Uvod u algebarsku topologiju

Matija Bašić

5. travnja 2024.

Kategorija C se sastoji od

- klase objekata,
- skupa morfizama $\mathrm{Hom}(X, Y)$ za svaki par objekata X, Y,
- kompozicije $\circ\colon \mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$, $(f, g) \mapsto g \circ f$,
- elemenata $1_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$ za svaki objekt X

tako da je kompozicija asocijativna i 1_X djeluje kao neutralni elementi za kompoziciju.

Za morfizam $f\colon X \to Y$ kažemo da je

- *monomorfizam* ako za svaki par morfizama $g, h\colon W \to X$ jednakost $f \circ g = f \circ h$ povlači $g = h$;
- *epimorfizam* ako za svaki par morfizama $g, h\colon Y \to Z$ jednakost $g \circ f = h \circ f$ povlači $g = h$;
- *bimorfizam* ako je monomorfizam i epimorfizam.

(Kovarijantni) funktor $F : C \to D$ između kategorija C i D je pridruživanje koje svakom objektu X kategorije C pridružuje objekt $F(X)$ kategorije D, te svakom morfizmu $f\colon X \to Y$ u kategoriji C morfizam $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ u kategoriji D tako da vrijedi

$$F(1_X) = 1_{F(X)}, \qquad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Suprotna kategorija C^{op} kategorije C je kategorija koja ima istu klasu objekata, a za morfizme vrijedi

$$\mathrm{Hom}_{C^{op}}(Y, X) = \mathrm{Hom}_C(X, Y).$$

Za kovarijantni funktor $F\colon C^{op} \to D$ kažemo da je *kontravarijantan* funktor na kategoriji C, tj. za takav funktor vrijedi

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Primjer. Tipičan primjer kovarijantnog funktora je $h_X\colon C \to Set$, $h_X = \mathrm{Hom}(X, -)$, a kontravarijantnog $h^X\colon C^{op} \to Set$, $h^X = \mathrm{Hom}(-, X)$.

Prirodna transformacija $\alpha\colon F \Rightarrow G$ između funktora $F, G\colon C \to D$ se sastoji od familije morfizama $\{\alpha_X\colon F(X) \to G(X)\}$ indeksirane objektima kategorije C takvim da za svaki morfizam $f\colon X \to Y$ u C sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(Y). \end{tikzcd}$$

Neka su X i Y dva objekta u kategoriji C. Ako je P objekt u kategoriji C takav da postoje morfizmi $\pi_X \colon P \to X$ i $\pi_Y \colon P \to Y$ takvi da za svaki drugi objekt Z i par morfizama $f_X \colon Z \to X$ i $f_Y \colon Z \to Y$ postoji jedinstveni morfizam $\phi \colon Z \to P$ takav da je $f_X = \pi_X \circ \phi$ i $f_Y = \pi_Y \circ \phi$ kažemo da je (P, π_X, π_Y) *produkt* objekata X i Y.

Slično, ako je P objekt u kategoriji C takav da postoje morfizmi $\iota_X \colon X \to P$ i $\iota_Y \colon Y \to P$ takvi da za svaki drugi objekt Z i par morfizama $g_X \colon X \to Z$ i $g_Y \colon Y \to Z$ postoji jedinstveni morfizam $\psi \colon P \to Z$ takav da je $g_X = \psi \circ \iota_X$ i $g_Y = \psi \circ \iota_Y$ kažemo da je (P, ι_X, ι_Y) *koprodukt* objekata X i Y.

Konstrukcije poput produkta i koprodukta nazivamo *univerzalnim konstrukcijama* i jedno od osnovih pitanja u teoriji kategoriji je pod kojim uvjetima funktor čuva takve univerzalne konstrukcije.

Domaća zadaća

Obavezno treba riješiti barem 10 zadataka, od toga barem dva od zadataka 1-4; dva od zadataka 5-9; dva od zadataka 10-15; dva od zadataka 16-20. Rok za predaju: 26. 4. 2024.

1. Neka je $\mathbb{Z}$ skup cijelih brojeva. Promotrite najmanju topologiju na $\mathbb{Z}$ takvu da su skupovi $A_{a,b} = \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$, za $a \neq 0$, otvoreni. Neka je $S = \bigcup_{p \text{ prost}} p\mathbb{Z}$.

