Zadaci s demonstratura iz Matematičke analize

Zadatak 1. Slika funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane s $f(x) = \operatorname{arctg}(x+1) + \operatorname{arcctg} x$.

Rješenje. Da pojednostavimo izraz, primijetimo da je $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ pa je $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. Time dobivamo $f(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x$. Zanima nas slika nekonstantnog dijela $\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x$. Kako je funkcija arctg rastuća, taj je izraz sigurno pozitivan, a s grafa je jasno da može biti proizvoljno blizu 0. Što se tiče maksimuma, riječ je zapravo o najvećem mogućem rastu funkcije arctg pri pomaku od 1 na $x-$osi. Znamo da ona najbrže raste oko 0, a sporije što se više od 0 odmičemo. Stoga maksimum ostvarujemo pri pomaku od $-\frac{1}{2}$ do $\frac{1}{2}$, tj. za $x = -\frac{1}{2}$. Zaključujemo da je slika od $\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x$ skup $\langle 0, 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}]$, tj. slika funkcije f je skup $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}]$.

Komentar. Uz kasnije gradivo zadatak možemo riješiti formalnije. Neka je $g(x) = \operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x$. Dokažimo iz definicije limesa da za svaki $\eta > 0$ postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $g(x) < \eta$. Imamo $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, odnosno za sve $\varepsilon > 0$ postoji $\Delta > 0$ takav da $x > \Delta \implies \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \varepsilon$. Uzmimo sada Δ takav da $x > \Delta \implies \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \frac{\eta}{2}$. Kako je onda i $x + 1 > \Delta$, vrijedi i $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x+1) < \frac{\eta}{2}$. Onda je

$$|g(x)| = \left|\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right| \leq \left|\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{\pi}{2}\right| + \left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta$$

pri čemu prva nejednakost vrijedi po nejednakosti trokuta. Primijetimo da smo po definiciji dokazali i $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Da nađemo maksimum od g tražimo nultočku derivacije $g'(x) = \frac{-2x-1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$, a to je $x = -\frac{1}{2}$ čime smo potvrdili rješenje. Funkcija g u toj točki sigurno ima upravo maksimum jer smo za mimimum već dokazali da ne postoji. Alternativno, mogli smo g derivirati dvaput pa bismo ustanovili da je g'' negativna na cijelom $\mathbb{R}$. Po poznatom teoremu u točki gdje je prva derivacija nula, a druga negativna nalazi se strogi maksimum funkcije.

Zadatak 2. Dokazat ćemo da ne postoji padajuća funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da za svaki realan x vrijedi $f(f(x)) - f(x^3) = 2^{f(x)}$.

Rješenje. Sigurno vrijedi $2^{f(x)} > 0$ pa je i $f(f(x)) - f(x^3) > 0$ tj. $f(f(x)) > f(x^3)$ iz čega zaključujemo $f(x) < x^3$ jer je f padajuća. No tada $\forall E > 0$ vrijedi $f(0) \leq f(-\sqrt[3]{E}) < -E$, što je nemoguće. Zaključujemo da takva funkcija ne postoji.

Komentar. Kao svojstvo izraza s desne strane uzet ćemo pozitivnost, koja onda vrijedi i za izraz s lijeve strane. Primjenom pretpostavke da je f padajuća dobit ćemo $f(x) < x^3$. To uostalom znači da f postiže proizvoljno male vrijednosti kad idemo prema $-\infty$. Njen graf nalazi se u cjelosti ispod grafa funkcije x^3. Kako je funkcija padajuća, vrijednosti u nešto većim točkama, npr. $f(0)$, trebale bi biti manje od svih tih proizvoljno malih vrijednosti, što je nemoguće.

Zadatak 3. (MA1, 2. kolokvij, 2015./2016.) Ako je $(a_n)_n$ ograničen niz sa

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2^n} - 3a_n) = 0$$

onda je on konvergentan s limesom 0.

Rješenje. Po Weierstrassovom teoremu (svaki) niz ima monoton podniz, a kako je $(a_n)_n$ i ograničen on ima konvergentan podniz tj. gomilište $\neq \pm\infty$. Neka je L neko gomilište i $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija takva da je $(a_{p(n)})_n$ spomenuti konvergentni podniz koji konvergira u L. Onda $n \to \infty$ kad i samo kad $p(n) \to \infty$ pa možemo pisati i

$$0 = \lim_{n\to\infty}(a_{2^{p(n)}} - 3a_{p(n)}) = \lim_{n\to\infty} a_{2^{p(n)}} - \lim_{n\to\infty} 3a_{p(n)} = \lim_{n\to\infty} a_{2^{p(n)}} - 3L \implies \lim_{n\to\infty} a_{2^{p(n)}} = 3L$$

pri čemu druga jednakost stoji jer znamo da $(3a_{p(n)})_n$ ima limes. Iz početne jednakosti očito slijedi i

