovita slika.



Na crtežu je prikazan samo snop koji ide od vrha  $V$  na sferno zrcalo i nakon refleksije se sijeku u točki  $V'$ . Kada bismo nacrtali snop koji ide iz točke  $D$  prema sfernom zrcalu, taj bi se snop nakon refleksije sjekao u točki  $D'$ .

Postavlja se pitanje kako možemo vidjeti sliku  $\overline{D'V'}$ . Postoje dva načina. Prvi je da na to mjesto postavimo zrtor kojemu je površina mapava na skali valne duljine svjetlosti tako da zrtor reflektira difuznu svjetlost (na sve strane). Ljudsko oko može biti bilo gdje na nekoj udaljenosti od zrtora i vidjeti tu sliku kao da se radi o svijetlećem objektu (sekundarni izvor). Drugi je način taj da (bez ikakve zrtora) postavimo oko na nekoj udaljenosti (lijevo) od položaja slike kada snop svjetlosti nakon presijecanja postane divergentan. Svaka točka slike  $\overline{D'V'}$  djeluje kao realan izvor svjetlosti za oko. Ako je sferno zrcalo maleno, valja voditi računa o tome da se oko postavi unutar (relativno uskog) divergentnog snopa. U ovisnosti o položaju oka, može se dogoditi da oko vidi točku  $V'$ , ali ne i sve druge točke do  $D'$  (ili obrnuto).

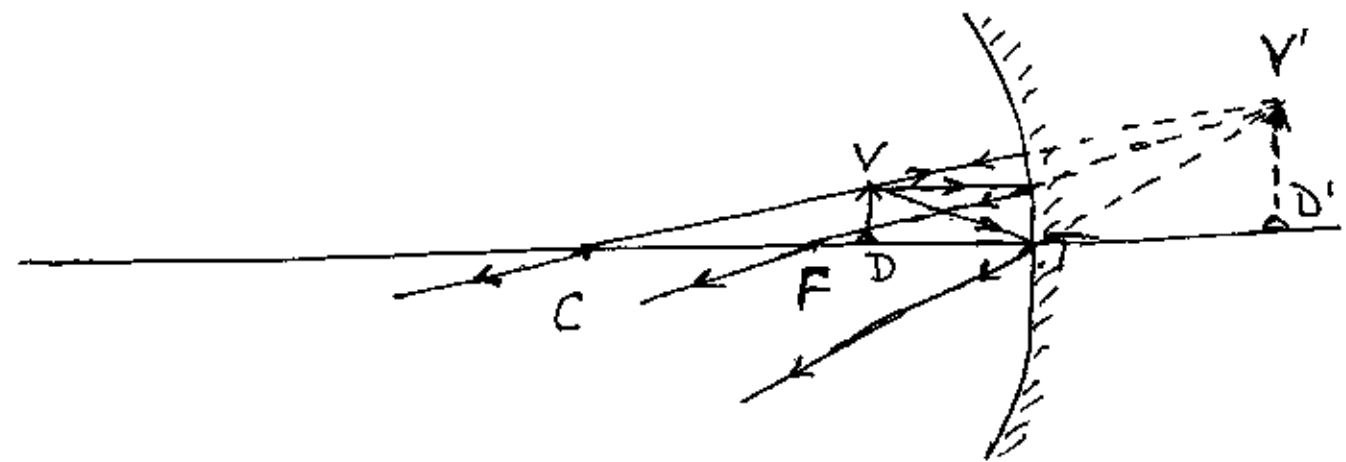
U primjeru koji je upravo opisan, zrake svjetlosti su se nakon refleksije presjekle u jednoj točki stvarajući realnu sliku.

Ako je predmet na udaljenosti većoj od radijusa zakrivljenosti ( $s > R = 2f$ ), slika je realna, obrnuta i nalazi se između fokusa  $F$  i centra zakrivljenosti  $C$  ( $f < s' < 2f$ ).

Možemo sada proširiti ovu analizu uvažavajući činjenicu da zakon refleksije vrijedi jednako i u slučaju kada zrake svjetlosti ide obrnutim putem. To nas vodi na zaključak da možemo zamijeniti predmet i sliku iz prethodnog primjera. Drugim riječima, ako na mjesto gdje je prethodno bila slika postavimo predmet (veličine kakve je bila slika) dobit ćemo nakon refleksije na sfernom zrcalu sliku na mjestu gdje je prethodno bio predmet. Veličina i uspravnost nastale slike odgovarat će upravo prethodnome predmetu. Ovaj fizički zaključak slijedi također i iz

analize jednadžbe sfernog zrcala. U njoj se  $s$  i  $s'$  pojavljuju simetrično, pa je te veličine moguće naprosto zamijeniti, a zbroj  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$  ostaje i dalje jednak  $\frac{1}{f}$ .

Moramo još istražiti što dobivamo ako predmet postavimo između fokusa  $F$  i tjemena  $T$  sfernog zrcala.

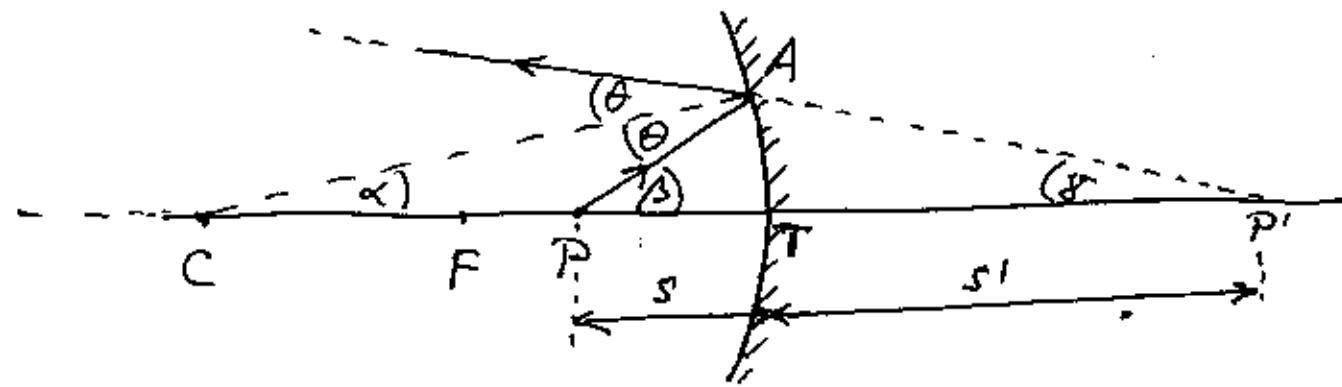


Nacrtao su samo tri karakteristične zrake koje izlaze iz vrha  $V$  predmeta. One se reflektiraju od sfernog zrcala kao divergentne zrake koje kao da dolaze iz točke  $V'$ . Kažemo da se radi o virtualnoj slici jer se zrake svjetlosti uistinu ne sijeku u točki  $V'$ . Postavljanje zastora na mjestu virtualne slike je besmisleno jer tamo nema zrake svjetlosti koje bi dolezele od predmeta. Virtualnu sliku možemo

gledati okom postavljenu negdje unutar divergentnog snopa koja nastaje nakon refleksije zraka na sfernom zrcalu.

### Dogovor o predznacima

Jednadžbu sfernog zrcala smo izveli u slučaju  $s > f$  (tada je i  $s' > f$ ). Veličine  $s$  i  $s'$  smo smatrali pozitivnima. Postavlja se pitanje kakva jednadžba vrijedi u slučaju kada je  $s < f$  pa nastaje imaginarna slika. Ako razmotrimo točkasti predmet  $P$  i njegovu imaginarnu sliku  $P'$  na optičkoj osi nalazimo odgovarajuće trokute i kutove.



$$\left. \begin{array}{l} \beta = \alpha + \theta \\ 2\theta = \beta + \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\beta - \gamma = 2\alpha} \quad \beta \approx \frac{\widehat{AT}}{|s|}, \quad \gamma \approx \frac{\widehat{AT}}{|s'|}$$

Približno vrijedi  $\frac{1}{|s|} - \frac{1}{|s'|} = \frac{2}{R}$ . Ako za imaginarnu sliku postavimo dogovorno

da je njena udaljenost od tjemenice negativna ( $s' < 0$ ), dobivamo da jednadžba sfernog zrcala  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$  vrijedi i za taj slučaj.

Dogovorom postavljamo tri pravila:

- 1) Udaljenost objekta je pozitivna ( $s > 0$ ) ako se objekt nalazi s one strane zrcala otkuda dolazi upadna svjetlost.
- 2) Udaljenost slike je pozitivna ( $s' > 0$ ) ako se slika nalazi s one strane zrcala kamor idu reflektirane zrake svjetlosti.
- 3) Radijus zrcala je pozitivan ( $R > 0$ ) ako se centar zakrivljenosti nalazi s one strane zrcala kamor idu reflektirane zrake svjetlosti.

Ovaj dogovor podrazumijeva da u suprotnom pojedina veličina postaje negativna. Tako je  $s < 0$  ako je snop upadnih zraka konvergentan i siječe se virtualno s druge strane zrcala (virtualni predmet), za  $s' < 0$  imamo virtualnu sliku. Za konveksno (izbočeno) zrcalo vrijedi  $R < 0$ .

Uvedimo oznake

$\overline{PT} = s$  udaljenost objekta od tjemena

$\overline{CT} = R$  radijus zakrivljenosti sfernog zrcala

$\overline{P'T} = s'$  udaljenost slike od tjemena

Točka A je proizvoljno odabrana na zrcalu. Ako u njoj položimo tangentu, onda je spojica  $\overline{CA}$  okomita na nju. Stoga  $\theta$  predstavlja kut upada i refleksije.

Ishovistimo geometrijsko pravilo po kojemu je vanjski kut uvijek jednak zbroju dvaju unutarnjih kutova.

Iz trokuta PCA slijedi:

$$\beta = \alpha + \theta$$

Iz trokuta PP'A slijedi:

$$\gamma = \alpha + 2\theta$$

Eliminacijom kuta  $\theta$  iz gornjih dviju jednadžbi dobivamo

$$\alpha + \gamma = 2\beta$$

za kut  $\beta$  vrijedi egzaktno

$$\beta = \frac{\widehat{AT}}{R}$$

gdje je  $\widehat{AT}$  luk na sfernom zrcalu.

za kutove  $\alpha$  i  $\gamma$  vrijedi aproksimativno

$$\alpha \approx \frac{\widehat{AT}}{s}, \quad \gamma \approx \frac{\widehat{AT}}{s'}$$

Aproksimacija je to bolja što su ti kutovi manji, a to znači da je točka A bliže tjemenu T. Ako sferno zrcalo ima mali raspon u odnosu prema svome radijusu, onda je navedena aproksimacija dobra za sve točke na zrcalu.

Uvrštavanjem u jednadžbu s kutovima slijedi

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

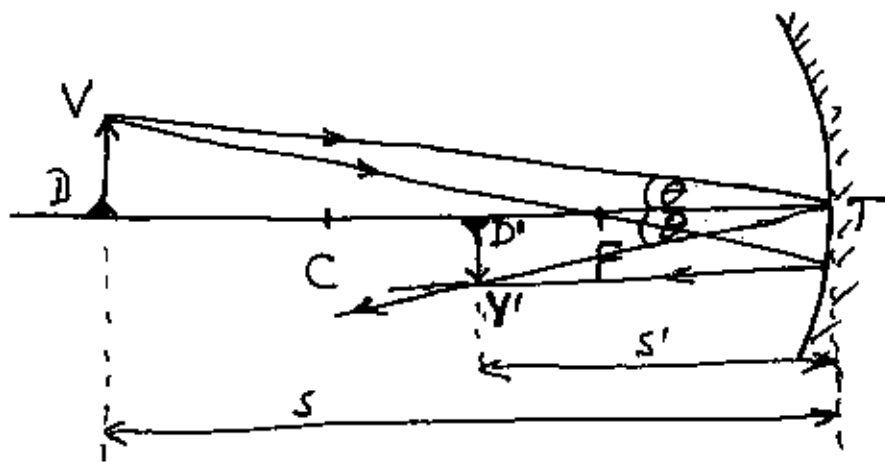
Ova jednadžba ne sadrži više kutova koji se odnose na određenu točku A. To znači da ona vrijedi za refleksiju u bilo kojoj točki sfernog zrcala, odnosno cijeli divergentni snop svjetlosti, koji iz točke P upada na plohu sfernog zrcala, reflektira se kao konvergentni snop koji se siječe u točki P'. U njoj je, dakle, realna slika objekta (točke) P.

## Koeficijent povećanja

Velicina slike se općenito razlikuje od velicine predmeta, pa je korisno uvesti koeficijent povećanja  $m$  kojemu je iznos

$$|m| = \frac{\overline{D'V'}}{\overline{DV}}$$

Ovaj izraz možemo dovesti u vezu s položajima predmeta i slike.



$$\tan \theta = \frac{\overline{DV}}{|s|} = \frac{\overline{D'V'}}{|s'|} \Rightarrow \frac{\overline{D'V'}}{\overline{DV}} = \frac{|s'|}{|s|}$$

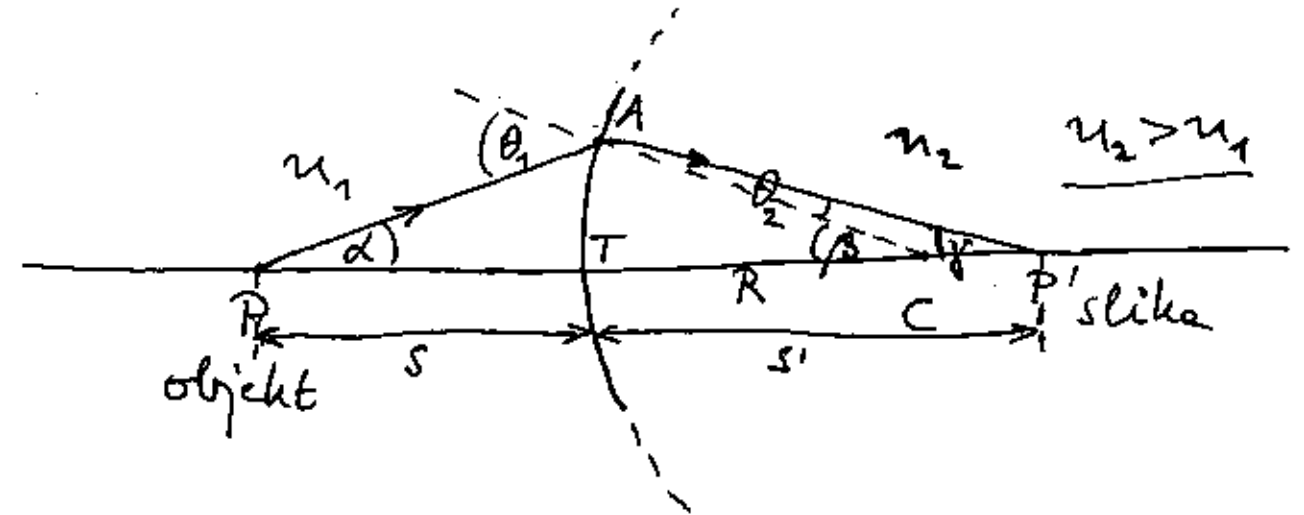
Ako želimo uključiti i slučaj imaginarne slike, možemo definirati algebarski izraz

$$m = -\frac{s'}{s}$$

Za  $m < 0$  slika je obrnuta u odnosu na predmet. Za umanjenu sliku je  $|m| < 1$ .