   (a) Dokažite da je svaki skup $A_{a,b}$ i otovoren i zatvoren.

   (b) Dokažite da nijedan neprazni konačni skup nije otvoren.

   (c) Promatrajući skup S zaključite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.

2. Neka je X skup i σ familija podskupova od X takva da vrijedi:

   (a) Za svaki $x \in X$ postoji $U \in \sigma$ takav da je $x \in U$.

   (b) Za svaki $x \in U \cap V$, $U, V \in \sigma$ postoji $W \in \sigma$ takav da je $x \in W \subseteq U \cap V$.

   Neka je τ familija svih podskupova od X koji se mogu prikazati kao unija elemenata od σ. Dokažite da je τ topologija na X.

   Napomena. Kažemo da je σ baza topologije τ.

3. (Lema o uniji) Neka su X i Y topološki prostori, neka su A i B zatvoreni podskupovi od X takvi da je $A \cup B = X$, te neka su $f: A \to Y$ i $g: B \to Y$ neprekidna preslikavanja takva da je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in A \cap B$. Dokažite da je preslikavanje $F: X \to Y$ definirano formulom

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B, \end{cases}$$

   također neprekidno.

   Napomena. Podskup A topološkog prostora X je *zatvoren* ako je njegov komplement $X \setminus A$ otvoren. To općenito *nije* isto što i tvrdnja da A nije otvoren.

4. Neka je ρ standardna topologija na $\mathbb{R}$. Neka je σ familija svih intervala u $\mathbb{R}$ oblika $[a, b\rangle$, $a < b$.

   (a) Dokažite da je σ baza neke topologije τ na $\mathbb{R}$.

   (b) Dokažite da je preslikavanje $f: (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \rho)$ neprekidno u točki c ako i samo ako funkcija f ima limes zdesna u c.

5. Neka je C kategorija. Dokažite da postoji kategorija $Arr(C)$ čiji objekti su morfizmi $f: X \to Y$ u C, a morfizmi između $f: X \to Y$ i $f': X' \to Y'$ su parovi morfizama $(a: X \to X', b: Y \to Y')$ u C takvi da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xrightarrow{b} & Y'. \end{array}$$

6. Za morfizam $f\colon X \to Y$ kažemo da je *izomorfizam* ako postoji morfizam $f^{-1}\colon Y \to X$ takav da je $f \circ f^{-1} = 1_Y$ i $f^{-1} \circ f = 1_X$.

   Dokažite da je za svaki funktor $F\colon C \to D$ i svaki izomorfizam f u C morfizam $F(f)$ također izomorfizam.

   Pokažite da je svaki izomorfizam bimorfizam. Pokažite da u kategoriji skupova **Set** vrijedi obrat, te dajte primjer bimorfizma u nekoj kategoriji koji nije izomorfizam.

7. Pokažite da između svaka dva produkta objekata X i Y postoji izomorfizam. Pokažite da u kategoriji topoloških prostora postoje produkti za svaka dva objekta (opišite skup i topologiju eksplicitno). Opišite koprodukt u kategoriji skupova i kategoriji vektorskih prostora.

8. Neka je $\mathcal{V}$ kategorija konačnodimenzionalnih vektorskih prostora i linearnih operatora. Neka je $I\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ identični funktor (identiteta na klasi objekata i na svakom skupu morfizama), $D\colon \mathcal{V}^{op} \to \mathcal{V}$ funktor koji pridružuje svakom vektorskom prostoru V njegov dual $D(V) = V^*$, te $D^2 = D \circ D\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ funktor koji pridružuje biduale. Prisjetite se kako funktori D i D^2 djeluju na morfizmima. Dokažite da postoji prirodna transformacija $\alpha\colon I \to D^2$ takva da je svaki morfizam α_V izomorfizam.

   Ovo objašnjava izjavu "bidual V^{**} je prirodno izmorfan vektorskom prostoru V".