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2^{2^n}} - 3a_{2^n}) = 0$$

pa i za podniz dan s p vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2^{2^{p(n)}}} - 3a_{2^{p(n)}}) = 0$$

Znajući da $(a_{2^{p(n)}})_n$ ima limes $3L$, kao gore dobivamo da $(a_{2^{2^{p(n)}}})_n$ ima limes $9L$. Ponavljanjem ovog postupka nalazimo gomilišta $27L, 81L, \ldots, 3^k L, \ldots$ Ako je $L \neq 0$ niz $(a_n)_n$ ima proizvoljno velika ($L > 0$) ili mala ($L < 0$) gomilišta u kontradikciji s pretpostavkom o ograničenosti. Dakle, 0 je jedino gomilište, dakle limes, niza $(a_n)_n$.

Zadatak 4. (MA1, 2. kolokvij, 2016./2017.) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i ograničena funkcija. Onda postoji $x \in \mathbb{R}$ s $f(x) = x$.

Rješenje. Definiramo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $g(x) = f(x) - x$. Kako je f ograničena, a identiteta nije, zaključujemo da ni g nije ograničena (ni odozgo ni odozdo). Dakle, postoje $m, M \in \mathbb{R}$ s $g(m) < 0$ i $g(M) > 0$. Neka je $S = [m, M]$ za $m < M$ tj. $S = [M, m]$ za $M < m$. Primjenom BW teorema na $g|_S : S \to \mathbb{R}$ zaključujemo da postoji $s \in S$ s $g(s) = 0$ tj. $f(s) = s$, kakav je i trebalo naći.

Komentar. Proučavat ćemo realnu funkciju g danu s $g(x) = f(x) - x$ i dokazivati da ima nultočku. To je nešto lakše jer gledamo sliku neke funkcije, dok kod izraza $f(x) = x$ gledamo interakciju dvaju funkcija. Intuicija nam govori da bi neprekidna funkcija koja je negdje pozitivna, a negdje negativna, negdje morala i presjeći $x-$os tj. imati nultočku. To nam upravo potvrđuje Bolzano-Weierstrassov teorem o neprekidnim funkcijama koji govori da neprekidna funkcija postiže sve međuvrijednosti. Preostaje ustanoviti da g doista postiže i pozitivne i negativne vrijednosti, no to se neće pokazati teškim.

Zadatak 5. (MA1, 2. kolokvij, 2016./2017.) Limes

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\cos^3\frac{1}{x}}(3^{\frac{1}{x}} - 5^{\frac{-1}{x}})}{\log_2(1 + x^{-2} + x^{-3})}$$

Rješenje. Koristit ćemo $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$. Primijetimo naprije da je limes u pitanju jednak limesu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos^3 x}(3^x - 5^{-x})}{\log_2(1 + x^2 + x^3)}$$

te sada obrađujemo izraze kako slijedi

$$\sqrt{1-\cos^3 x} = \sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x} = x\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}\sqrt{1+\cos x+\cos^2 x}$$

Primijetimo da prva jednakost vrijedi jer je $1-\cos^3 x$ razlika kubova, a da desno prvi i drugi faktor teže u $\sqrt{1/2}$ i $\sqrt{3}$ redom kad x teži u 0. Nadalje je

$$3^x - 5^{-x} = 5^{-x}(15^x - 1)$$

i 5^{-x} teži u 1 kad x teži u 0. Još je

$$\log_2(1 + x^2 + x^3) = \frac{\ln(1 + x^2 + x^3)}{\ln 2} = \frac{\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^2+x^3}}{\frac{\ln 2}{x^2+x^3}}$$

Pritom brojnik teži u 1 kad x teži u 0. Stoga je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos^3 x}(3^x - 5^{-x})}{\log_2(1 + x^2 + x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\ \ln 2\ x(15^x - 1)}{x^2 + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\ \ln 2\ (15^x - 1)}{x + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\ \ln 2}{x+1} \lim_{x\to 0} \frac{15^x - 1}{x} = \sqrt{\frac{3}{2}}\ \ln 2 \ln 15$$

Zadatak 6. (MA1, 2. kolokvij, 2015./2016.) Infimum i supremum skupa

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ \frac{2mn + 3n + 4m + 2}{2m - mn + 2 - n} :\ m, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \mathrm{ctg}(\sin x) :\ x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{3} \right\rangle \right\}$$

