Kolegij *Studentska natjecanja iz matematike*, ak. god. 2020./2021.
https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/snim_a

Tema br. 9:

Kvaternioni i Frobeniusov teorem

Ilja Gogić, 2. 6. 2021.

1 Uvod

Osnovni cilj ovog predavanja je obraditi osnove teorije konačnodimenzionalnih algebri s dijeljenjem, uvesti algebru (Hamiltonovih) kvaterniona $\mathbb{H}$, te dokazati sljedeći fundamentalni teorem:

Teorem 1.1 (**Frobeniusov teorem, 1877.**). *Do na izomorfizam postoje točno tri konačnodimenzionalne realne algebre s dijeljenjem: realni brojevi $\mathbb{R}$, kompleksni brojevi $\mathbb{C}$ i kvaternioni $\mathbb{H}$.*

Tokom čitavog ovog predavanja $\mathbb{F}$ će označavati polje. Kod nas će $\mathbb{F}$ uglavnom biti polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Ako je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, tada skup svih $\mathbb{F}$-linearnih operatora s V u V označavamo s $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Dakle, $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ sa sastoji od svih preslikavanja $\phi : V \to V$ koja zadovoljavaju

$$\phi(\lambda v + \mu w) = \lambda\phi(v) + \mu\phi(w)$$

za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ te $v, w \in V$.

Ako je vektorski prostor V konačnodimenzionalan, njegovu dimenziju označavamo s $\dim_{\mathbb{F}} V$.

2 Algebre

Definicija 2.1. Za vektorski prostor A nad poljem $\mathbb{F}$ kažemo da je **(asocijativna) algebra**, ako je na A zadana operacija **množenja**, odnosno asocijativna bilinearna binarna operacija

$$A \times A \to A, \qquad (a, b) \mapsto ab.$$

Drugim riječima, vrijedi

$$(ab)c = a(bc), \qquad (\lambda a + \mu b)c = \lambda(ac) + \mu(bc) \qquad \text{i} \qquad a(\lambda b + \mu c) = \lambda(ab) + \mu(ac)$$

za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ te $a, b, c \in A$. Također ćemo podrazumijevati da A ima **jedinicu**, tj. da postoji element $1_A \in A \setminus \{0\}$ sa svojstvom

$$1_A a = a 1_A = a$$

za sve $a \in A$.

Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ onda govorimo o **realnim algebrama**, a ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ onda govorimo o **kompleksnim algebrama**.

Napomena 2.2. Primijetimo da je jedinica algebre nužno jedinstvena. Kada je iz konteksta jasno o kojoj algebri A jer riječ, često ćemo umjesto 1_A pisati samo 1.

Primjer 2.3. (a) Svako polje $\mathbb{F}$ možemo promatrati kao algebru nad samim sobom, tj. operacija množenja skalarom $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ je definirana kao množenje elemenata u $\mathbb{F}$.

(b) Općenitije, ako je $\mathbb{K}$ potpolje od $\mathbb{F}$, onda $\mathbb{F}$ možemo promatrati i kao $\mathbb{K}$-algebru, tj. operacija množenja skalarom je funkcija $\mathbb{K} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. Posebno, polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ možemo promatrati i kao $\mathbb{C}$-algebru (dimenzije 1) i kao $\mathbb{R}$-algebru (dimenzije 2).

(c) Ako je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, tada skup $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ima strukturu algebre s obzirom na standardne operacije na linearnim operatorima:

$$(\lambda\phi)(v) := \lambda(\phi(v)), \quad (\psi + \phi)(v) := \psi(v) + \phi(v) \quad \text{i} \quad (\psi\phi)(v) := \psi(\phi(v)),$$

gdje su $\phi, \psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, $v \in V$ te $\lambda \in \mathbb{F}$. Jedinica u algebri $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ je jedinični operator.