9. (Yonedina lema) Neka je C kategorija i neka je $\mathrm{Fun}(C)$ kategorija kojoj su objekti kontravarijantni funktori $F\colon C^{op} \to Set$, a morfizmi prirodne transformacije. Dokažite da za svaki funktor F postoje bijekcije (koje su prirodne u X)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(C)}(f, h^X) \cong F(X).$$

10. Na topološkom prostoru X definiramo relaciju $\sim$ tako da je $x \sim y$ ako postoji *put*, tj. neprekidno preslikavanje $\gamma\colon [0,1] \to X$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Neka je $\pi_0(X)$ kvocijentni skup $X/\sim$. Pokažite da se π_0 može proširiti do funktora (definirati za neprekidna preslikavanja na funktorijalan način) iz kategorije topoloških prostora u kategoriju skupova.

11. Neka su x_0 i x_1 dvije točke topološkog prostora X. Dokažite da je homotopnost puteva s fiksnim krajevima relacija ekvivalencije na skupu svih puteva u X koji počinju u x_0 i završavaju u x_1.

12. Neka je x_0 točka topološkog prostora X. Na skupu $\pi_1(X, x_0)$ klasa homotopije petlji u X s početkom i krajem u x_0 definirali smo operaciju

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \star \beta]$$

   pri čemu je petlja $\alpha \star \beta\colon [0,1] \to X$ definirana s

$$(\alpha \star \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

   Dokažite da je binarna operacija $\cdot$ na $\pi_1(X, x_0)$ dobro definirana.

13. Dokažite da je binarna operacija $\cdot$ asocijativna.

14. Dokažite da je klasa reprezentirana konstantnom petljom u točki x_0 neutralni element za operaciju $\cdot$.

15. Dokažite da je za svaku klasu $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ klasa reprezentirana petljom $\overline{\alpha}$ inverzna klasi $[\alpha]$ obzirom na operaciju $\cdot$. Ovdje je $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$, za $t \in [0,1]$.

16. (Brouwerov teorem o fiksnoj točki) Dokažite da svako neprekidno preslikavanje $f\colon D^2 \to D^2$ ima fiksnu točku, tj. postoji $x \in D^2$ tako da $f(x) = x$.

    Uputa: iskoristite činjenicu da ne postoji retrakcija od D^2 na S^1.

17. (Borsuk-Ulamov teorem) Dokažite da za svako neprekidno preslikavanje $h\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ postoji točka $x \in S^2$ takva da je $h(x) = h(-x)$.

18. (Fundamentalni teorem algebre) Dokažite da svaki nekonstantni polinom $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ima barem jednu kompleksnu nultočku.

    Uputa: Pretpostavite da je $p(z) = z^n + q(z)$ normiran i da p nema nultočku. Promotrite homotopiju
    $$F(t,s) = \frac{p(te^{2\pi is})/p(t)}{|p(te^{2\pi is})/p(t)|}$$
    i homotopiju
    $$H(t,s) = \frac{[(re^{2\pi is})^n + tq(re^{2\pi is})]/[r^n + tq(r)]}{|[(re^{2\pi is})^n + tq(re^{2\pi is})]/[r^n + tq(r)]|}$$
    za dovoljno veliki r, takav da je $r > \max\{1, \sum_{j=1}^{n} |a_j|\}$.

19. (Svojstvo podizanja homotopije za S^1) Neka je $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ dano formulom $p(t) = e^{2\pi it}$. Neka su $H\colon Y \times [0,1] \to S^1$ i $\overline{H}\colon Y \times \{0\} \to \mathbb{R}$ neprekidna preslikavanja takva da vrijedi $p \circ \overline{H} = H|_{Y\times\{0\}}$. Dokažite da postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $\tilde{H}\colon Y \times [0,1] \to \mathbb{R}$ koje proširuje $\overline{H}$ takvo da je $p \circ \tilde{H} = H$.

    Uputa: Prvo pokažite da postoje U_1 i U_2 otvoreni podskupovi od S^1 takvi da je $p^{-1}(U_i)$ homeomorfno disjunktnoj uniji otvorenih intervala.

    Podizanje $\tilde{H}$ konstruirajte induktivno koristeći kompaktnost segmenta $[0,1]$.

20. Dokažite da postoji izomorfizam
    $$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)).$$