## 8.7. Slika koja nastaje nakon loma svjetlosti

Razmotrimo dva optička sredstva indeksa loma  $n_1$  i  $n_2$  s time da je granična ploha među njima sfernog oblika radijusa  $R$



Za lom zraka svjetlosti vrijedi Snellov zakon

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Za male kutove vrijedi aproksimacija  $\sin \theta_1 \approx \theta_1$  i  $\sin \theta_2 \approx \theta_2$ , pa se Snellov zakon svodi na jednadžbu

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$$

Razmatrajući varijške i unutarnje kutove trokuta PCA i CP'A dobivamo

$$\theta_1 = \alpha + \beta$$

$$\beta = \theta_2 + \gamma$$



Kutove  $\theta_1$  i  $\theta_2$  možemo eliminirati  
 množenjem jednačini s  $n_1$ , odnosno  $n_2$   
 i zbrajanjem

$$n_1 \theta_1 = n_1 (\alpha + \beta)$$

$$n_2 \beta = n_2 \theta_2 + n_2 \gamma$$

$$\cancel{n_1 \theta_1} + n_2 \beta = n_1 (\alpha + \beta) + \cancel{n_2 \theta_2} + n_2 \gamma$$

$$\beta (n_2 - n_1) = n_1 \alpha + n_2 \gamma$$

za zrake blizu optičke osi (paraksijalne  
zrake) vrijedi aproksimacija

$$\alpha \approx \frac{\widehat{AT}}{s}, \quad \beta = \frac{\widehat{AT}}{R}, \quad \gamma \approx \frac{\widehat{AT}}{s'}$$

Uvrštavanjem dobivamo jednačinu

$$\boxed{\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}}$$

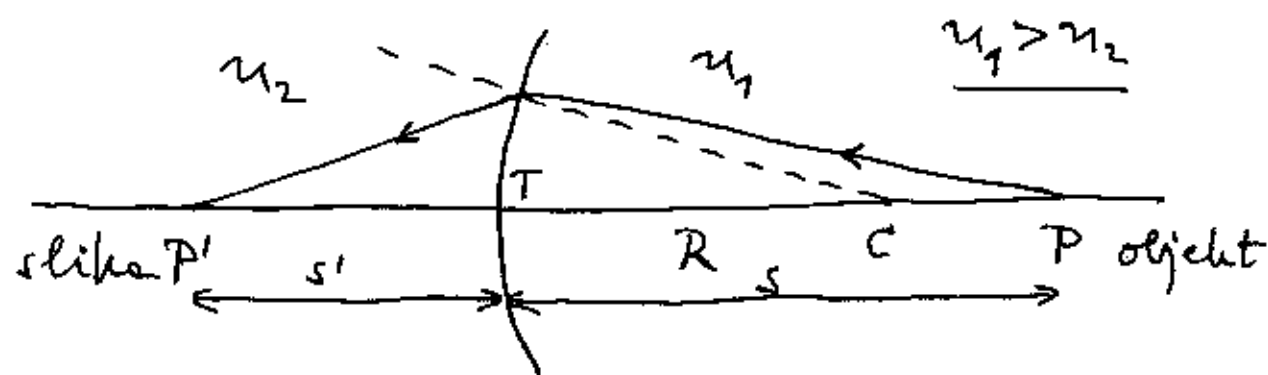
I ovdje vrijede prethodno dogovoreni  
 predznaci s time da umjesto snjera  
 reflektivnih zraka uzimamo snjera zraka  
 nakon lense. Drugim riječima, uvijek  
 se uzima snjera "odlazćih" zraka.

Napomena:

U ovoj jednačini veličine  $s$  i  $s'$  nisu  
 simetrično postavljene. Zbog  $n_1 \neq n_2$  ne  
 možemo ih naprosto zamijeniti.

S druge pak strane, mora vrijediti pravilo  
 po kojemu možemo obrnuti snjera zrake  
 svjetlosti i ona ide točno istim putem  
 kojim je došla. To znači da predmet  
 (objekt) i slika mogu zamijeniti uloge.

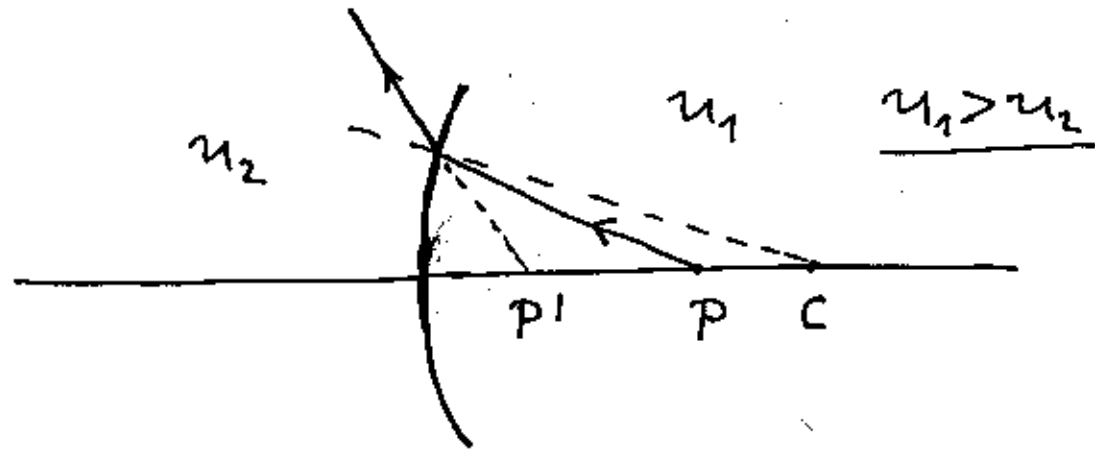
Da bi jednačina  $\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$  ostala valjana,  
 moramo zamijeniti oznake za indekse  
 lense dvaju optičkih sredstava.



U odnosu prema prijašnjoj slici formelno  
 smo zamijenili veličine  $s \rightarrow s'$ ,  $s' \rightarrow s$ , te  
 $n_1 \rightarrow n_2$  i  $n_2 \rightarrow n_1$ . Time se lijeva strana  
 jednačine  $(\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'})$  nije promijenila.

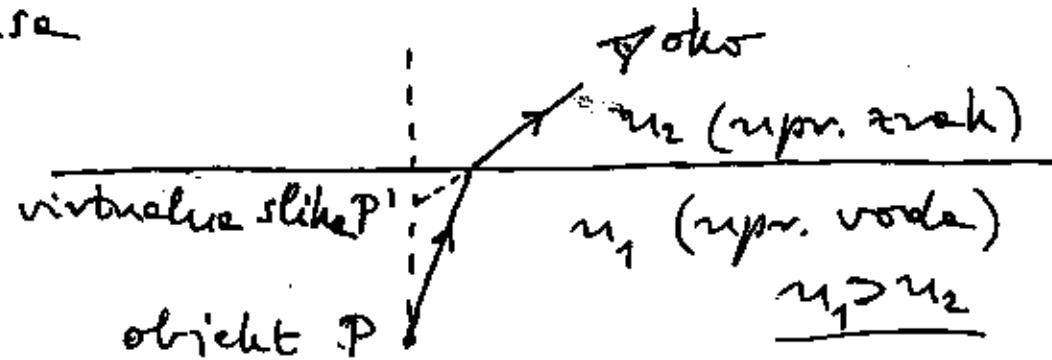
Na desnoj strani jednodijelne imamo  $n_2 < n_1$  (jer je sada  $n_1 > n_2$ ). Međutim, sada je preme dogovoru o predznacima  $R < 0$  jer se centar zakrivljenosti nalazi sa suprotne strane od zrake nakon loma (odlazeci zrake).

Razmotrimo još i slučaj kada je predmet na udaljenosti manjoj od radijusa.



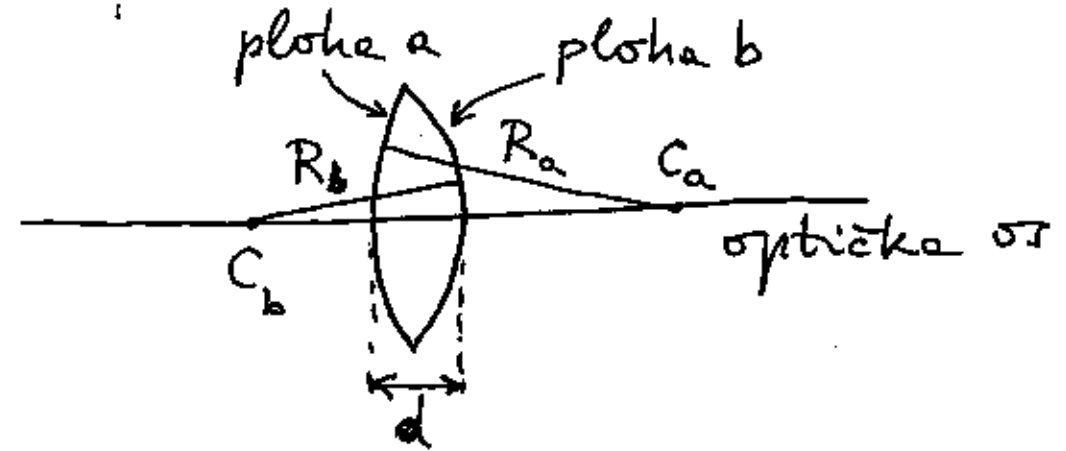
Nastaje virtualna slika  $P'$ . Za nju je  $s' < 0$ .

Ako je granična ploha dvaju optičkih sredstava ravna, onda je  $R = \infty$ , pa je svaki predmet na udaljenosti manjoj od radijusa

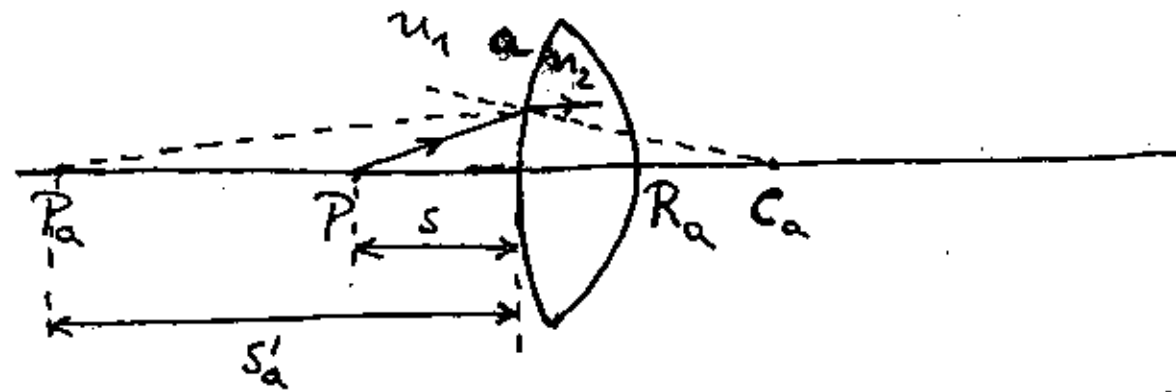


## 8.8. Leće

Leća ima dvije sferne plohe, nazovimo ih ploha "a" i ploha "b". Radijusi zakrivljenosti tih ploha su  $R_a$  i  $R_b$ . Leća ima debljinu  $d$  duž svoje optičke osi.



Neka okolina sredstva ima indeks loma  $n_1$ , a leća neka je načinjena od dielektrike koji ima indeks loma  $n_2$ . Razmotrimo nastanak slike od točkastog predmeta  $P$ .

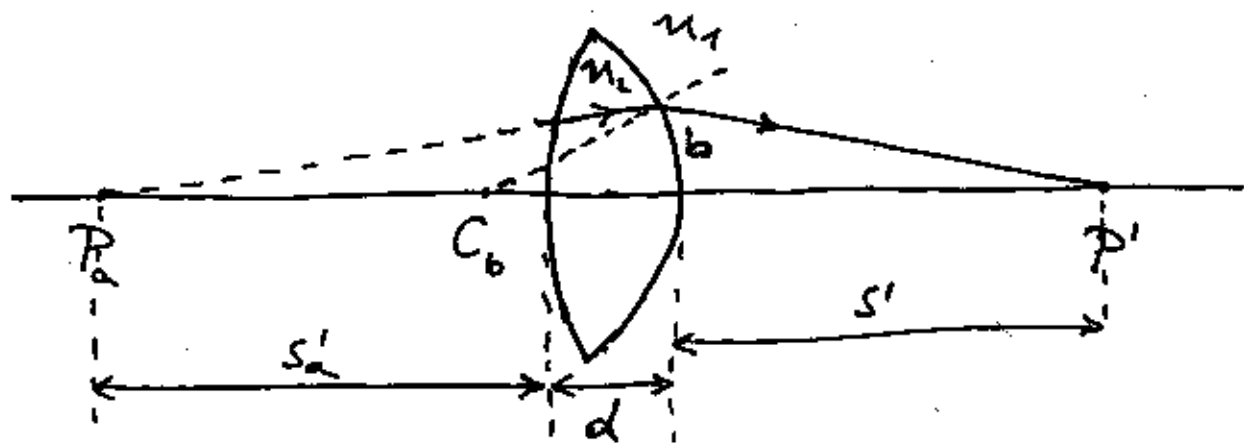


Na plohi "a" zrake svjetlosti se lomi prema okolini jer smo pretpostavili da je  $n_2 > n_1$ . Također smo odabrali slučaj u kojemu

je predmet P blizu leće (realan  $s$ ) tako da lomljene zrake svjetlosti imaju svoj izvorišni centar kao da dolazi iz točke  $P_a$  koja se nalazi sa suprotne strane (negativan  $s'_a$ ) te predstavlja virtualnu sliku

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'_a} = \frac{n_2 - n_1}{R_a}$$

Sada možemo razmotriti lom zrake svjetlosti na plohi "b". Sve se odvija kao da je u točki  $P_a$  realan predmet.