Rješenje. Obratimo pažnju najprije na S_2. Kako je na tom intervalu ctg padajuća funkcija, a sin rastuća, slijedi da je ctg $\circ$ sin padajuća. Kad $x \to 0$ izraz teži u beskonačnost pa ni S_2 ni S nemaju supremum, dok S_2 dobiva infimum za $x \to \frac{\pi}{3}$ i iznosi ctg $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0$. Gledajmo sada S_1. Nazivnik možemo faktorizirati kao $(2-n)(m+1)$. Brojnik ne možemo potpuno faktorizirati, ali možemo ga zapisati kao zbroj i izraz rastaviti kao zbroj više razlomaka koji se mogu kratiti s nazivnikom. Mogućnost je $2(n+2)(m+1) + (n-2)$. Onda je

$$\frac{2mn + 3n + 4m + 2}{2m - mn + 2 - n} = \frac{2(n+2)(m+1) + (n-2)}{(2-n)(m+1)} = 2\frac{n+2}{2-n} - \frac{1}{m+1} = -2\frac{n+2}{n-2} - \frac{1}{m+1} =$$

$$= -2\left(\frac{n-2}{n-2} + \frac{4}{n-2}\right) - \frac{1}{m+1} = -2 - \frac{8}{n-2} - \frac{1}{m+1}$$

Tu nam preostaje samo naći infimum obzirom da već znamo da S nema supremum. To je lako odrediti obzirom da imamo dva nezavisna i jednostavna izraza. Vrijedi $\frac{1}{m+1} \le \frac{1}{2}$ i $\frac{8}{n-2} \le 8$ za $m, n \in \mathbb{N}$. Stoga je $\inf S_1 = -2 - 8 - \frac{1}{2} = -\frac{21}{2} = \inf S$.

Zadatak 7. (MA1, 2. kolokvij, 2016./2017.) Infimum i supremum skupa

$$S = \left\{3\ln n - \ln(m^2 + 2m + 4n^3) : \ m, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Rješenje. Izraz se sastoji od dva međusobno zavisna izraza. Koristimo se poznatim identitetima s cijem pojednostavljenja.

$$3\ln n - \ln(m^2 + 2m + 4n^3) = \ln n^3 - \ln(m^2 + 2m + 4n^3) = \ln\frac{n^3}{m^2 + 2m + 4n^3}$$

Kako je ln rastuća funkcija, možemo naći infimum i supremum razlomka pa dobiti infimum i supremum od S primjenom ln. Razlomak može biti proizvoljno blizu 0 (n konst., $m \to +\infty$) pa je njegov ln proizvoljno mali i S nema infimum. Supremum razlomka postiže se sigurno za minimalni $m = 1$ čime imamo $\frac{1}{4} > \frac{n^3}{3+4n^3} \to \frac{1}{4}$ za $n \to +\infty$. Dakle, $\sup S = \ln \frac{1}{4}$.

Zadatak 8. (MA1, 2. kolokvij, 2007./2008.) Infimum i supremum skupa

$$S = \left\{\frac{12m + n - 3mn + 7}{5m - 2n - 2mn + 5} : \ m, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Rješenje. Izraz ćemo pomnožiti s 2 i oduzeti mu 3 tako da novi razlomak u brojniku nema mn-član. Označimo li izraz iz zadatka s $I(m, n)$ je

$$2I(m, n) - 3 = \frac{9m + 8n - 1}{5m - 2n - 2mn + 5}$$

Radi jednostavnosti uvedimo supstituciju $a = m+1$ i $b = 5-2n$. Primijetimo $a \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ i $b \in \{3, 1, -1, -3, -5, \ldots\}$. Tada nazivnik postaje ab, a brojnik $9a - 4b + 10$. Imamo

$$2I(m, n) - 3 = \frac{9a - 4b + 10}{ab} = \frac{9}{b} - \frac{4}{a} + \frac{10}{ab} = \left(\frac{1}{b} - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{10}{a} + 9\right) + \frac{18}{5}$$

Sada nije teško ustanoviti da su infimum i supremum (a i minimum i maksimum) od $2I - 3$ redom -16 i 15. Infimum i supremum od I to jest skupa S su redom $\frac{-16+3}{2} = \frac{-13}{2}$ i $\frac{15+3}{2} = 9$.

Zadatak 9. (MA1, 2. kolokvij, 2012./2013.) Niz $(b_n)_n$ dan je s

$$b_1 = \frac{1}{3}, \quad 3b_{n+1} = b_1 b_2 \ldots b_n + 2$$

Dokažite da je $b_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, da je niz $(b_n)_n$ konvergentan i odredite mu limes.