(d) Neka je A algebra nad poljem $\mathbb{F}$. Promotrimo skup $M_n(A)$ svih $n \times n$ matrica s elementima u A. Tada je $M_n(A)$ algebra s obzirom na standardne matrične operacije:

$$\lambda[a_{ij}] := [\lambda a_{ij}], \qquad [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}], \qquad [a_{ij}][b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right],$$

gdje su $\lambda \in \mathbb{F}$ te $[a_{ij}], [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$). Jedinica u algebri $M_n(\mathbb{F})$ je jedinična matrica $I = \operatorname{diag}(1_A, \ldots, 1_A)$, odnosno dijagonalna matrica čiji su svi elementi na dijagonali jednaki 1_A. Posebno, $M_n(\mathbb{F})$ je algebra.

Definicija 2.4. Neka je A algebra. Za element $a \in A$ kažemo da je **invertibilan** ako postoji element $a^{-1} \in A$ takav da je

$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1.$$

Element a^{-1}, ako postoji, je jedinstven i zovemo ga **inverz** od a.

Definicija 2.5. Podskup B algebre A zove se **podalgebra** od A ako B sadrži jedinicu od A i B je algebra s obzirom na operacije koje su definirane kao restrikcije operacija algebre A.

Napomena 2.6. (a) Primijetimo da je podskup B od A podalgebra od A ako i samo ako je B potprostor od A, $1_A \in B$ i B je zatvoren s obzirom na operaciju množenja, tj. vrijedi $ab \in B$ za sve $a, b \in B$.

(b) Skup $\mathbb{F}1_A = \{\lambda 1_A : \lambda \in \mathbb{F}\}$ je podalgebra od A dimenzije 1. Nju ćemo obično poistovjetiti s poljem $\mathbb{F}$, preko identifikacije $\lambda \longleftrightarrow \lambda 1_A$ $(\lambda \in \mathbb{F})$, tako da je $\mathbb{F} \subseteq A$.

Definicija 2.7. Neka je A algebra.

(a) Za elemente $a, b \in A$ definiramo njihov **komutator** s $[a, b] := ab - ba$.

(b) Ako je $[a, b] = 0$, odnosno ako vrijedi $ab = ba$, kažemo da a i b **komutiraju**.

(c) Skup svih elemenata u A koji komutiraju sa svim elementima u A zove se **centar** od A i označava sa $Z(A)$. Dakle,

$$Z(A) = \{z \in A : za = az \ \forall a \in A\}.$$

Napomena 2.8. Primijetimo da je $Z(A)$ podalgebra od A dimenzije barem 1, budući da $Z(A)$ sadrži $\mathbb{F} = \mathbb{F}1_A$ kao podalgebru.

Zadatak 1. Neka je A algebra koja sadrži polje $\mathbb{K}$ kao podalgebru. Dokažite da A ima strukturu $\mathbb{K}$-algebre (pri čemu je operacija množenja skalarom $\mathbb{K} \times A \to A$ definirana kao množenje elemenata u A) ako i samo ako je polje $\mathbb{K}$ sadržano u centru od A.

Definicija 2.9. Neka je A algebra.

(a) Ako je $A = Z(A)$, tj. ako svaka dva elementa u A komutiraju, onda kažemo da je A **komutativna algebra**.

(b) Ako $Z(A) = \mathbb{F}$, tj. ako jedino skalarni multipli jedinice komutiraju sa svim ostalim elmentima od A, onda kažemo da je A **centralna algebra**.

Primjer 2.10. Algebra kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je očito centralna kao $\mathbb{C}$-algebra, ali ne i kao $\mathbb{R}$-algebra.

Primjer 2.11. Bitan primjer komutativne algebre je algebra polinoma $\mathbb{F}[X]$ u jednoj varijabli X nad poljem $\mathbb{F}$, s obzirom na standardne operacije na polinomima. Jedinica u $\mathbb{F}[X]$ je konstantni polinom 1, a invertibilni elementi u $\mathbb{F}[X]$ su jedino nenul konstantni polinomi.

Zadatak 2. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Dokažite da je algebra A centralna ako i samo ako je matrična algebra $M_n(A)$ centralna.