Predmet je udaljen od tjemene plohe "b" za  $|s'_a| + d = -s'_a + d$  (jer je  $s'_a < 0$ ). Jednadžba konjugacije (tj. povezivanje predmeta i slike) glasi

$$\frac{n_2}{-s'_a + d} + \frac{n_1}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R_b}$$

Napomena:

Dosljedno smo uveli da zrake svjetlosti ide iz sredstva kojemu je indeks loma  $n_2$  u sredstvo indeksa loma  $n_1$ .

Zbrajanjem dviju jednadžbi dobivamo

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'_a} + \frac{n_2}{-s'_a + d} + \frac{n_1}{s'} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)$$

Ove formule postaju upotrebljive za tanke leće kod koje je debljina  $d$  mnogo manja od udaljenosti predmeta ili slike od leće.

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_1}{s'} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)$$

Udaljimo li predmet prema beskonačnosti ( $s \rightarrow \infty$ ), nalazimo sliku u fokusu leće ( $s' \rightarrow f$ )

$$\boxed{\frac{n_1}{f} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)}$$

Čarova daljina leće ovisi o indeksima loma i radijusima zakrivljenosti plohe. U primjeni ove formule moramo voditi

računa o dogovornim predznacima za radijuse zakrivljenosti:

a) Za leću oblike  $a) \left. \right)^b \rightarrow$  izlazna svjetlost imaamo  $R_a > 0$ , ali  $R_b < 0$ , pa je

$$\frac{n_1}{f} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{|R_b|} \right). \text{ Za } n_2 > n_1 \text{ dobivamo}$$

$f > 0$  (konvergentna leća).

b) Za leću oblike  $a) \left[ \right)^b \rightarrow$  izlazna svjetlost imaamo  $R_a < 0$ , ali  $R_b > 0$ , pa je

$$\frac{n_1}{f} = (n_2 - n_1) \left( -\frac{1}{|R_a|} - \frac{1}{R_b} \right). \text{ Za } n_2 > n_1 \text{ dobivamo}$$

$f < 0$  (divergentna leća).

c) Za leću oblike  $a) \left. \right)^b$  ili  $a) \left[ \right)^b$  imaamo  $R_a < 0$  i  $R_b < 0$ . Dominantan utjecaj ima ploha manjeg radijuse (po iznosu).

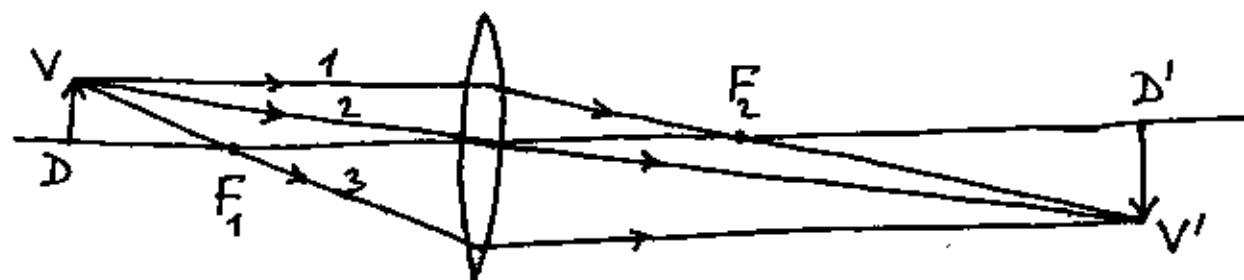
d) Za leću oblike  $a) \left( \right)^b$  ili  $a) \left[ \left( \right)^b$  imaamo  $R_a > 0$  i  $R_b > 0$ . Dobivamo  $f > 0$  za  $R_a < R_b$ , ali  $f < 0$  za  $R_b < R_a$ .

Jednadžbu tanke leće možemo pisati u obliku

$$\boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}}$$

Kod primjene ove jednadžbe možemo voditi računa o predznacima pojedinih veličina.

Slika predmeta može se lagano konstruirati pomoću karakterističnih zraka.



Napomena:

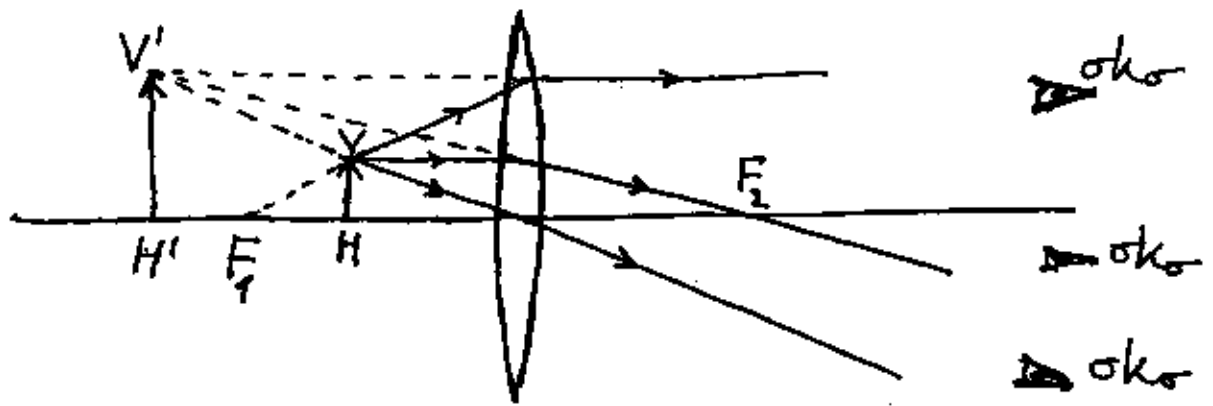
U ovoj konstrukciji se ulazna i izlazna zrake sastaju u središnjoj ravnini leće, tj. kao da su zrake 1 i 3 imale samo jedan lom, a zraka 2 nije uopće imala lom. To je aproksimacija koja je dobra za tanke leće (tanje nego što to prikazuje gornja slika).

Za povećanje slike imamo

$$m = \frac{D'V'}{DV} = -\frac{s'}{s}$$

Kada je predmet postavljen dalje od žarišta  $F_1$  ( $s > f$ ) nastaje realna slika ( $s' > 0$ ), pa je povećanje negativno (obrnute slike).

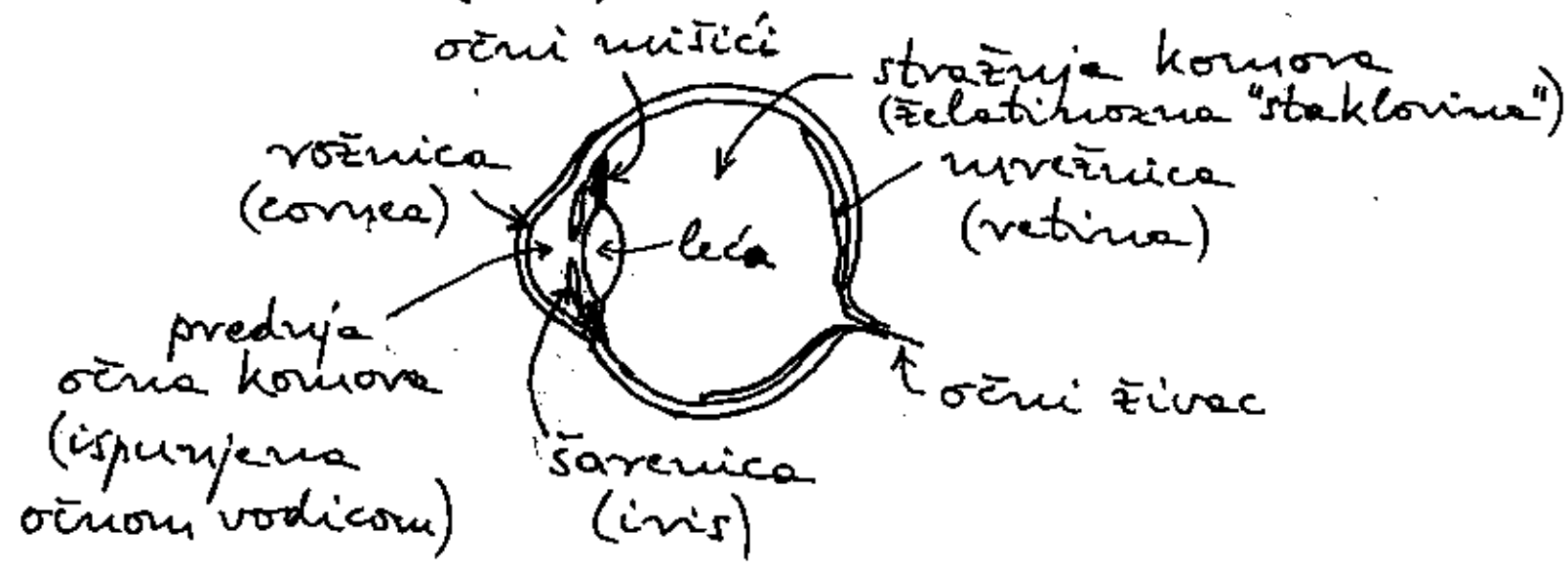
Ako se predmet postavi između žarišta i leće ( $s < f$ ), nastaje virtualna uspravna slika.



Oko može biti postavljeno bilo gdje unutar izlazećeg (divergentnog) snopa svjetlosti te vidi virtualnu sliku.

### 8.9. Ljudsko oko

Konismo je najprije izložiti građu oka s medicinskog stajališta.



Svjetlost se najprije lomi na (prozirnoj) rožnici i kod ulaska u očnu vodicu. To je prvo fokusiranje zraka svjetlosti.

Zatim svjetlost prolazi kroz središnji otvor (zjenica) u šarenici. Kada je intenzitet svjetlosti velik, šarenica se steže i smanji zjenicu. Kod slabe rasvjete zjenica se raširi.

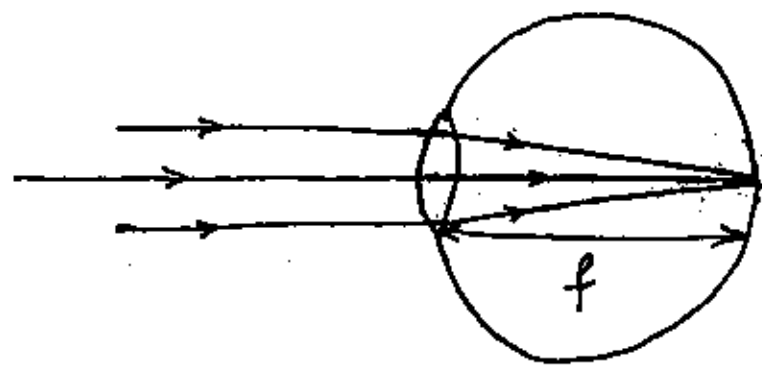
Glavno fokusiranje svjetlosti obavlja očna leća. Po njenom kružnom obodu raspoređeni su očni mišići u obliku vlakana (ciliare). Očni mišići mogu prema potrebi stisnuti leću (smanjiti njen kružni promjer) tako da se ona više ispupči (smanjuje se radijus sfernih

ploha leće) tako da se smanji žarišna daljina leće (poveća se njena konvergentnost). To je proces akomodacije oka koji se odvija na podražaj iz mozga, a u svrhu izoštravanje slike.

Slike nastaje na mrežnici (retina) koja sadrži fotoreceptore (štapčići i čunjići, više milijuna) u kojima se svjetlosni signal pretvara u električni, a živčane vlakne ih vode u očni živac i dalje do mozga.

### Optički model oka

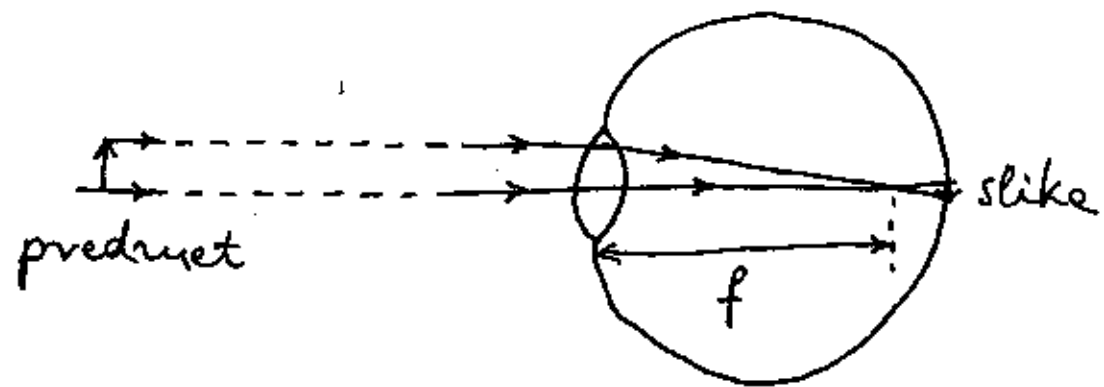
Za funkcionalnu analizu oka metodom geometrijske optike zgodno je zamisliti model (pojednostavljenje) po kojemu se svu fokusiranje odvija u očnoj leći.



normalno oko  
uz  
opušten očni mišić

Kada je očni mišić opušten, očna leća je dosta izduljena (spljoštena) tako da je žarišna daljina  $f$  najveća i odgovara dubini oka.