Rješenje. Da je $b_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dokazujemo jakom indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $b_k < 1$ za sve $k \leq n$. Onda je i

$$b_{n+1} = \frac{b_1 \ldots b_n + 2}{3} < \frac{1+2}{3} = 1.$$

Očito je da su svi članovi niza pozitivni (to bismo formalno također dokazali indukcijom). Stoga je niz omeđen odozdo pa preostaje još dokazati da monotono opada da bismo dokazali da je konvergentan. To slijedi iz $b_n < 1$ jer

$$b_{n+2} - b_{n+1} = \frac{1}{3}\left(b_1 \ldots b_{n+1} - b_1 \ldots b_n\right) = \frac{1}{3} b_1 \ldots b_n (b_{n+1} - 1) < 0$$

i time je tvrdnja dokazana. Primijetimo da smo dokazali i jaču tvrdnju u vidu $b_n \leq \frac{7}{9}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Stoga postoji limes $\lim_{n\to\infty} b_1 \ldots b_n$ obzirom da je

$$0 \leq b_1 \ldots b_n \leq \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

pa je po teoremu o sendviču $\lim_{n\to\infty} b_1 \ldots b_n = 0$. Neka je L limes niza. U početnoj jednakosti možemo pustiti limes da dobijemo

$$3L = \lim_{n\to\infty} b_1 \ldots b_n + 2 = 2$$

pa je $L = \frac{2}{3}$.

Komentar. Zadatak je moguće riješiti i pomoću alternativne rekurzivne relacije. Naime,

$$3b_{n+1} = (b_1 \ldots b_{n-1}) b_n + 2 = (3b_n - 2) b_n + 2 = 3b_n^2 - 2b_n + 2$$

Zadatak 10. (MA2, 1. kolokvij, 2015./2016.) Neka je $a \in \mathbb{R}$ i $f : \mathbb{R}\backslash\{0\}$ funkcija dana s

$$f(x) = x^a \text{arctg} \frac{1}{x}$$

Dodefinirajte funkciju u 0 tako da bude klase C^1 za barem jedan a i nađite sve a takve da je f klase C^1.

Rješenje. Neka je f_a ta funkcija za određeni a. Primijetimo da, obzirom da f_a želimo tom formulom definirati na cijelom $\mathbb{R}$ ima smisla jedino gledati cijele a. Odmah vidimo da f_0 nije ni neprekidna pa nije ni klase C^1 obzirom da

$$\lim_{x\to 0-} \text{arctg} \frac{1}{x} = \frac{-\pi}{2}$$

dok je

$$\lim_{x\to 0+} \text{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

pa limes $\lim_{x\to 0} f_0(x)$ ne postoji. Slično, za $a < 0$ je $\lim_{x\to 0-} f_a(x) = -\infty$ i $\lim_{x\to 0+} f_a(x) = +\infty$ pa ni u tom slučaju nema rješenja. Nadalje neka je $a \geq 1$. Sada poučeni gornjim činjenicama lako dobivano $\lim_{x\to 0} f_a(x) = 0$ pa, da bi bila neprekidna, f_a u nuli dodefiniramo s $f_a(0) = 0$. Funkcija f_a je derivabilna na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ jer je produkt derivabilinih ili kompozicija na tom skupu derivabilnih funkcija. Preostaje provjeriti da je derivabilna i u nuli.

$$f_a'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{a-1} \text{arctg} \frac{1}{x}$$

Taj limes ne postoji za $a = 1$ kako smo gore pokazali pa to nije rješenje. Za $a > 1$ taj limes očito iznosi 0. Da bi bila f_a klase C^1 dodatno mora biti i f_a' neprekidna. Ona je neprekidna na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ jer je na tom skupu f_a štoviše klase C^∞. Preostaje provjeriti neprekidnost derivacije u nuli tj. da je

$$0 = f_a'(0) = \lim_{x\to 0} f_a'(x) = \lim_{x\to 0} \left(a x^{a-1} \text{arctg} \frac{1}{x} + \frac{x^a}{1 + x^2} \right)$$

što očito vrijedi za $a > 1$. Dakle, jedina moguća dodefinicija u nuli je s nulom, a traženi a su svi oni cijeli brojevi strogo veći od 1.

Zadatak 11. (MA2, 1. kolokvij, 2015./2016.) Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna strogo konveksna funkcija klase $C^2([a, b])$ takva da je $f(a)f(b) < 0$. Tada f ima jedinstvenu nultočku.

Rješenje. Kako su $f(a)$ i $f(b)$ različitog predznaka, funkcija ima nultočku po Bolzano-Weierstrassovom teoremu. Dokažimo još da je jedinstvena. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje realni c i d sa $a < c < d < b$ i da je $f(c) = f(d) = 0$. Tada po Rolleovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\xi \in \langle c, d\rangle$ sa $f'(\xi) = 0$. Kako je f strogo konveksna je f' strogo rastuća, što znači stoga da je $f'(x) < 0$ za sve $x < \xi$ i $f'(x) > 0$ za sve $x > \xi$, to jest da f pada lijevo, a raste desno od ξ. No onda je $f(a) > f(c) = 0$ i $f(b) > f(d) = 0$, odnosno $f(a)f(b) > 0$ u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, nultočka postoji i jedinstvena je.

Zadatak 12. (MA2, 1. kolokvij, 2014./2015.) Dana je $f(x) = \sin(x^2 - 2x + 2)$. Koliko je $f^{(41)}(1)$?

