Skupovi brojeva i polinomi

Slike i praslike intervala

Zadatak. Neka je f polinom stupnja 1 ili 2. Dokažite da je slika zatvorenog segmenta po f i sama zatvoren segment. Pokušajte pokazati ovo i za polinome višeg stupnja.

Zadatak. Nađite nekoliko (proizvoljnih!) funkcija f za koje postoji segment $[a, b]$ takav da $f([a, b])$ nije zatvoreni segment. Što primjećujete?

Zadatak. Pokažite primjerom da slika $f(\langle a, b\rangle)$ otvorenog intervala $\langle a, b\rangle$ nije nužno otvoren interval, čak ni u slučaju da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom.

Zadatak. Neka je f polinom. Dokažite da je praslika otvorenog intervala jednaka praznom skupu ili uniji otvorenih intervala. Drugim riječima, skup oblika $f^{-1}(\langle a, b\rangle)$ je jednak (moguće praznoj) uniji otvorenih intervala.

Napomena. Svojstvo iz zadnjeg zadatka ("praslika otvoreng intervala je unija otvorenih intervala") je ekvivalentno definiciji neprekidnosti.

Algebarski i transcendentni brojevi

Definicija. Za skup S kažemo da je prebrojiv ako postoji bijekcija $S \to \mathbb{N}$.

Teorem. *(Cantor)* Skup realnih brojeva je neprebrojiv.

Definicija. Kažemo da je broj $\alpha \in \mathbb{R}$ **algebarski** ako postoji polinom p s cjelobrojnim koeficijentima takav da vrijedi $p(\alpha) = 0$. U suprotnom, kažemo da je α **transcendentan**.

Zadatak. Dokažite da transcendentni brojevi postoje.

Hint: "Koliko" ima algebarskih brojeva?

Zadatak. Dokažite da se u svakom otvorenom intervalu nalaze barem jedan algebarski i barem jedan transcendentni broj.

Napomena. Kao što pokazuju prethodni zadaci, transcendentnih brojeva ima mnogo. No, još uvijek nismo uspjeli odrediti niti jedan konkretan primjer transcendentnog broja. Konstante π i e su vjerojatno najpoznatiji primjeri transcendentnih brojeva, no za dokaz ove činjenice ćemo trebati (barem) gradivo kolegija MA2.

Definicija. Za broj $x \in \mathbb{R}$ kažemo da je Liouvilleov ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje $p, q \in \mathbb{N}, q > 1$ takvi da vrijedi

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

Zadatak. Dokažite da je svaki Liouvilleov broj iracionalan.

Napomena.

i) Iz definicije nije očito da Liouvilleovi brojevi postoje. U drugom semestru (nakon upoznavanja s osnovnim činjenicama o redovima) moći ćemo ih relativno lako konstruirati. Grubo rečeno, ako na "dovoljno rijetka" mjesta u decimalnom zapisu stavimo ne-nul znamenke, dobit ćemo Liuvilleov broj. Primjerice, konstanta

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

je Liouvilleov broj.

ii) Pokazuje se da su svi Liouvilleovi brojevi transcendentni. Za dokaz ove činjenice koristi se Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, stoga ga ostavljamo za drugi semestar.