Kada oko gleda predmet na konačnoj udaljenosti, očni mišić stisne leću tako da se ona ispupči i smanji žarišnu daljinu kako bi se slika stvorila upravo na mrežnici.



Kod približavanja predmeta oku, nastavlja se stiskanje ocnog mišića i smanjivanje žarišne daljine leće. Konačno se dolazi do "bliske točke" (oko 15 cm za mladu osobu) kada je ostvareno maksimalno moguće stiskanje ocnog mišića. Kod daljnjeg približavanja predmeta oku, ne može doći do daljnjeg smanjivanja žarišne daljine leće, pa se slika ne stvara na mrežnici (slika bi nastala iza mrežnice kada bi se zrake svjetlosti produžile).

### Napomena:

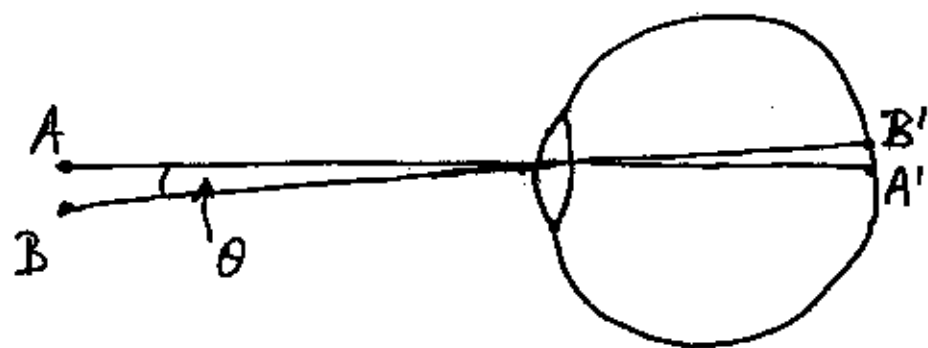
Od točke na predmetu trebala bi nastati točka na slici. Međutim, na mrežnici nastane knjižica.

U srednjoj životnoj dobi počinje rasti promjer očne leće (tijekom godina može narasti i do 50% više). Očni mišić tada više ne može stisnuti leću toliko da bi joj se žarišna daljina mogla smanjiti kao u mladim godinama života. Stoga "bliske točke" postaje sve udaljenija dok se s godinama ne zaustavi na nekoj konačnoj udaljenosti, ili pak ode u beskonačnost. Za gledanje predmeta koji se nalaze bliže od "bliske točke" potrebne su očale tako da se postigne ukupna žarišna daljina  $f_{\text{ukupna}} < f_{\text{oko}}$

$$\frac{1}{f_{\text{ukupna}}} = \frac{1}{f_{\text{očale}}} + \frac{1}{f_{\text{oko}}}$$

Tine se omogućiti nastanak slike na mrežnici. Veličina  $\frac{1}{f} = D$  naziva se dioptrijom leće (ili snagom leće). Npr. leća koja ima žarišnu daljinu  $f = 0,5 \text{ m}$ , ima  $D = 2 \text{ m}^{-1}$  (jedinica  $\text{m}^{-1}$  nosi u ovom značenju također naziv "dioptr").

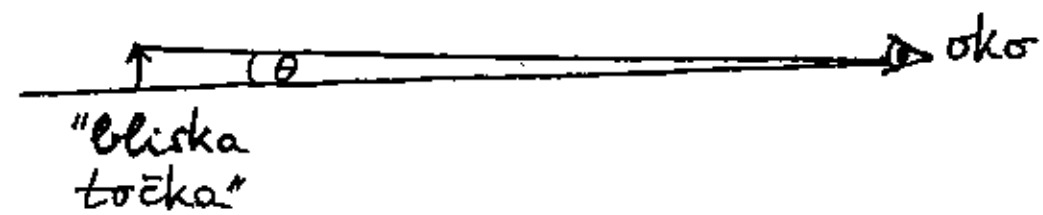
Za raspoznavanje oblika nekog sfernog predmeta (npr. slova tiskanog u knjizi), ili pak velikog, ali jako udaljenog predmeta, potrebno je da oko može razlučiti pojedine točke tog predmeta. Problem se svodi na razlučivanje dviju točaka, npr. A i B



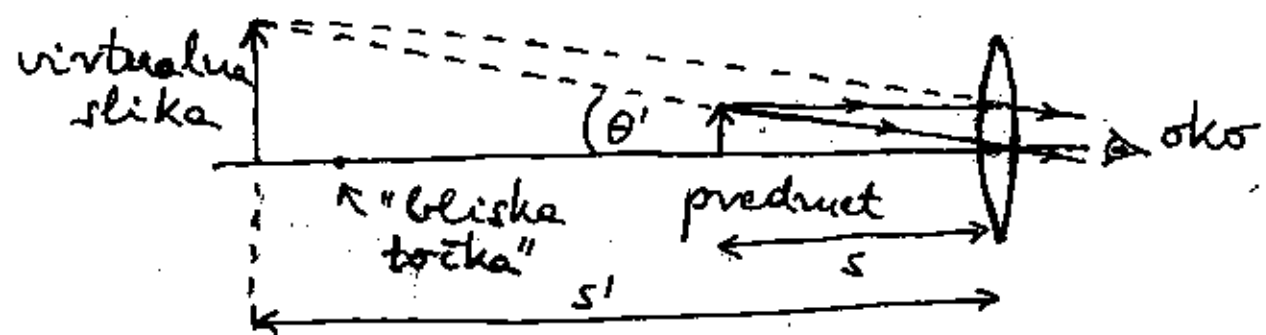
U ovisnosti o kutu  $\theta$  slike  $A'$  i  $B'$  imaju neku međusobnu udaljenost na mrežnici (predmet s točkama A i B je u praksi mnogo dalje nego što to prikazuje gornja slika, no važan je kut  $\theta$ ). Kada se kut promatranja smanji toliko da se slike  $A'$  i  $B'$  približe toliko da zahvaćaju iste štapice i čunjiće na mrežnici, nestaje mogućnost razlučivanja dviju točaka kao zasebnih. Npr. normalno oko može lako razlučiti niz točaka koje čine tiskano slovo u knjizi na udaljenosti od 30 cm od oka, ali to više ne može ako se knjiga udalji na 2 m.

## 8.10. Povećalo, mikroskop i teleskop

Kada želimo što bolje vidjeti sitniji predmet, približavamo ga do "bliske točke". Tada se dno i vrh predmeta vide pod maksimalnim kutom  $\theta$ .



Kao najjednostavnije povećalo može poslužiti jedna jedina konvergentna leća kojoj je žarišna daljina  $f$  manja od udaljenosti "bliske točke" od oka. Leća (povećalo) se približi predmetu na udaljenost  $s$  koja je manja od  $f$  ( $s < f$ ). Tada leća stvara imaginarnu sliku na  $s' < 0$  koju oko može vidjeti ukoliko je ta slika udaljena od oka barem koliko i "bliske točke".



Napomena:

Nacrtae su dvije karakteristične zrake da bi

se odredila slika vrha strelice. Nije nužno da baš te zrake padaju u zjenicu oka. Znamo da se sve zrake koje iz vrha strelice upadaju na leću lome tako kao da su došle iz vrha virtualne slike. Među njima ima i onih koje će upasti u zjenicu oka.

Maksimalan kut  $\theta'$  postižemo tako da predmet približimo leći (smanjimo  $s$ ) tako da virtualna slika dođe na položaj "bliske točke". Međutim, tada je oči mišić najviše stegnut, pa dugotrajnije gledanje nije ugodno.

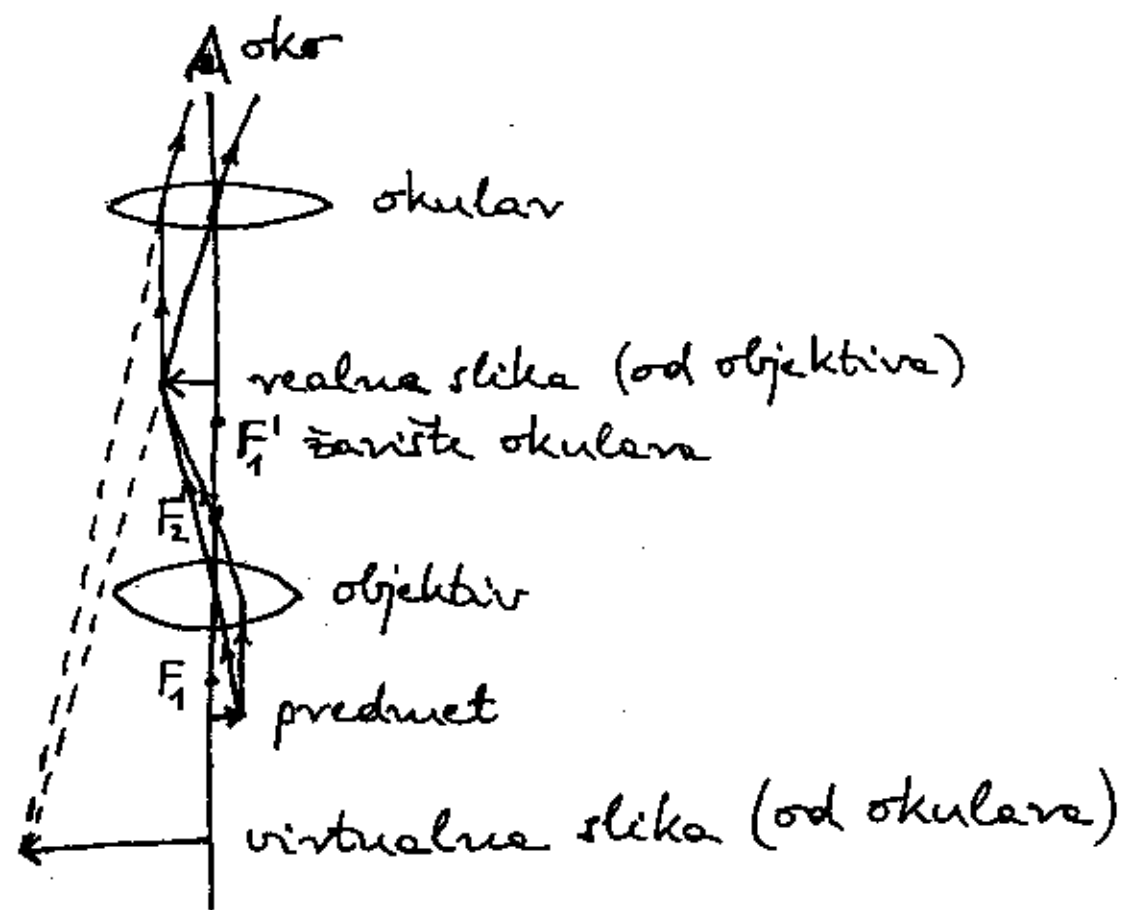
Kada predmet udaljavamo od leće (povećavamo  $s$ ), virtualna se slika udaljava pa je dugotrajno gledanje ugodnije za oko. Uz povećavanje udaljenosti, povećava se i veličina virtualne slike tako da se kut  $\theta'$  tek neznatno smanji. Za  $s \rightarrow f$ , virtualna slika odlezi u beskonačnost ( $s' \rightarrow -\infty$ ). To je krajnja granica mogućeg gledanja virtualne slike.

Ako se predmet još više udalji od leće ( $s > f$ ), nastaje realna slika s druge strane leće. Tada leća više ne služi oku kao povećalo.



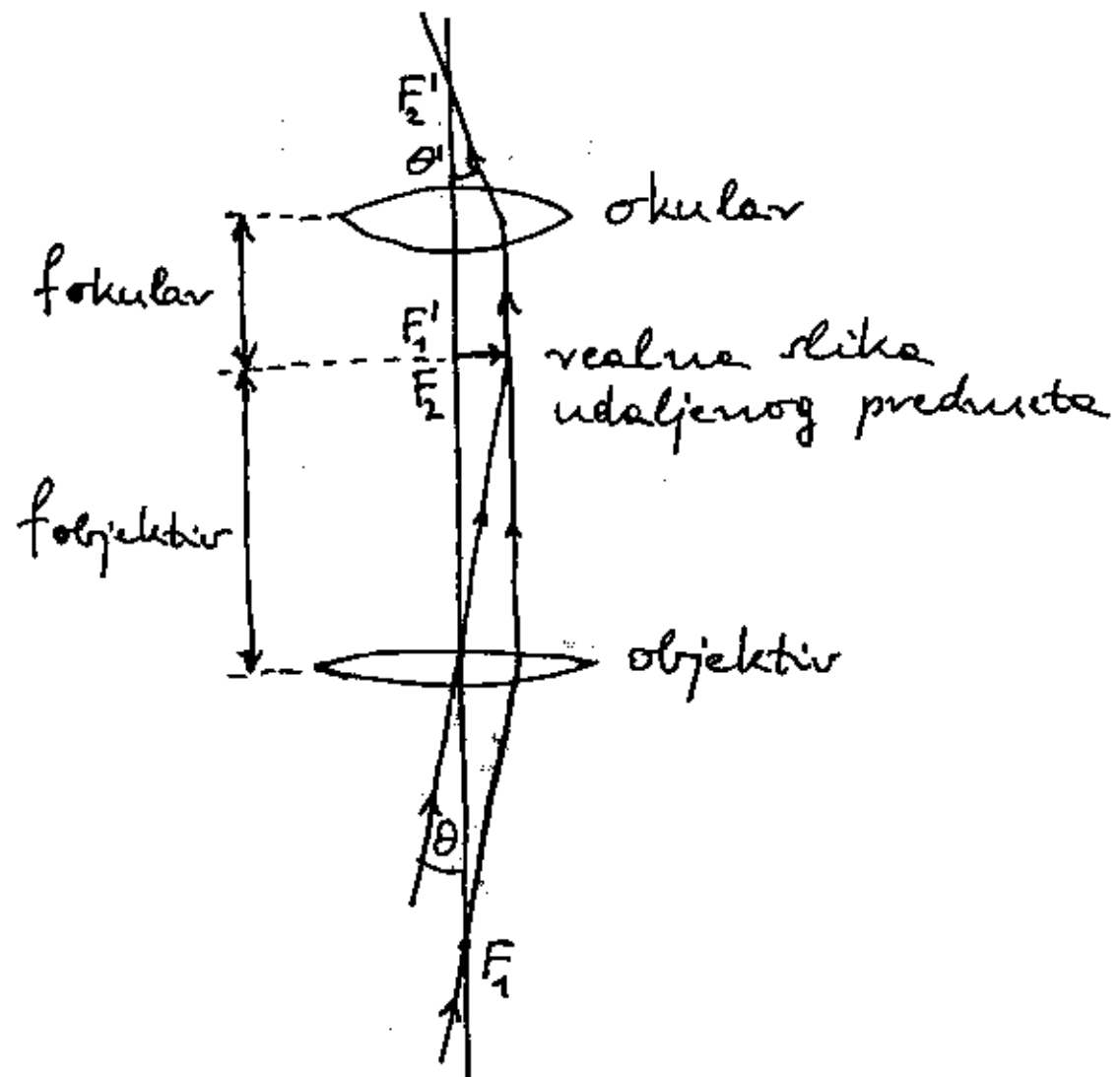
Mikroskop je složeniji uređaj za povećanje slike sličnih predmeta. On se sastoji (u najjednostavnijoj izvedbi) od dviju leća koje se nazivaju okular i objektiv.