Rješenje. Primijetimo da je $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$ pa slično kao u prvom zadatku možemo radije gledati $g(x) = \sin(x^2 + 1)$ i tražimo $g^{(41)}(0)$. Neka je $h(x) = g'(x) = 2x\cos(x^2 + 1)$, $s(x) = \sin(x^2 + 1)$ i $c(x) = \cos(x^2 + 1)$. Po Leibnitzovoj formuli je

$$h^{(40)}(0) = 2 \cdot 40 \cdot 1 \cdot c^{(39)}(0) = 80 \cdot (-2xs^{(38)}(0)) = *$$

Opet je po Leibnitzovoj formuli

$$(2xs)^{(38)}(0) = 2 \cdot 38 \cdot s^{(37)}(0) = 76 \cdot ((2xc)^{(36)}(0)) = 76h^{(36)}(0)$$

i stoga

$$* = -80 \cdot 76 \cdot h^{(36)}(0)$$

Vidimo da ćemo iteracijom toga postupka dobiti izraz oblika $h^{(40)}(0) = Ch^{(0)}(0) = Ch(0)$ te kako je $h(0) = 0$ imamo konačno rješenje u vidu

$$g^{(41)}(0) = h^{(40)}(0) = 0$$

Zadatak 13. U elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2$ upisati pravokutnik najveće moguće površine.

Rješenje 1. Prepostavimo da taj pravokutnik u prvom kvadrantu ima vrh (x, y). Njegovi ostali vrhovi su $(-x, y)$, $(-x, -y)$ i $(x, -y)$. Stoga su njegove stranice duljina $2x$ i $2y$ pa treba maksimizirati površinu $4xy$ gdje je (x, y) u prvom kvadrantu i na elipsi. Za (x,y) na elipsi u prvom (a i drugom) kvadrantu vrijedi $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ pa ustvari maksimiziramo $4bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ što je funkcija jedne varijable. Njena derivacija je (pravilo produkta)

$$2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + 2bx\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\frac{-2x}{a^2} = \frac{4b}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{2x^2}{a^2}\right)$$

pa ima nultočku u $x = a/\sqrt{2}$ te je u toj točki maksimum funkcije obzirom da minimuma nema $(x \to a)$. Dobivamo onda da je $y = b/\sqrt{2}$ i da je površina $2ab$.

Rješenje 2. Poznato nam je da jediničnu kružnicu možemo parametrizirati s $(\cos t, \sin t)$ za $t \in [0, 2\pi]$ to jest da je svaka točka na kružnici oblika $(\cos t, \sin t)$ za neki $t \in [0, 2\pi]$. Slično, elipsu možemo parametrizirati s $(a\cos t, b\sin t)$. Kako je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ slijedi da je za (x,y) na elispi točka $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ na jediničnoj kružnici.
Dakle, vrh pravokutnika u prvom kvadrantu je oblika $(a\cos t, b\sin t)$ za $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a ostali $(-a\cos t, b\sin t)$, $(-a\cos t, -b\sin t)$ i $(a\cos t, -b\sin t)$. Stranice pravokutnika su duljina $2\cos t$ i $2\sin t$ pa mu je površina $4ab\sin t\cos t = 2ab\sin 2t$. Taj izraz ima maksimum $2ab$ kad je $\sin 2t = 1$, odnosno $t = \frac{\pi}{4}$. Time smo odredili sve što je trebalo.

Zadatak 14. (MA2, 1. kolokvij, 2013./2014.) Nađite sve realne trojke (a,b,c) takve da je funkcija definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{za } x < 0, \\ ax^2 + bx + c & \text{za } x \geq 0, \end{cases}$$

konkavna na cijelom $\mathbb{R}$.

Rješenje. Neka su a, b i c realni brojevi i pretpostavimo da je f definirana kao u tekstu zadatka konkavna na cijelom $\mathbb{R}$. Tada je ona posebice konkavna na $[0, \infty\rangle$ gdje ima drugu (i više) derivacije. Onda vrijedi $2a = f''(x) \leq 0$ za $x \geq 0$ tj. $a < 0$. Zbog konkavnosti za $x > 0$ vrijedi

$$f(0) = f\left(\frac{x+(-x)}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \text{ tj. } f(x) \leq 2f(0) - f(-x) = 2f(0) + 1$$

gdje puštanjem $x \to 0$ imamo $f(0) \geq -1$. Dokazat ćemo štoviše, da vrijedi jednakost. Ako je $f(0) > -1$ je, za $x > 0$,

$$-1 = f\left(\frac{-x}{2}\right) \geq \frac{f(-x)+f(0)}{2} > \frac{-1+(-1)}{2} = -1$$

pa je $c = f(0) = -1$. Sada iz prijašnje nejednakosti $f(x) \leq 2f(0) + 1 = -1$ iz čega zaključujemo da se x-koordinata tjemena parabole $y = ax^2 + bx - 1$ nalazi u 0 ili lijevo od 0. Kako ona iznosi $\frac{-b}{2a}$ i $a < 0$, to je ustvari ekvivalentno s $b \leq 0$. Dokažimo da su ti uvjeti dovoljni. Treba dokazati