Definicija 2.12. Neka su su A i B algebre nad istim poljem $\mathbb{F}$.

(a) Za preslikavanje $\phi : A \to B$ kažemo da je **homomorfizam algebri** ako je $\mathbb{F}$-linearno, multiplikativno te jedinicu slika u jedinicu, tj. vrijedi

$$\phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\phi(a) + \mu\phi(b),$$
$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b),$$
$$\phi(1_A) = 1_B,$$

za sve $a, b \in A$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

(b) Injektivni homomorfizmi zovu se **monomorfizmi**, surjektivni homomorfizmi **epimorfizmi**, a bijektivni homomorfizmi **izomorfizmi**. Izomorfizmi $\phi : A \to A$ zovu se **automorfizmi** algebre A.

(c) Za algebre A i B kažemo da su **izomorfne** i pišemo $A \cong B$ ako postoji izomorfizam $\phi : A \to B$.

Napomena 2.13. (a) Izomorfnost algebri je relacija ekvivalencije (na klasi svih $\mathbb{F}$-algebri).

(b) Neka je A algebra. Svaki invertibilni element $q \in A$ inducira tzv. **unutrašnji automorfizam** $\mathrm{Ad}(q)$ od A, dan s
$$\mathrm{Ad}(q)(x) := qxq^{-1}.$$
Unutrašnji automorfizmi su naravno interesantni samo u nekomutativnom slučaju.

(c) Može se pokazati da je svaki automorfizam matrične algebre $M_n(\mathbb{F})$ unutrašnji (posljedica Skolem-Noetherinog teorema[1,2]).

Zadatak 3. (a) Odredite sve automorfizme realne algebre kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

(b) Odredite sve automorfizme realne algebre $\mathbb{C}^2$ s obzirom na operacije po koordinatama:
$$\lambda(\omega_1,\omega_2) := (\lambda\omega_1,\lambda\omega_2), \quad (\omega_1,\omega_2)+(\omega_1',\omega_2') := (\omega_1+\omega_1',\omega_2+\omega_2'), \quad (\omega_1,\omega_2)\dot{}(\omega_1',\omega_2') := (\omega_1\omega_1',\omega_2\omega_2'),$$
gdje su $\lambda \in \mathbb{R}$ te $\omega_1,\omega_2,\omega_1',\omega_2' \in \mathbb{C}$.

Primjer 2.14. Neka je A algebra. Ako je $p \in \mathbb{F}[X]$ polinom s rastavom
$$p = p(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \ldots + \lambda_n X^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k,$$
tada za element $a \in A$ definiramo
$$p(a) := \lambda_0 1 + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \ldots + \lambda_n a^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a^k \in A.$$
Preslikavanje
$$\phi_a : \mathbb{F}[X] \to A, \qquad \phi_a : p \mapsto p(a)$$
je homomorfizam algebri, a njegova slika je najmanja podalgebra od A koja sadrži element a, tj. potprostor od A razapet svim potencijama $\{1, a, a^2, \ldots\}$ elementa a.

Primjer 2.15. Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ neka uređena baza za V, tada je preslikavanje $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \to M_n(\mathbb{F})$ koje linearnom operatoru $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ pridružuje njegov matrični prikaz $T(e) \in M_n(\mathbb{F})$ izomorfizam algebri.

Napomena 2.16. (a) Svaka algebra A izomorfna je nekoj podalgebri od $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(A)$. Naime, za fiksirani element $a \in A$ definirajmo preslikavanje $L_a : A \to A$ s $L_a(x) := ax$. Preslikavanje L_a je očito linearno, tj. $L_a \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(A)$. Nadalje, lako se provjeri da je s
$$\pi : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(A), \qquad \pi(a) := L_a$$
definiran monomorfizam algebri, koji se zove **regularna reprezentacija** od A.

(b) Posebno, ako je A konačne dimenzije n, A je izomorfna nekoj podalgebri matrične algebre $M_n(\mathbb{F})$.