Predmet se postavi na udaljenost koja je malo veća od žarišne daljine objektiv, tako da objektiv stvara s druge strane većanu realnu sliku.



Mikroskop ima tako postavljen okular da realna slika (od objektiv) padne unutar žarišne daljine okulara. Ona služi kao realan predmet za okular koji u tom slučaju ima ulogu kao i jednostavno povećalo te stvara virtualnu sliku koju oko može vidjeti. Slika je jako uvećana zbog učinka dviju leća.

Teleskop je namijenjen za gledanje jako dalekih predmeta. Kutno povećanje se postiže time što objektiv ima veliku žarišnu daljinu fobjektiv, a okular ima malu žarišnu daljinu fokular. Žarište objektiv i okulara unutar teleskopa postavljena su u istu točku.



Ako se krajnje točke udaljenog predmeta vide (golim okom) pod kutom  $\theta$ , onda se gledajući iz okulara one vide pod većim kutom  $\theta'$ . Kutno povećanje teleskopa iznosi

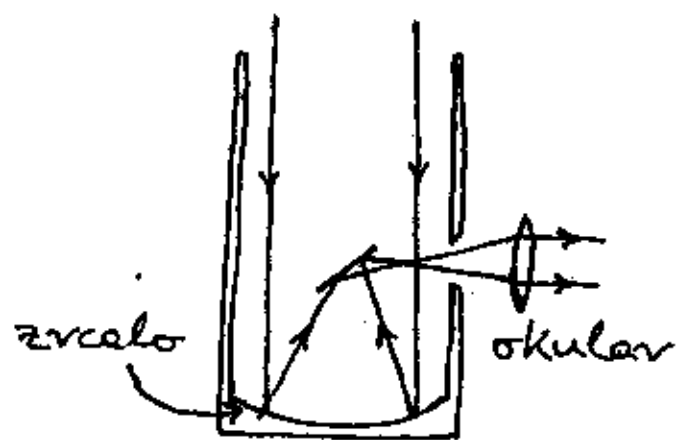
$$M = \frac{f_{objektiv}}{f_{okular}}$$

Kada se teleskop upotrebljava kao dalekozor za zemaljsko promatranje, ugrađuju se prizme za totalnu refleksiju pomoću koje se postiže "ispravna" slika, tj. slika koje ima istu orijentaciju kao i predmet od kojeg je nastala.

Teleskopom se u astronomskim opažanjima mogu razlučiti npr. dvije zvijezde koje bi u gledanju prostim okom bile pod tako malim kutom  $\theta$  da ne bi mogle stvoriti zasebne slike na mrežnici. Tek uz teleskop se one vide pod većim kutom  $\theta'$ .

Za veliko povećanje teleskopa potrebna je velika žarišna daljina objektiv. Zato su teleskopi jako dugački.

Za promatranje zvijezda slabog sjaja potrebno je postaviti objektiv što većeg promjera da bi se uhvatilo što veći svjetlosni tok. Zbog veličine leća (i uz to velikih žarišnih daljina) je tehnološki problematična, pa se radije upotrebljava sferno (ili parabolično) zrcalo.

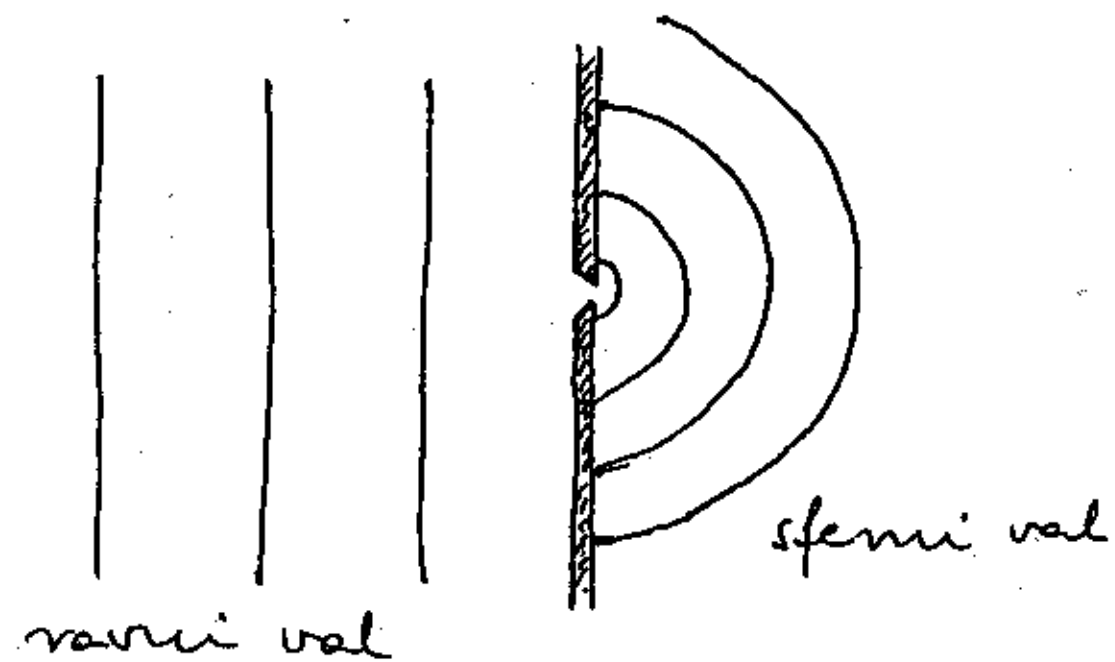


refleksijski teleskop

## 8.11. Interferencija svjetlosti iz dviju jako uskih pukotina

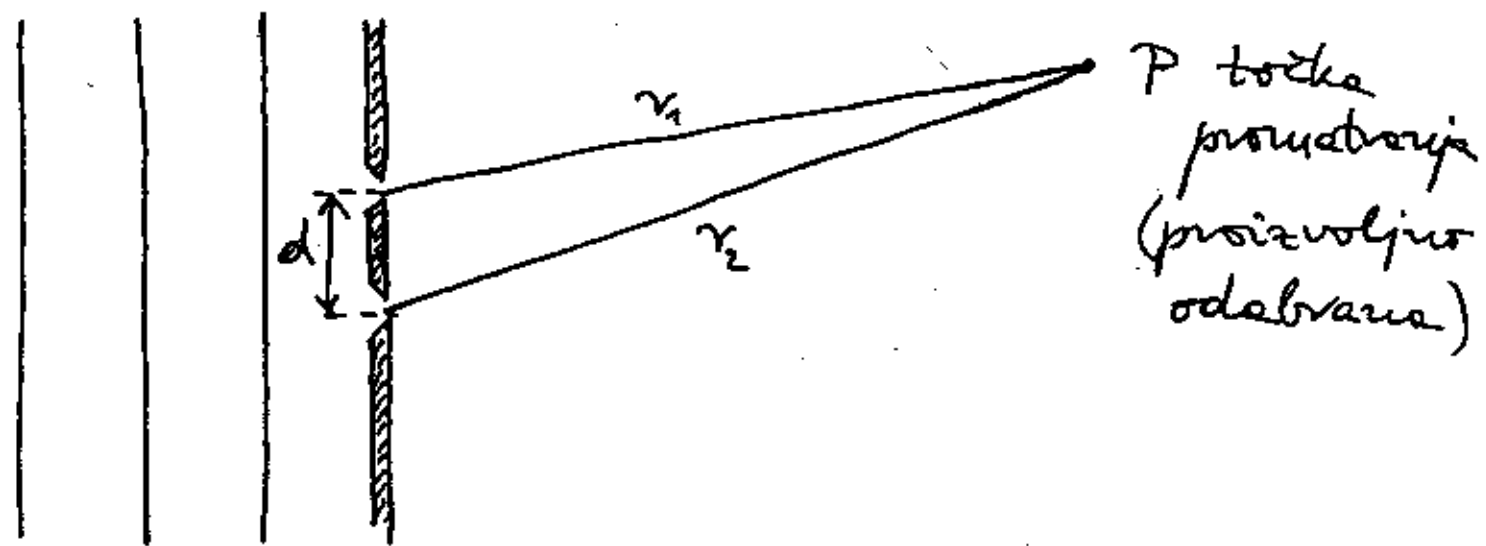
U uvodnim razmatranjima ovog poglavlja utvrdili smo da ravan val svjetlosti koji naiđe na okomito postavljenu zartor na kojemu je izrezan otvor relativno velikog promjera ( $D \gg \lambda$ ), proizvodi snop svjetlosti koji zadovoljava aproksimaciju geometrijske optike te se širi pravocrtno (ime definirani jedan valni vektor  $\vec{k}$ ).

Razmotrimo sada drugu krajnost, tj. otvor kojemu je promjer manji od valne duljine svjetlosti ( $D < \lambda$ ). U tom slučaju, svjetlost se iz otvora širi kao da je u otvoru točkasti izvor svjetlosti.



Ako umjesto malenog kružnog otvora nači-  
nimo usku pukotinu kojoj je duljina  
mnogo veća od valne duljine svjetlosti,  
dobit ćemo pojas cilindričnih valnih  
ploha (visina cilindra odgovara duljini  
pukotine). Unutar visine cilindra možemo,  
dakle, razmatrati širenje kružnih valova  
u ravni.

Razmotrimo interferenciju valova koji  
nastaju od dvije jako uske pukotine koje  
su međusobno razmaknute za udaljenost  
 $d$  koja je veća od valne duljine ( $d > \lambda$ ),  
ali ne mnogo puta veća (npr. samo nek-  
oliko valnih duljina).



Za razmatranje je dovoljno uzeti jedno  
od dvaju polja koje čine elektromagnetski  
val (svjetlost). Neka to bude električno  
polje  $\vec{E}(r,t)$ . Ako ravni val lijevo od

pukotine ima neku polarizaciju (tj.  $\vec{E}$   
titra duž nekog smjera), onda će istu  
polarizaciju imati titranje u obje pukotine.  
Stoga u daljnjem razmatranju možemo  
ispustiti vektorsko obilježavanje te pisati  
samo skalarnu veličinu  $E(r,t)$ .

Faze titranja su u obje pukotine jednake.  
Budući da pukotine funkcioniraju kao  
izvori svjetlosti, zgodno je postaviti da je  
faza titranja u pukotinama jednaka nuli

$$E_1(0,t) = E_0 \sin \omega t$$

$$E_2(0,t) = E_0 \sin \omega t$$

gdje smo za gornju pukotinu stavili  $r_1=0$ ,  
a za donju  $r_2=0$ , tj. svaku pukotinu  
stavljamo u ishodište vlastitog koordinatnog  
sustava.

U proizvoljno odabranoj točki promatranja P  
imamo valove iz svake od pukotine

$$E_1(r_1,t) = E_0 \sin(\omega t - kr_1)$$

$$E_2(r_2,t) = E_0 \sin(\omega t - kr_2)$$

Titranje u točki P kasni za titranjem  
na prvoj pukotini za  $kr_1$ , a za titranjem

na drugoj pukotini kasni za  $k\lambda/2$ . Razlika faze dvoju valova u točki P iznosi

$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = k\Delta r$$

Zbrojanjem valova dobivamo konstruktivnu interferenciju ako je

$$\Delta r = 0, \lambda, 2\lambda, \dots$$

Destruktivna interferencija nastaje za

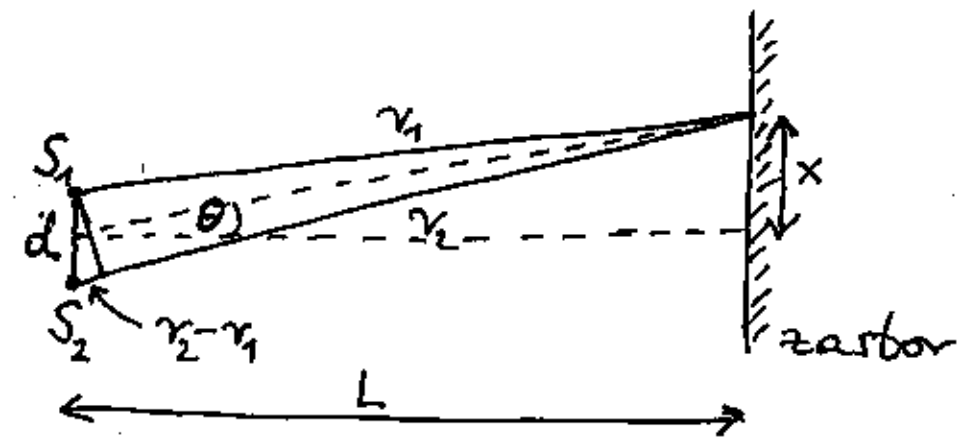
$$\Delta r = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots$$

Rezumijsa se, možemo imati i sve slučajeve koji su između čiste konstruktivne i destruktivne interferencije.