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

To je trivijalno za x_1 i x_2 istog predznaka pa pretpostavimo bez smanjenja općenitosti $x_1 < 0$ i $x_2 \geq 0$. Vrijednost slijeva ovisi o predznaku od $x_1 + x_2$ pa razlikujemo dva slučaja. Prvo, za $x_1 + x_2 < 0$ dobivamo $0 \geq \frac{ax_2^2+bx_2}{2}$ što vrijedi obzirom da su pribrojnici zdesna nepozitivni. U drugom slučaju, $x_1 + x_2 \geq 0$ tj. $|x_2| \geq |x_1|$ raspisivanjem dobivamo da je izraz ekvivalentan s $a(x_1^2 - ax_2^2) + 2x_1(ax_2 + b) \geq 0$. To opet vrijedi zbog $a, x_1^2 - x_2^2, x_1, ax_2, b \leq 0$. Dakle, tražene trojke su oblika $(a, b, -1)$ gdje je $a < 0$ i $b \leq 0$.

Zadatak 15. (MA2, 1. kolokvij, 2013./2014.) Neka je $\mathcal{A}$ skup dvaput derivabilnih funkcija $f : \langle -1, 1\rangle \to \langle 0, \infty\rangle$ takvih da je $f(0) = f'(0) = 1$ i da je $g(x) = \sqrt{f(x)}$ konveksna na $\langle -1, 1\rangle$. Koji je infimum skupa $\{f''(0) : \ f \in \mathcal{A}\}$ i je li on ujedno minimum?

Rješenje. Funkcija g je isto dvaput derivabilna pa je njena konveksnost ekvivalentna s $g''(x) \geq 0$, $\forall x \in \langle -1, 1\rangle$. Računamo:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$g''(x) = \frac{2f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{4f(x)\sqrt{f(x)}}$$

pa je uvjet konveksnosti g ekvivalentan s $2f''(x)f(x) \geq [f'(x)]^2$. Uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo $f''(0) \geq \frac{1}{2}$. Ta se vrijednost postiže pa je i infimum i minimum skupa $\{f''(0) : \ f \in \mathcal{A}\}$. Neka je $h(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$. Lako je provjeriti da je $h \in \mathcal{A}$ i da je $h''(0) = \frac{1}{2}$.

Komentar. Za riješiti zadatak svakako trebamo odrediti barem neke funkcije iz $\mathcal{A}$. Uvjet $f(0) = f'(0) = 1$ nam govori da je $f(x) \approx x + 1$ kad je $x \approx 0$. Primjer takve funkcije je sama $x + 1$, no funkcija $\sqrt{x+1}$ je konkavna. Dalje možemo pokušati sa polinomima višeg stupnja, najprije drugog, koji su u 0 najbolje linearno aproksimirani s $x+1$. Oni su oblika $ax^2 + x + 1$. Pomoću prijašnje karakterizacije, lako se pokaže da je $\sqrt{ax^2 + x + 1}$ konveksna ako i samo ako je $a \geq \frac{1}{4}$. Druga derivacija tog polinoma je $2a$ pa smo s $a = \frac{1}{4}$ uspjeli naći odgovarajući primjer.

Zadatak 16. (MA2, 2. kolokvij, 2016./2017.) Ako konvergira, odredite vrijednost nepravog integrala

$$\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

Rješenje. Na $[0, \frac{\pi}{2}]$ vrijedi $x \geq \sin x$ to jest $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x}$. Kako integral

$$\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

ne konvergira, po poznatom kriteriju zaključujemo da ne konvergira ni integral iz teksta zadatka.

Zadatak 17. (MA2, 2. kolokvij, 2016./2017.) Ako konvergira, odredite vrijednost nepravog integrala

$$\int_{0\leftarrow}^{\to\frac{\pi}{2}} (\ln\cos x - \ln\sin x)\ \mathrm{d}x$$

Rješenje. Prvo primijetimo da je $\ln\cos x - \ln\sin x = \ln\frac{\cos x}{\sin x} = \ln\operatorname{ctg} x$. Po definiciji, integral iz teksta zadatka postoji ako za neki (i svaki) $c \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ konvergiraju nepravi integrali

$$\int_{0\leftarrow}^{c} (\ln\operatorname{ctg} x)\ \mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \int_{c}^{\to\frac{\pi}{2}} (\ln\operatorname{ctg} x)\ \mathrm{d}x$$

te je tada

$$\int_{0\leftarrow}^{\to\frac{\pi}{2}} (\ln\operatorname{ctg} x)\ \mathrm{d}x = \int_{0\leftarrow}^{c} (\ln\operatorname{ctg} x)\ \mathrm{d}x + \int_{c}^{\to\frac{\pi}{2}} (\ln\operatorname{ctg} x)\ \mathrm{d}x$$