Zadatak 4. Neka je A konačnodimenzionalna realna ili kompleksna algebra. Dokažite da se jedinica 1_A ne može prikazati kao konačna suma komutatora u A.

Definicija 2.17. Neka je A algebra. Ako postoji nenul element $a \in A$ takav da je $ab = 0$ za neki nenul element $b \in A$, onda kažemo da je a **djelitelj nule**. Ako A nema djelitelja nule, onda kažemo da je A **domena**. Komutativne domene zovu se još i **integralne domene**.

Primjer 2.18. Algebra polinoma $\mathbb{F}[X]$ je integralna domena.

Zadatak 5. Neka je A konačnodimenzionalna realna ili kompleksna algebra. Pretpostavimo da elementi $a, b \in A$ zadovoljavaju $[[a,b],a] = 0$. Dokažite da tada postoji prirodan broj n takav da je $[a,b]^n = 0$.
Napomena. Elementi $x \in A$ za koje postoji prirodan broj n takav da je $x^n = 0$ zovu se **nilpotentni elementi**.

[1] Thoralf Albert Skolem (1887.–1963.), norveški matematičar
[2] Amalie Emmy Noether (1882.–1935.), njemačka matematičarka

3 Algebre s dijeljenjem

Definicija 3.1. Za algebru A kažemo da je **algebra s dijeljenjem** ako je svaki nenul element u A invertibilan.

Primjer 3.2. Polja $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ su očiti primjeri komutativnih realnih algebri s dijeljenjem.

Propozicija 3.3. *Svaka konačnodimenzionalna domena je algebra s dijeljenjem.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A konačnodimenzionalna domena. Jer je A domena, za fiksirani element $a \neq 0$, operator $L_a \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(A)$, $L_a(x) = ax$, je injektivan, pa stoga i bijektivan jer je $\dim_{\mathbb{F}} A < \infty$ (teorem o rangu i defektu). Posebno, L_a u slici sadrži jedinicu od A, odnosno postoji $b \in A$ takav da je

$$ab = 1.$$

Analogno, promatrajući operator $R_a \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(A)$, $R_a(x) = xa$, dolazimo do elementa $c \in A$ takvog da vrijedi

$$ca = 1.$$

Slijedi

$$c = c1 = c(ab) = (ca)b = 1b = b,$$

odnosno $c = b$ je inverz od a. Kako je $a \neq 0$ bio proizvoljan, slijedi tvrdnja. $\square$

Napomena 3.4. Beskonačnodimenzionalne domene ne moraju biti algebre s dijeljenjem. Osnovni primjer koji to pokazuje je algebra polinoma $\mathbb{F}[X]$, budući da su svi polinomi stupnja većeg ili jednakog 1 neinvertibilni u $\mathbb{F}[X]$.

Zadatak 6. Neka je A algebra s dijeljenjem sa svojstvom da za sve $a, b \in A$ vrijedi $(ab)^2 = (ba)^2$. Dokažite da je A komutativna.

Zadatak 7. Neka je A konačnodimenzionalna algebra s dijeljenjem. Pretpostavimo da je $\phi \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(A)$ linearno preslikavanje takvo da vrijedi $\phi(1) = 1$ i $\phi(a)\phi(a^{-1}) = 1$ za sve $a \in A \setminus \{0\}$. Dokažite da tada za sve $a \in A$ vrijedi $\phi(a^2) = \phi(a)^2$.

Uputa. Dokažite da za sve $a, b \in A \setminus \{0\}$, $a \neq b^{-1}$, vrijedi $aba = ((a - b^{-1})^{-1} - a^{-1})^{-1} + a$.

Napomena. Preslikavanja $\phi \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(A)$ koja zadovoljavaju $\phi(a^2) = \phi(a)^2$ za sve $a \in A$ zovu se **Jordanovi**[3] **homomorfizmi**.