Točka P je proizvoljno odabrana, što znači da interferencija valova postoji u svakoj točki prostora. Od točke do točke mijenja se  $\Delta\varphi$  sukladno promjeni udaljenosti  $r_1$  i  $r_2$ . Stoga se od točke do točke mijenja i rezultat interferencije.

Nemoguće je promatrati interferenciju odjednom u svim točkama prostora. Obično se za promatranje interferencije odabere jedna ravnina paralelna s pukotinama,

ali ne udaljenosti od njih puno većoj od razmaka  $d$  među samim pukotinama.



Razmak između točkastih izvora je  $d$ . Ako iz  $S_1$  povučemo okomicu na  $r_2$ , nalazimo u vrhu  $S_1$  kut  $\theta$  kao i ovaj označen na slici, pa je

$$r_2 - r_1 = d \sin \theta$$

za male kutove imamo

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{L}$$

tako da razlika faze  $\Delta\varphi$  dvoju valova ima ovisnost

$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = kd \sin \theta \approx \frac{kd}{L} x$$

Za  $x=0$  (središnja pruga) imamo  $\Delta\varphi=0$ , tj. konstruktivnu interferenciju. Iduci po zaboru mijenja se  $\Delta\varphi$  linearno s  $x$ , te se izmjenjuju pruge konstruktivne i

destruktivne interferencije.

za opažanje interferencijskih pruga važno je intenzitet svjetlosti

$$I = \overline{E \frac{B}{\mu_0}} = \frac{1}{c\mu_0} \overline{E^2} = \epsilon_0 c \overline{E^2}$$

gdje povlake iznad simbola označava vremensko usrednjavanje. Ukupno električno polje u nekoj točki iznosi

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_0 \sin(\omega t - kr_1) + E_0 \sin(\omega t - kr_2) \\ &= 2E_0 \cos \frac{k(r_2 - r_1)}{2} \sin\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2}\right) \end{aligned}$$

Nakon kvadriranja i vremenskog usrednjavanja dobivamo

$$\overline{E^2} = 4E_0^2 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \underbrace{\overline{\sin^2\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2}\right)}}_{= \frac{1}{2}}$$

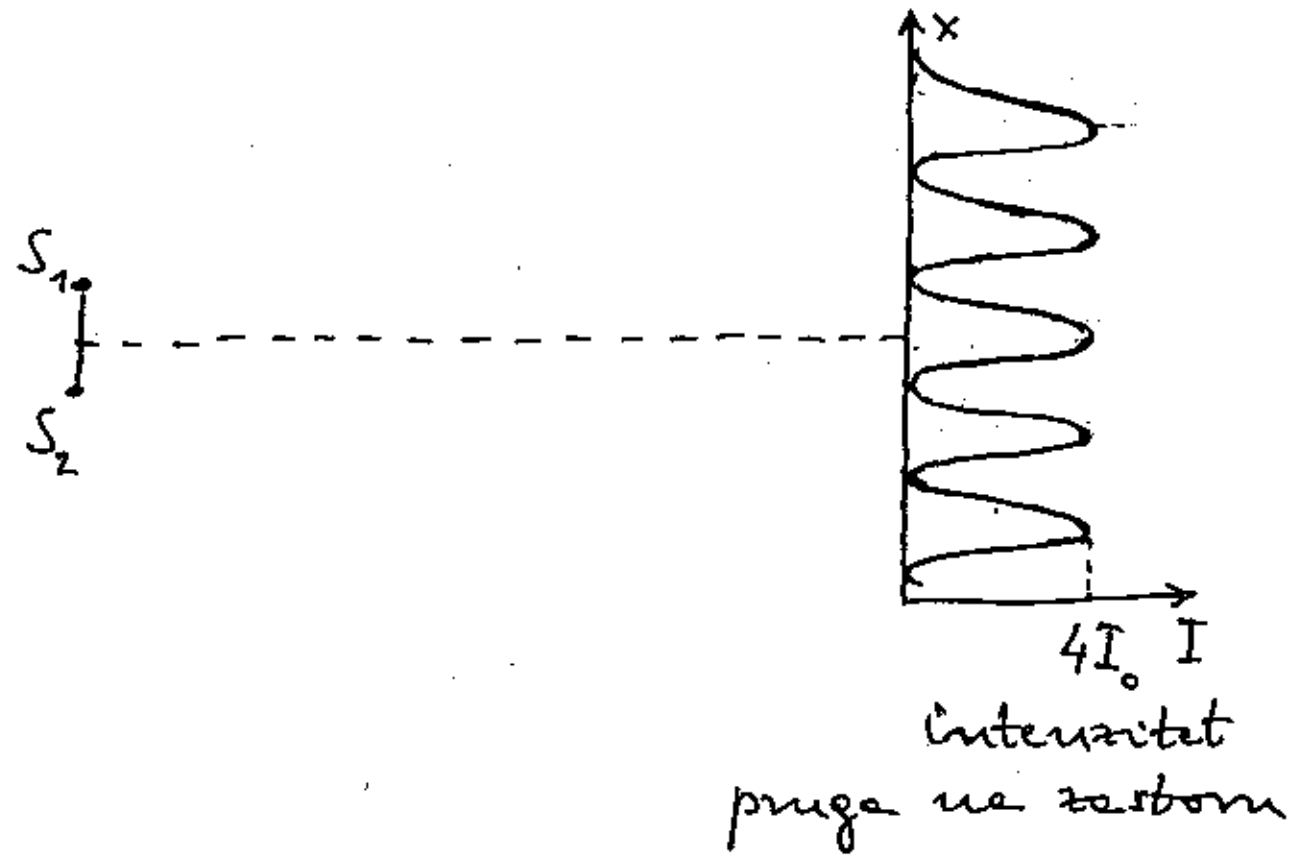
$$I = 2\epsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$$

Dobiveni izraz možemo također napisati pomoću intenziteta  $I_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2$  koji bi stvarala jedna jedina pukotina.

Također možemo pisati

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{kd}{2L} x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{2L} x = \frac{\pi d}{\lambda L} x$$

$$I(x) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda L} x\right)$$



Interferencijske pruge svjetlosti prvi je eksperimentalno utvrdio engleski fizičar (i liječnik) Thomas Young početkom 19. stoljeća.

Napomena:

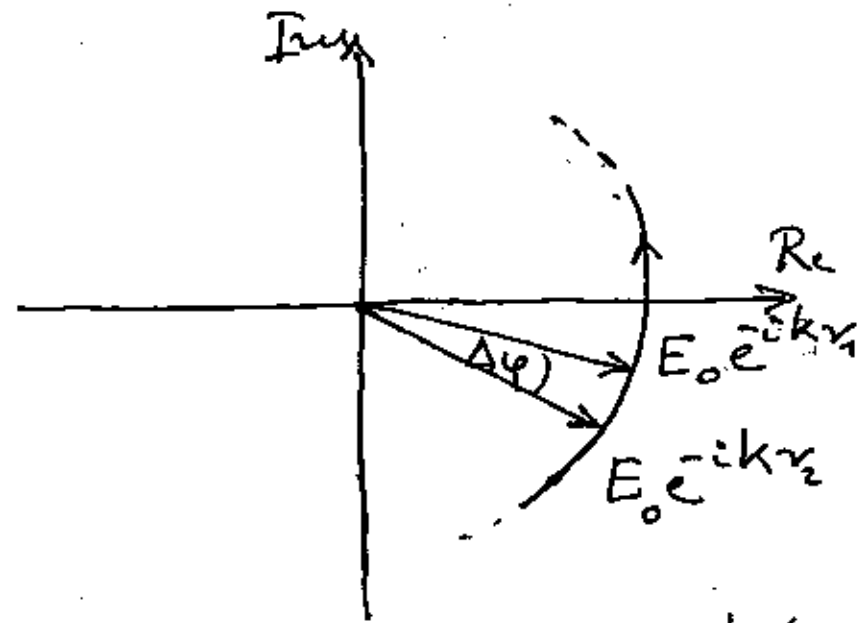
Protjezanje interferencijskih pruga jednakih intenziteta u nedogled ( $x \rightarrow \infty$ ) nije realno jer  $I_0$  opada kada se udaljenost od izvora znatno poveća.

## Izračun u kompleksnom prikazu

Valove iz dvaju izvora možemo zapisati kao kompleksne veličine, te zbrojiti:

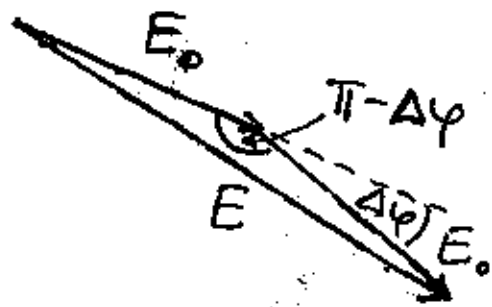
$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 = E_0 e^{i(\omega t - k r_1)} + E_0 e^{i(\omega t - k r_2)} \\ &= E_0 (e^{-i k r_1} + e^{-i k r_2}) e^{i \omega t}\end{aligned}$$

Dobili smo rotirajuće vektore u kompleksnoj ravнини. Dovoljno je razmotriti stanje u  $t=0$



$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1)$$

Zbrajanje vektora možemo provesti na uobičajen način



Prema kosinusovom poučku za trokut

$$\begin{aligned}E^2 &= E_0^2 + E_0^2 - 2E_0^2 \cos(\pi - \Delta\varphi) \\ &= 2E_0^2 (1 + \cos \Delta\varphi) \\ &= 4E_0^2 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}\end{aligned}$$

Rotirajući vektor u kompleksnoj ravнини glasi

$$\tilde{E} = 2E_0 \cos \frac{\Delta\varphi}{2} e^{i \omega t}$$

Za izračunavanje intenziteta slučajno se izrazom za vremensko u srednjavanje

$$\overline{\tilde{E} \tilde{E}} = \frac{1}{2} \tilde{E} \tilde{E}^* = \frac{1}{2} \left( 2E_0 \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right)^2$$

$$I = \varepsilon_0 c \overline{\tilde{E} \tilde{E}} = 2\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \quad I_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$$

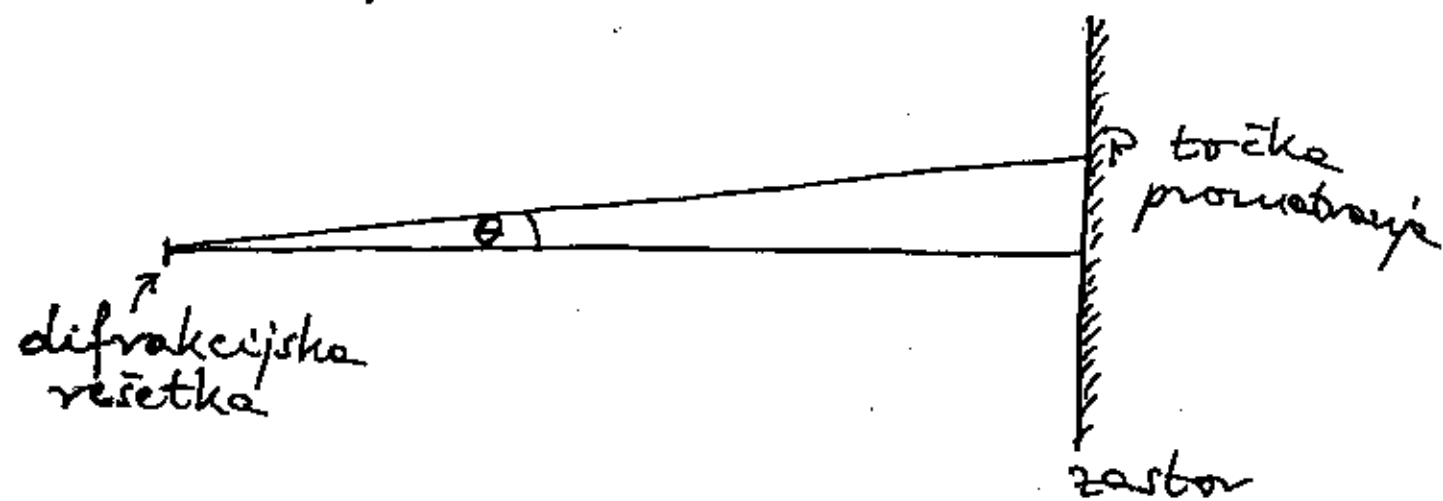
Savim očekivano, dobili smo isti rezultat kao i ranije.

Razlog za provedbu kompleksnog računa nalazimo u njegovoj pogodnosti kod primjene na difrakcijsku rešetku.

## 8.12. Difrakcijska rešetka

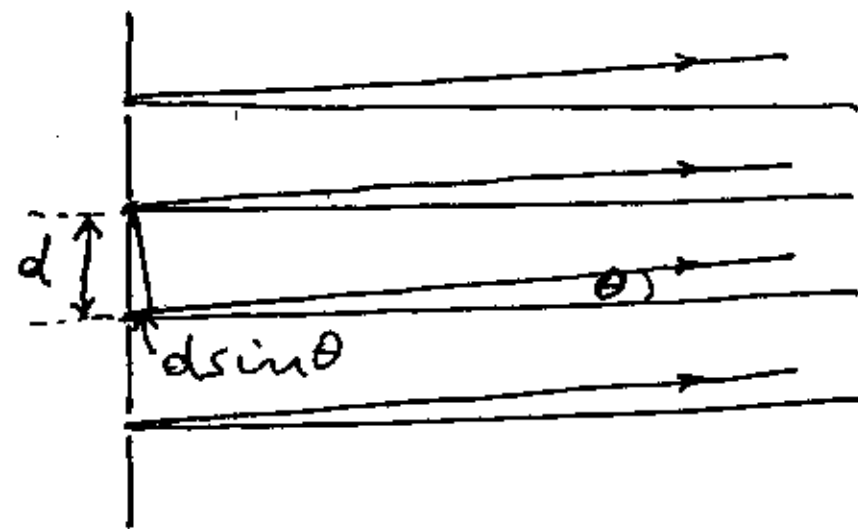
Mnoštvo od  $N$  ( $N \gg 1$ ) jako uskih pukotina (širina svake pukotine  $D < \lambda$ ) koje su poredane u pravilnom nizu s razmakom između susjednih pukotina  $d$  većim od valne duljine ( $d > \lambda$ ) naziva se difrakcijskom rešetkom.