Uzet ćemo $c = \frac{\pi}{4}$. Metodom parcijalne integracije je

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} (\ln\operatorname{ctg} x)\ \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \ln\operatorname{ctg} x & dv = 1 \\ du = \frac{-2}{\sin 2x} & v = x \end{pmatrix} = x\ln\operatorname{ctg} x\Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x}{\sin 2x}\mathrm{d}x$$

Dokažimo da desna strana ima limes kad $\varepsilon \to 0$. Znamo da je funkcija $\frac{2x}{\sin 2x}$ omeđena na $[0, \frac{\pi}{4}]$ pa je i integrabilna na tom segmentu. Još vrijedi

$$|\varepsilon\ln\operatorname{ctg}\varepsilon| \leq |\varepsilon|\ |\operatorname{ctg}\varepsilon| = \frac{|\varepsilon|}{|\sin\varepsilon|} \cdot |\cos\varepsilon| \to 1 \cdot 1 = 1$$

kad $\varepsilon \to 0-$. Zaključujemo da

$$\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{4}} (\ln\operatorname{ctg} x)\ \mathrm{d}x$$

konvergira. Zato što je $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ je $\sin(\frac{\pi}{4} + x) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ i $\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$. Kombinacijom je $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} + x)\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - x) = 1$ pa i

$$\ln\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} + x) = -\ln\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - x)$$

Stoga je

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\to\frac{\pi}{2}} (\ln\operatorname{ctg} x)\ \mathrm{d}x = -\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{4}} (\ln\operatorname{ctg} x)\ \mathrm{d}x$$

i

$$\int_{0\leftarrow}^{\to\frac{\pi}{2}} (\ln\operatorname{ctg} x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Zadatak 18. (MA2, 2. kolokvij, 2016./2017.) Razvijte u Taylorov red oko točke $c = -1$ funkciju

$$f(x) = \ln[(3x+4)^{(x+2)}]$$

i odredite radijus konvergencije.

Rješenje. Pitanje je analogno razvoju oko $c = 0$ funkcije $f(x-1) = \ln[(3x+1)^{(x+1)}] = (x+1)\ln(3x+1)$. Vrijedi

$$\ln(3x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad |x| < \frac{1}{3}$$

pa je

$$f(x-1) = (x+1)\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ldots = 3x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^n(3-2n)}{3n(n-1)}x^n, \quad |x| < \frac{1}{3}$$

odnosno

$$f(x) = 3(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^n(3-2n)}{3n(n-1)}(x+1)^n, \quad |x+1| < \frac{1}{3}$$

Zadatak 19. (MA2, 2. kolokvij, 2014./2015.) Razvijte u Taylorov red oko točke $c = 2$ funkciju

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} + e^x$$

i odredite radijus konvergencije.

Rješenje. Pitanje je analogno razvoju oko $c = 0$ funkcije $f(x+2) = \frac{1}{(3+x)^2} + e^{x+2}$. Vrijedi

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

Deriviranjem je

$$\frac{-1}{(1+x^2)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n, \quad |x| < 1$$

Stoga

$$\frac{1}{(3+x)^2} = \frac{1}{9}\frac{1}{(1+\frac{x}{3})^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^n}{3^{n+2}}, \quad |x| < 3$$

te je

$$e^{x+2} = e^2 e^x = e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2 x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

pa je

$$f(x+2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+1}} + \frac{e^2}{n!}\right)x^n, \quad |x| < 3$$

odnosno

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+1}} + \frac{e^2}{n!}\right)(x-2)^n, \quad |x-2| < 3$$

Zadatak 20. (MA2, 2. kolokvij, 2014./2015.) Izračunajmo sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2^{n/2}}$$

Rješenje. Vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2^{n/2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1+1}{2^{(2n-1)/2}} - \frac{2n+1}{2^{2n/2}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\sqrt{2}}{2^n} - \frac{2n+1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(\sqrt{2}-1)-1}{2^n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n} + 2(\sqrt{2}-1)\sum_{n=1}^{\infty}n2^{-n} = -1 + 4(\sqrt{2}-1) = 4\sqrt{2} - 5$$

gdje pretposljednju jednakost dobivamo iz poznate

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n} = 1$$

iz čega dobivamo i

$$4 = 2 \cdot 2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)2^{-n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n} \implies \sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n} = 2$$

Zadatak 21. (MA2, 2. kolokvij, 2013./2014.) Razvijte u Taylorov red oko $c = 1$ funkciju $f(x) = x\ln(2-x)$.