Definicija 3.5. Neka je A algebra nad poljem $\mathbb{F}$ te neka je $a \in A$. Ako postoji normirani polinom $m_a \in \mathbb{F}[X]$ takav da je $m_a(a) = 0$, te za svaki drugi normirani polinom $p \in \mathbb{F}[X]$ sa svojstvom $p(a) = 0$ vrijedi $\deg m_a \leq \deg p$, onda kažemo da je m_a **minimalni polinom elementa** a.

Propozicija 3.6. *Neka je A konačnodimenzionalna algebra nad poljem $\mathbb{F}$. Tada svaki element $a \in A$ ima jedinstven minimalni polinom m_a. Nadalje, ako je A algebra s dijeljenjem, polinom m_a je ireducibilan, tj. m_a se ne može faktorizirati u produkt dva nekonstantna polinoma.*

Dokaz. Neka je $\dim_{\mathbb{F}} A = n$ i fiksirajmo element $a \in A$.

Egzistencija od m_a. Promotrimo skup

$$\{1_A, a, \ldots, a^n\} \subseteq A.$$

Jer je $\dim_{\mathbb{F}} A = n$, taj skup je linearno zavisan pa postoje skalari $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ koji nisu svi 0 takvi da je

$$\lambda_0 1_A + \lambda_1 a + \ldots + \lambda_n a^n = 0.$$

Neka je $0 \leq k \leq n$ najveći broj takav da je $\lambda_k \neq 0$. Tada je

$$p(X) := \frac{1}{\lambda_k}(\lambda_k X^k + \ldots + \lambda_1 X + \lambda_0)$$

normiran polinom u $\mathbb{F}[X]$ takav da je $p(a) = 0$. Posebno, postoji polinom $m_a \in \mathbb{F}[X]$ najmanjeg stupnja koji se poništava na elementu a i m_a je po definicji minimalni polinom elementa a.

[3] Ernst Pascual Jordan (1902.–1980.), njemački fizičar

Jedinstvenost od m_a. Pretpostavimo da su $m_a, m_a' \in \mathbb{F}[X]$ dva minimalna polinoma od a. Po definiciji, m_a i m_a' su istog supnja $k \leq n$. Očito je $(m_a - m_a')(a) = 0$. Jer su polinomi m_a i m_a' normirani i istog su stupnja, zaključujemo da je polinom $p := m_a - m_a' \in \mathbb{F}[X]$ stupnja manjeg od k sa svojstvom $p(a) = 0$. Stoga je nužno $p = 0$, odnosno $m_a = m_a'$.

Sada pretpostavimo da je A algebra s dijeljenjem.

Ireducibilnost od m_a. Pretpostavimo da je $m_a(X) = p(X)q(X)$ za neke polinome $p, q \in \mathbb{F}[X]$. Tada je

$$p(a)q(a) = m_a(a) = 0.$$

Jer je A algebra s dijeljenjem, mora biti $p(a) = 0$ ili $q(a) = 0$. Kako su oba polinoma p i q stupnja najviše $\deg m_a$, po definiciji od m_a barem jedan od polinoma p i q mora biti stupnja jednakog $\deg m_a$. Posljedično drugi polinom onda mora biti konstantan. $\square$

Zadatak 8. Neka je A algebra. Za element $a \in A$ kažemo da je **lijevo (desno) invertibilan** ako postoji element $b \in A$ takav da je $ba = 1$ ($ab = 1$).

(a) Ako je algebra A konačnodimenzionalna, dokažite da su svi lijevo (desno) invertbilni elementi u A nužno invertibilni.

(b) U algebri $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[X])$ nađite primjer neinvertibilnog operatora koji je lijevo invertibilan.

Uputa za (b). Promotrite operator integriranja.

4 Realne algebre s dijeljenjem - dimenzije 1 i 2

U nastavku ćemo koristiti sljedeći fundamentalni teorem i njegovu posljedicu:

Teorem 4.1 (Osnovni teorem algebre). *Svaki kompleksni polinom $p \in \mathbb{C}[X]$ stupnja $n \geq 1$ ima korijen u $\mathbb{C}$. Posljedično, p se može faktorizirati kao produkt polinoma stupnja 1, tj. postoje $\alpha, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ takvi da je*

$$P(X) = \alpha(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$$

i takva faktorizacija je jedinstvena do na permutaciju faktora.