Difrakcijska rešetka može imati  $N = 1000$  pukotina s razmakom  $d$  od nekoliko  $\mu\text{m}$ . Njena dimenzija je svega nekoliko  $\text{mm}$ . Promatranje interferencije obavlja se na zastoru koji je od difrakcijske rešetke udaljen nekoliko metara.



Zbog velike udaljenosti zastora i male veličine difrakcijske rešetke, možemo reći da iz svih pukotina rešetke svjetlost dolazi u točku P praktički pod istim kutom  $\theta$  u odnosu na okomicu.

Možemo razmotriti uvelanu sliku dijela difrakcijske rešetke



Uzastopne (praktički) paralelne zrake koje idu pod kutom  $\theta$  u odnosu na okomicu imaju razliku faze

$$\Delta\varphi = k(d \sin\theta)$$

gdje  $d \sin\theta$  čini razliku udaljenosti pukotina od udaljene točke promatranja P. Prema tome, u točki P imamo ukupno električno polje kao sumu doprinosa iz svih pukotina

$$E = E_0 \cos(\omega t - \Phi) + \\ + E_0 \cos(\omega t - \Phi - \Delta\varphi) \\ + E_0 \cos(\omega t - \Phi - 2\Delta\varphi) \\ + \dots \\ + E_0 \cos(\omega t - \Phi - (N-1)\Delta\varphi)$$

U ovom zapisu  $\Phi$  predstavlja fazu kašnjenja vala u točki P prema izvoru u prvoj pukotini (izvoru).

U svrhu zbrajanja valova korisno je poslužiti se metodom kompleksnih brojeva

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= E_0 \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega t - \Phi - n\Delta\varphi)} \\ &= E_0 e^{i(\omega t - \Phi)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\Delta\varphi}\end{aligned}$$

Na ovu sumu možemo primijeniti poznati izraz za geometrijski red

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{N-1} = \frac{q^N - 1}{q - 1}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\Delta\varphi} = \frac{e^{-iN\Delta\varphi} - 1}{e^{-i\Delta\varphi} - 1}$$

Nadalje, iskoristimo preobrazbu

$$e^{-ix} - 1 = e^{-i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}) = -2ie^{-i\frac{x}{2}} \underbrace{\frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}}_{\sin \frac{x}{2}}$$

$$\frac{e^{-iN\Delta\varphi} - 1}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} = \frac{-2ie^{-iN\frac{\Delta\varphi}{2}} \sin N\frac{\Delta\varphi}{2}}{-2ie^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}} \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}$$

za intenzitet svjetlosti u točki P dobivamo

$$I = I_0 \frac{\sin^2 N\frac{\Delta\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}$$

Kada je točka P na osi na difrakcijsku rešetku ( $\theta=0$ ) imamo  $\Delta\varphi=0$ , a intenzitet iznosi  $I=N^2 I_0$  (primjećujemo se da je  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , te  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Nx}{x} = N$ ). To je maksimalan intenzitet.

Ako točku promatranja P udaljavamo od osi na difrakcijsku rešetku, raste kut  $\theta$  pa time i  $\Delta\varphi$ . Za veliki N dovoljan je mali kut  $\theta$ , odnosno mali  $\Delta\varphi$  da se ostvari uvjet

$$N\frac{\Delta\varphi}{2} = \pi \Rightarrow \sin N\frac{\Delta\varphi}{2} = 0 \Rightarrow I=0$$

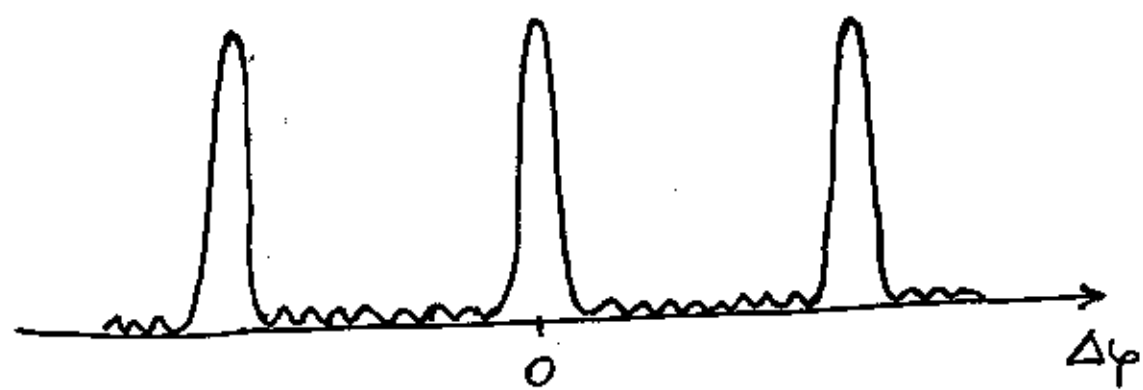
To je prvi minimum. Kod daljnjeg pomicanja točke promatranja (raste  $\theta$  i  $\Delta\varphi$ ) dobivamo da se ispuni uvjet

$$N\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin^2 N\frac{\Delta\varphi}{2} = 1 \Rightarrow I = I_0 \frac{1}{\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}$$

To je prvi bočni maksimum koji je

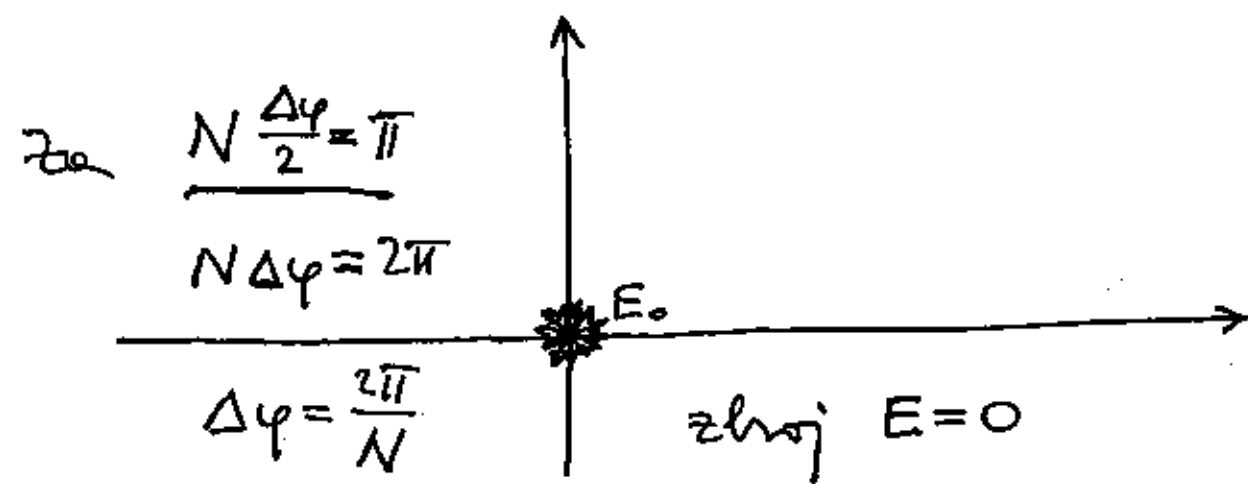
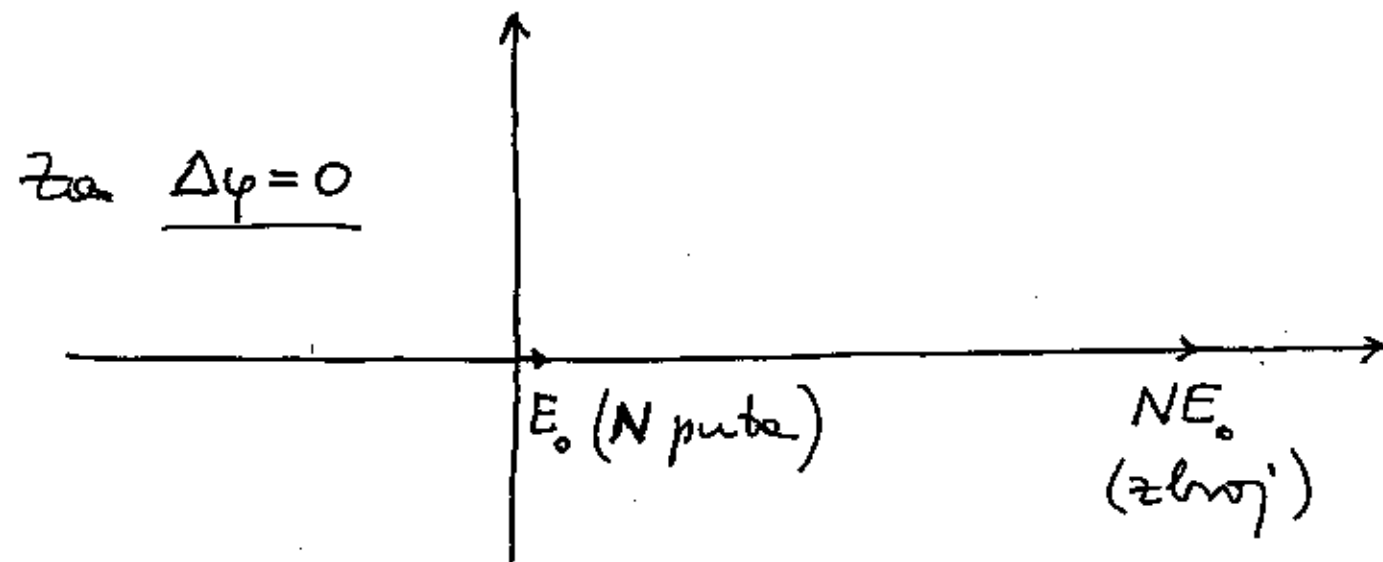


mnogo manji od središnjeg. Sljedeće minimum ostvaruje se za  $N \frac{\Delta\varphi}{2} = 2\pi$  itd. Nakon mnoštva malenih maksimuma i minimuma uslijedi opet veliki maksimum kada  $\frac{\Delta\varphi}{2} \rightarrow \pi$ , pa i  $N \frac{\Delta\varphi}{2} \rightarrow N\pi$  tako da  $I \rightarrow N^2 I_0$ .



Kod difrakcijske rešetke nastaje jako uski maksimumi s velikim intenzitetom a između tih maksimuma je širok pojas u kojemu je praktički tamno jer je tu interferencija mnoštva valova iz svih pukotina praktički destruktivna.

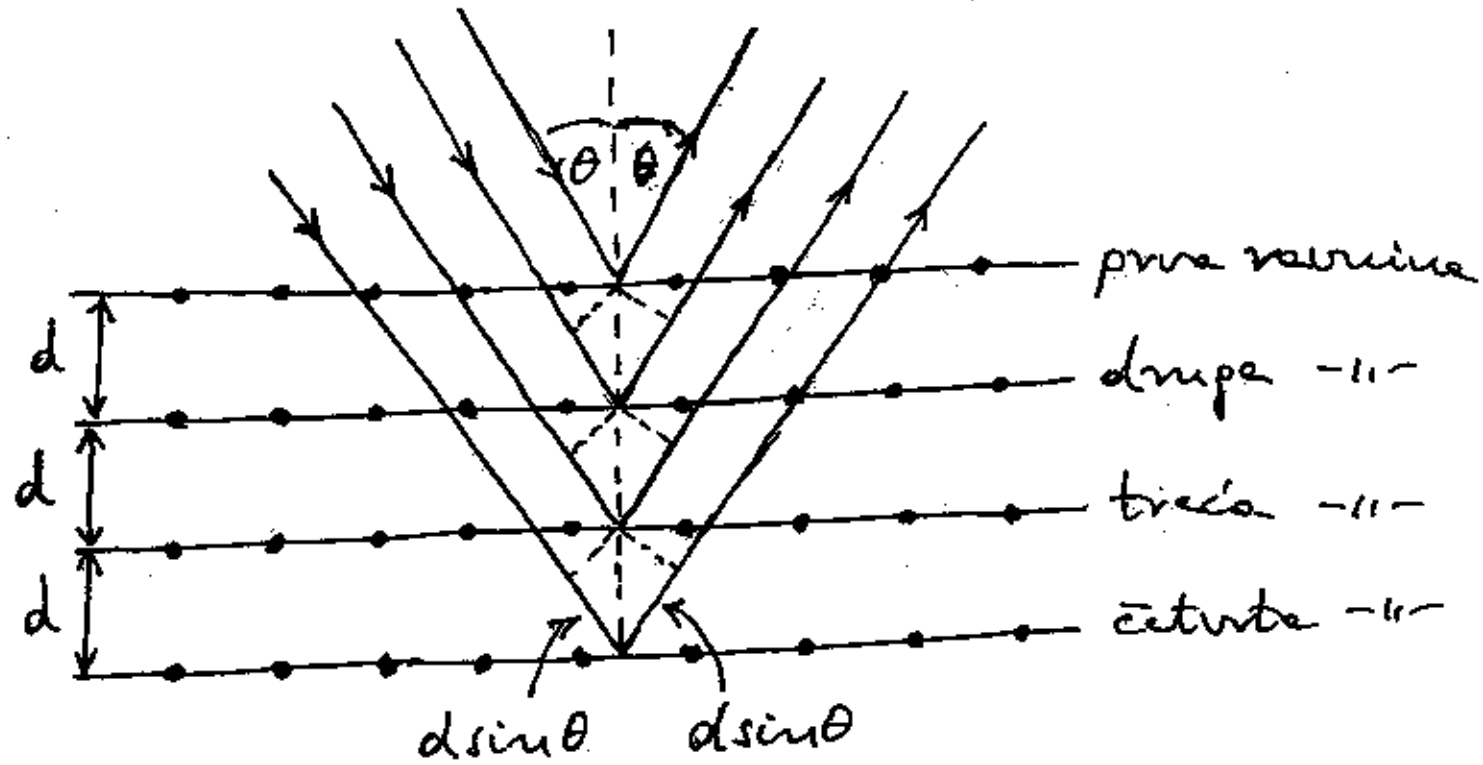
Ostvarivanje konstruktivne interferencije samo u uskom području može se bolje shvatiti u prikazu valova pomoću metode rotirajućih vektora.