Rješenje. Pitanje je analogno razvoju oko $c = 0$ funckije $f(x+1) = (x+1)\ln(1-x)$. Vrijedi

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

pa je

$$f(x+1) = (x+1)\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-2n}{n(n-1)} x^n, \quad |x| < 1$$

odnosno

$$f(x) = -(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-2n}{n(n-1)}(x-1)^n, \quad |x-1| < 1.$$

Zadatak 22. (MA2, 2. kolokvij, 2013./2014.) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}$$

Rješenje. Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n!)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} - 1 \right) = \frac{\cos 2 - 1}{2}.$$

Zadatak 23. (MA2, 2.kolokvij, 2011./2012.) Ispitajte apsolutnu i uvjetnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Rješenje. Dokazat ćemo da red konvergira apsolutno pa konvergira i uvjetno. Prvo primijetimo da je $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln \ln n \cdot \ln n} = n^{\ln \ln n}$. Kako $\ln \ln n \to \infty$ kad $n \to \infty$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da

$$n \geq N \implies \ln \ln n > 2$$

to jest

$$n \geq N \implies \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$$

Onda je

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

pa kako znamo da red zdesna konvergira, po usporednom kriteriju konvergira i red slijeva.

Zadatak 24. (MA2, 2. kolokvij, 2011./2012.) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)\operatorname{Arsh} n}}$$

Rješenje. Vrijedi Arsh $n = \ln(n + \sqrt{n^2+1})$. Intuitivno je jasno i lako se pokaže da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$n \geq N \implies \sqrt{n^2+1} < 2n$$

i

$$n \geq N \implies \sqrt{\ln 3n} < \ln n$$

iz čega slijedi

$$n \geq N \implies \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)\text{Arsh } n}} > \frac{1}{n \ln n \sqrt{2}}$$

Dokažemo li da red

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

divergira, po usporednom kriteriju divergira i traženi red. To je doista tako po Cauchyjevom integralnom kriteriju. Naime, red $\sum \frac{1}{n \ln n}$ konvergira ako i samo ako konvergira nepravi integral

$$\int_N^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

no kako je $(\ln \ln x)' = \frac{1}{x \ln x}$, a $\ln \circ \ln$ neograničena funkcija on ne konvergira.

Zadatak 25. (MA2, 2. kolokvij, 2010./2011.) Nađite sve $\alpha \in \mathbb{R}$ takve da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$

konvergira.

Rješenje. Dokazat ćemo da red konvergira za $\alpha > \frac{1}{2}$ i divergira inače. Lako se dokaže da je $0 \leq n \sin \frac{1}{n} \leq 1$ pa $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \geq 1$ za $\alpha \leq 0$. Stoga red $\sum \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ ne konvergira za $\alpha \leq 0$. Nadalje taylorovskim aproksimacijama imamo

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{120n^5} \geq \sin \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}$$

odnosno

$$\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{120n^4} \leq 1 - n \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6n^2}$$

s tim da je još

$$\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{120n^4} \geq \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{120n^2} = \frac{19}{120n^2}$$

Poznato nam je da red $\sum n^{-\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $\alpha \leq 1$. Kako je

$$1 - n \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6n^2}$$

i $\sum 6^{\alpha} n^{-2\alpha}$ konvergira za $\alpha > \frac{1}{2}$, zaključujemo po usporednom kriteriju da i $\sum \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ konvergira za $\alpha > \frac{1}{2}$. Kako je

$$1 - n \sin \frac{1}{n} \geq \frac{19}{120n^2}$$

i $\sum \left(\frac{19}{120}\right)^{\alpha} n^{-2\alpha}$ divergira za $\alpha \leq \frac{1}{2}$, po usporednom kriteriju zaključujemo da i $\sum \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ divergira za $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Zadatak 26. (MA2, 2. kolokvij, 2010./2011.) Ispitajte apsolutnu i uvjetnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-H_n}$$

gdje je $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $n-$ti harmonijski broj.

Rješenje. Ocijenimo $n-$ti harmonijski broj H_n pomoću integrala. Gledajmo funkciju $\frac{1}{x}$ na segmentu $[1, n]$. Određeni integral na tom segmentu je

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln n - \ln 1 = \ln n$$

te se nalazi između donje i gornje Darbouxove sume, to jest

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

ili

$$H_n - 1 \leq \ln n \leq H_n - \frac{1}{n}$$

otkud zaključujemo

$$-H_n \geq 1 - \ln n \implies e^{-H_n} \geq e^{1-\ln n} = \frac{e}{n}$$

Kako red $\sum \frac{e}{n}$ divergira po usporednom kriteriju divergira i red $\sum e^{-H_n}$. Dakle, red $\sum (-1)^n e^{-H_n}$ ne konvergira apsolutno, no lako se vidi da po Leibnitzovom kriteriju konvergira uvjetno.

Komentar. Izraz $H_n - \ln n$ konvergira u tzv. Euler-Mascheronijevu konstantu $\gamma \approx 0.5772156649$.