Korolar 4.2. *Realni polinom $p \in \mathbb{R}[x]$ je ireducibilan ako i samo ako je p ili stupnja 1 ili stupnja 2 bez realnih korijena, odnosno negativne diskriminante.*

Korolar 4.3. *Do na izomorfizam, $\mathbb{C}$ je jedina konačnodimenzionalna kompleksna algebra s dijeljenjem.*

Dokaz. Neka je A konačnodimenzionalna kompleksna algebra s dijeljenjem. Fiksirajmo proizvoljan element $a \in A$ te neka je $m_a \in \mathbb{C}[X]$ njegov minimalni polinom. Prema Propoziciji 3.6, m_a je ireducibilan. Prema Osnovnom teoremu algebre m_a je stupnja 1, odnosno $m_a(X) = X - \lambda$ za neki skalar $\lambda \in \mathbb{C}$. Slijedi $0 = m_a(a) = a - \lambda 1_A$, odnosno $a = \lambda 1_A$. Dakle, $A \cong \mathbb{C}$. $\square$

Lema 4.4. *Neka je A konačnodimenzionalna realna algebra s dijeljenjem. Tada je minimalni polinom svakog elementa $a \in A$ jednog od sljedeća dva oblika:*

$$m_a(X) = \begin{cases} X - \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) & \text{ako je } a \in \mathbb{R} \\ X^2 - 2\lambda X + \mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda^2 < \mu) & \text{ako } a \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

Posljedično, svaki element $a \in A$ možemo zapisati u obliku $a = x + y$, gdje je $x \in \mathbb{R}$ i $y \in A$ takav da je ili $y = 0$ ili $y^2 \in \mathbb{R}_{<0}$.

Dokaz. Ako je $a \in A$, onda je očito $a \in \mathbb{R}$ ako i samo ako je $m_a(X) = X - a$. U tom slučaju imamo trivijalnu dekompoziciju $a = x + y$, gdje je $y = 0$.

Ako $a \notin \mathbb{R}$, odnosno ako je $\deg m_a > 1$, onda iz ireducibilnosti od m_a (Propozicija 3.6) i Korolara 4.2 slijedi da je $m_a(X) = X^2 - 2\lambda X + \mu$ za neke $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takve da je $\lambda^2 < \mu$. U tom slučaju stavimo $x := \lambda \in \mathbb{R}$ i $y := a - \lambda \notin \mathbb{R}$, tako da je $a = x + y$ i

$$y^2 = a^2 - 2\lambda a + \lambda^2 = a^2 - 2\lambda a + \mu + (\lambda^2 - \mu) = m_a(a) + (\lambda^2 - \mu) = \lambda^2 - \mu < 0.$$

$\square$

Propozicija 4.5. *Do na izomorfizam, $\mathbb{C}$ je jedina dvodimenzionalna realna algebra s dijeljenjem.*

Dokaz. Neka je A dvodimenzionalna realna algebra s dijeljenjem. Prema Lemi 4.4 postoji element $y \in A$ takav da je $y^2 \in \mathbb{R}_{<0}$. Stavimo

$$i_A := \frac{1}{\sqrt{-y^2}} y \in A,$$

tako da je $i_A^2 = -1$. Skup $\{1_A, i_A\}$ je očito linearno nezavisan pa stoga razapinje A (jer je $\dim_{\mathbb{R}} A = 2$). Dakle

$$A = \mathbb{R}1_A \dotplus \mathbb{R}i_A = \{\lambda 1_A + \mu i_A : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Sada je trivijalno provjeriti da je preslikavanje $\phi : \mathbb{C} \to A$ definirano s $\phi(\lambda + \mu i) := \lambda 1_A + \mu i_A$ izomorfizam (realnih) algebri. $\square$