Svaki vektor  $E_0$  zakrenut je za  $\Delta\varphi$  u odnosu na prethodni.  $N$  vektora  $E_0$  raspoređeno je pravilno u kutu  $2\pi$ . Stoga njihov vektorski zbroj iznosi nula. Za veliki broj pukotina  $N$ , ovaj se uvjet ostvari za maleni  $\Delta\varphi$  (odnosno već za maleni  $\theta$ ). Sljedeći maksimumi su maleni jer vektori  $E_0$  imaju i dalje različite faze. Tek za  $\frac{\Delta\varphi}{2} \rightarrow \pi$ , tj.  $\Delta\varphi \rightarrow 2\pi$  doliva se opet ista situacija kao i za  $\Delta\varphi = 0$ .

## Dopunski primjer: rendgenska difrakcija na kristalima

Rendgensko zračenje čine elektromagnetski valovi kojima je valna duljina mnogo kraća od valne duljine svjetlosti, te je čak manja od tipične udaljenosti između atomskih ravnina u kristalima. Stoga je pomoću rendgenskih zraka i atomskih ravnina u kristalu može postići efekt koji je analogan optičkoj difrakcijskoj rešetki.



Na svakoj atomskoj ravnini dolazi do djelomične (melane) refleksije rendgenskih zraka dok se glavina transmitira dalje.

Zbog mnoštva reflektiranih valova približno jednake amplitude, ali s različite u fazi, dobivamo u zbroju efekt kao kod difrakcijske rešetke u optici. Razlike putova rendgenskih valova koji se reflektiraju na susjednim atomskim ravninama iznosi  $2d \sin \theta$ , pa je razlika faza

$$\Delta \varphi = 2kd \sin \theta$$

gdje je  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , a  $\lambda$  je valna duljina rendgenskog zračenja. Intenzivni maksimum nastaje za

$$\Delta \varphi = 2\pi \Rightarrow 2d \sin \theta = \lambda$$

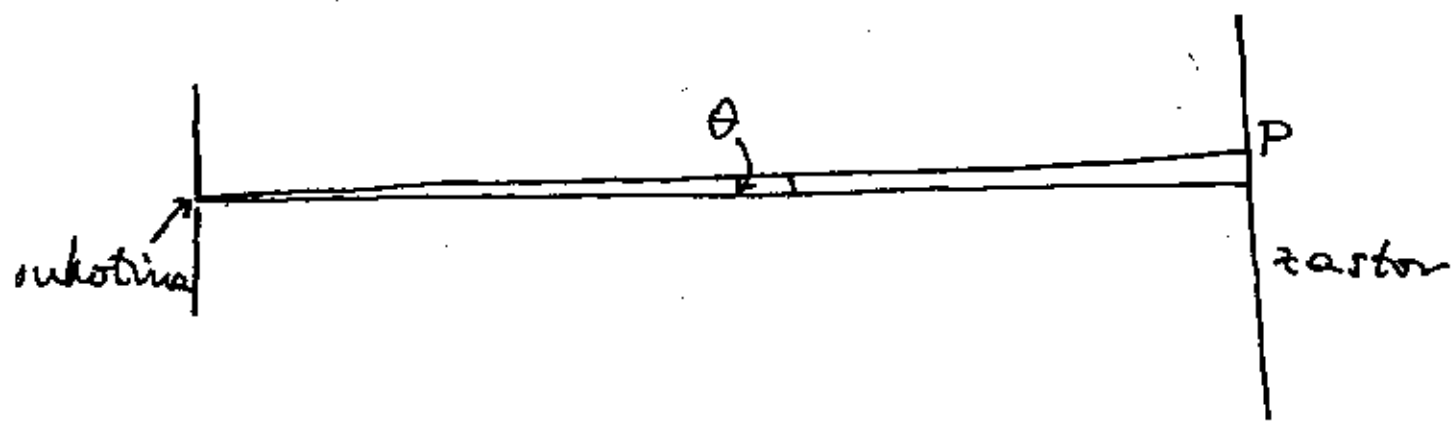
Poznavajući  $\lambda$  i mjereći kut  $\theta$  (rotacijom kristala dok se ne postigne intenzivna refleksija) može se odrediti razmak  $d$  između atomskih ravnina u kristalu.

### Napomena:

Rendgensko proučavanje kristalne strukture je znatno složenije jer postoji veći broj atomskih ravnina s različitim međusobnim udaljenostima.

### 8.13. Difrakcija na jednoj unijevano širokoj pukotini

Priroda difrakcije svjetlosti može se najbolje proučiti razmatrajući pukotinu kojoj je širina  $D$  nekoliko puta veća od valne duljine svjetlosti ( $D \gg \lambda$ ), zastor na kojem se promatra rezultat difrakcije udaljen je od pukotine mnogo, mnogo puta više od širine pukotine.

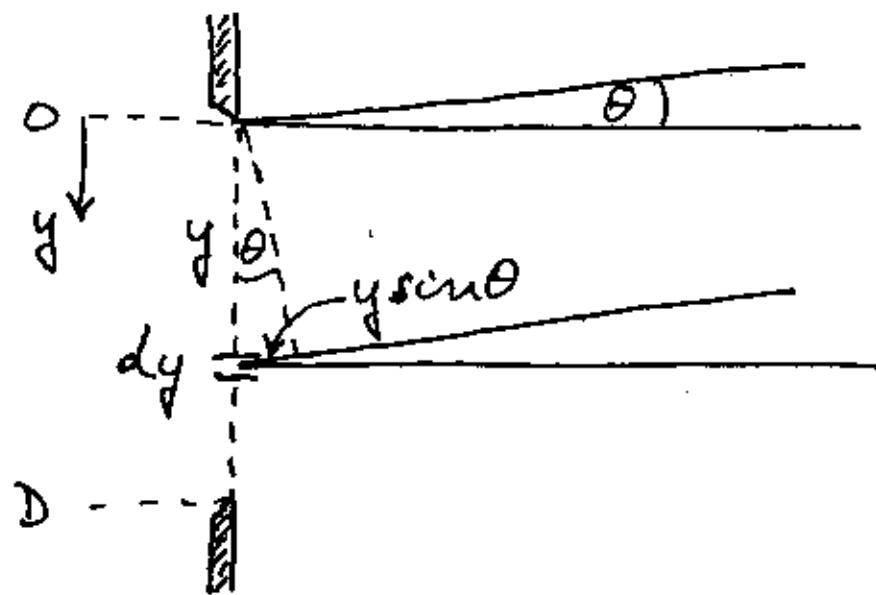


Cjelokupna svjetlost koja dolazi u točku  $P$  iz bilo koje djelice pukotine ide pod kutom  $\theta$  u odnosu na okomicu. Stoga možemo citati jako uvelanu sliku pukotine i smatrati da iz svakog infinitesimalnog dijela  $dy$  izlazi val koji dolazi do točke  $P$  i u njoj stvara električno polje (u kompleksnom zapisu)

$$d\tilde{E} = \left( E_0 \frac{dy}{D} \right) e^{i(\omega t - \Phi - \Delta\varphi)}$$

gdje je  $E_0$  konstanta kojoj ćemo kasnije utvrditi značenje, a  $\frac{dy}{D}$  je relativni

udio djelice  $dy$  u ukupnoj širini  $D$ .



Veličina  $\Phi$  predstavlja ukupno fazno kašnjenje u valu od djelice pukotine pri vrhu (blizu  $y=0$ ) do udaljene točke  $P$  na zastoru. Dodatno fazno kašnjenje ima val koji ide od djelice  $dy$  na udaljenosti  $y$  od gornjeg ruba pukotine do točke  $P$  na zastoru

$$\Delta\varphi = k(y \sin \theta)$$

Ukupno električno polje  $\tilde{E}$  u točki  $P$  ima doprinose od svih djelica  $dy$  pukotine

$$\tilde{E} = \int d\tilde{E} = \frac{E_0}{D} e^{i(\omega t - \Phi)} \int_0^D e^{-iky \sin \theta} dy$$

Integral možemo lako izračunati:

$$\int_0^D e^{-iky \sin \theta} dy = \left[ \frac{e^{-iky \sin \theta}}{-ik \sin \theta} \right]_0^D = \frac{e^{-ikD \sin \theta} - 1}{-ik \sin \theta}$$

$$= \frac{e^{-i \frac{kD}{2} \sin \theta}}{-ik \sin \theta} \underbrace{\left( e^{-i \frac{kD}{2} \sin \theta} - e^{i \frac{kD}{2} \sin \theta} \right)}_{2i \sin \left( \frac{kD}{2} \sin \theta \right)}$$

Nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo za ukupno električno polje u točki P

$$\vec{E} = E_0 e^{-i \frac{kD}{2} \sin \theta} \frac{\sin \left( \frac{kD}{2} \sin \theta \right)}{\frac{kD}{2} \sin \theta} e^{i(\omega t - \phi)}$$

Intenzitet u točki P iznosi

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \vec{E} \vec{E}^* = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{kD}{2} \sin \theta \right)}{\left( \frac{kD}{2} \sin \theta \right)^2}$$

Za  $\theta = 0$  (točka P na osi optičke puke) dobiva se intenzitet

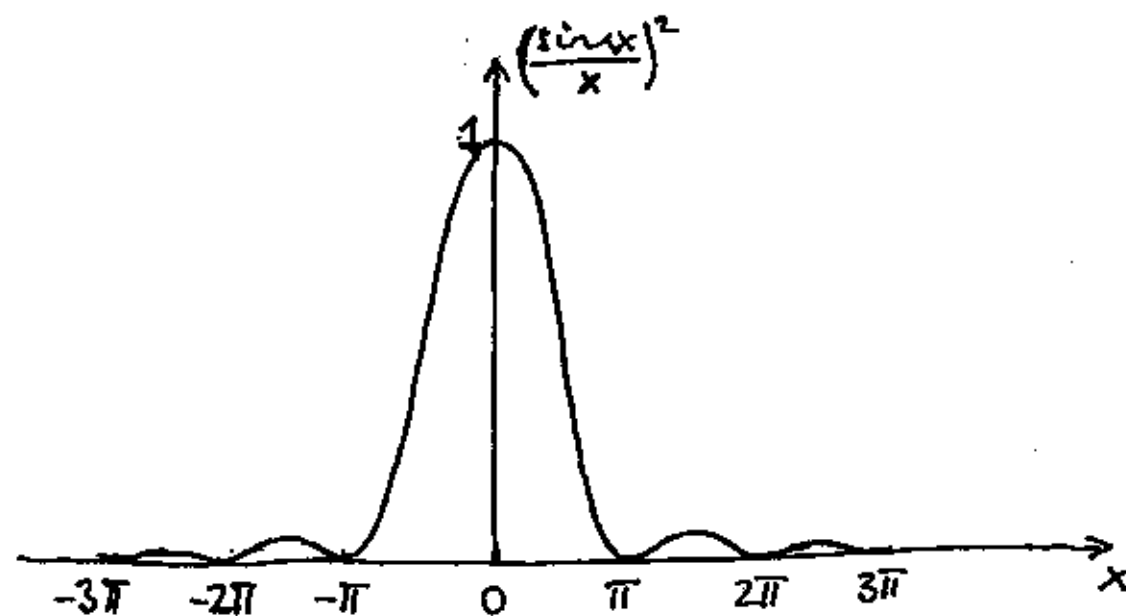
$$I_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

Ovdje nalazimo smisao konstante  $E_0$ . Ona je jednaka amplitudi električnog polja u središnjoj točki na zaslonu.

U svim drugim točkama na zaslonu nalazimo intenzitet

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{kD}{2} \sin \theta \right)}{\left( \frac{kD}{2} \sin \theta \right)^2}$$

Funkcija  $\left( \frac{\sin x}{x} \right)^2$  ima oblik



Središnja difrakcijska pruga ostvaruje se unutar kuta  $\pm \theta_0$  za koji vrijedi

$$\frac{kD}{2} \sin \theta_0 = \pi$$

Uzimajući u obzir da je  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , gornji uvjet možemo napisati u obliku

$$\pi \frac{D}{\lambda} \sin \theta_0 = \pi \Rightarrow \sin \theta_0 = \frac{\lambda}{D}$$

Dobivenu relaciju je sada lako analizirati.

Ako je  $D \gg \lambda$ , kut  $\theta_0$  je jako malen. Dakle, široka pukotina daje (praktički) pravovutan snop svjetlosti. To je aproksimacija geometrijske optike.

Za umjereno široku pukotinu ( $D > \lambda$ ) imamo središnji snop svjetlosti koji se širi unutar kuta  $\pm \theta_0$ . Što je pukotina uža, kut  $\theta_0$  postaje veći.

Kada bi širina pukotine bila točno jednaka valnoj duljini svjetlosti ( $D = \lambda$ ), središnji snop bi se proširao unutar kuta  $\pm \theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ , tj. u cijelom poluprostoru. Ipak, intenzitet ne bi bio jednak u svim smjerovima, nego bi od sredine opadao do nule na bokovima.

Za  $D \ll \lambda$  (jako uska pukotina) veličina  $\frac{kD}{2} \sin \theta$  ne može dosegnuti iznos  $\pi$  niti za  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Točnije, za  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dobiva se

$$\frac{kD}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \pi \frac{D}{\lambda} \ll \pi$$

Središnji dio intenziteta  $I_0$  praktički je jednak u cijelom poluprostoru.

### Napomena:

Valja imati na umu da se intenzitet  $I_0$  smanjuje proporcionalno sa širinom pukotine (uz pretpostavku da je ispred pukotine uvijek isti ravni val svjetlosti). Stoga je u praksi teško opaziti difrakciju koje dolazi od jedne jako uske pukotine.

Samo u slučaju difrakcijske rešetke s velikim brojem  $N$  jako uskih pukotina, dobiva se intenzivni maksimum  $N^2 I_0$  koji se bez problema opaža.