Korolar 4.6. *Do na izomorfizam, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ su jedine konačnodimenzionalne komutativne realne algebre s dijeljenjem.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A realna konačnodimenzionalna komutativna algebra s dijeljenjem, te neka je $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 2$. Prema dokazu Propozicije 4.5, A sadrži podalgebru $\mathbb{C}_A$ izomorfnu s $\mathbb{C}$. Jer je A komutativna, A možemo promatrati kao $\mathbb{C}_A$-algebru (tj. za polje skalara uzmemo $\mathbb{C}_A$; vidjeti zadatak 1). Kako je $\dim_{\mathbb{R}} A < \infty$ svakako je i $\dim_{\mathbb{C}_A} A < \infty$. Dakle, A konačnodimenzionalna kompleksna algebra s dijeljenjem pa je prema Korolaru 4.3 nužno $A = \mathbb{C}_A \cong \mathbb{C}$. $\square$

Sada se prirodno nameće sljedeće pitanje:

Problem 4.7. Za koje prirodne brojeve $n > 2$ postoje n-dimenzionalne realne algebre s dijeljenjem? Nadalje, jesu li one (do na izomorfizam) jednoznačno određene svojom dimenzijom n?

Na kraju ovog odjeljka napomenimo da je klasifikacija dvodimenzionalnih algebri s dijeljenjem nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ osjetno kompliciranija:

Zadatak 9. Neka je p prost broj. Promotrimo skup

$$\mathbb{Q}[\sqrt{p}] := \{\lambda + \mu\sqrt{p} : \lambda, \mu \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R},$$

s obzirom na standardne operacije zbrajanja i množenja realnih brojeva.

(a) Dokažite da je $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ polje koje sadrži $\mathbb{Q}$ i $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{p}] = 2$.

(b) Ako su p i q dva različita prosta broja, dokažite da $\mathbb{Q}$-algebre $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ i $\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$ nisu izomorfne.

(c) Zaključite da postoji beskonačno mnogo neizomorfnih dvodimenzionalnih $\mathbb{Q}$-algebri s dijeljenjem.

5 Algebra kvaterniona $\mathbb{H}$ - dimenzija 4

Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ uvedimo sljedeće oznake

$$1 := (1,0,0,0), \qquad i := (0,1,0,0), \qquad j := (0,0,1,0) \qquad \text{i} \qquad k := (0,0,0,1).$$

Za $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ pišemo

$$(a,b,c,d) = a + bi + cj + dk.$$

Na $\mathbb{R}^4$, uz standardne operacije zbrajanja i množenja skalarom, uvodimo i operaciju množenja, tako da najprije definiramo međusobne produkte i, j, k na sljedeći način:

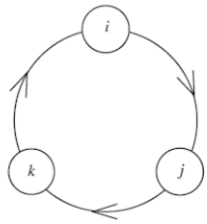
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = -ji = k,$$

$$jk = -kj = i,$$

$$ki = -ik = j.$$

Primijetimo da pravilo množenja elemenata i, j, k možemo lako zapamtiti koristeći sljedeću sliku:



Slika preuzeta iz članka J. C. Baez, *The octonions*, `https://arxiv.org/pdf/math/0105155.pdf`

Definiciju množenja zatim po bilinearnosti proširimo na čitav $\mathbb{R}^4$. Dakle:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \quad &:= \quad a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ &+ \quad (a_1 a_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\ &+ \quad (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j \\ &+ \quad (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k\end{aligned}$$

Definicija 5.1. Uz prethodno definirane operacije, $\mathbb{R}^4$ se zove **algebra kvaterniona** i označava se s $\mathbb{H}$.

Napomena 5.2. Nije teško (ali je malo naporno) provjeriti da je $\mathbb{H}$ zaista realna algebra. Primijetimo da $\mathbb{H}$ nije komutativna.

Napomena 5.3. Pojam kvaterniona dolazi od latinske riječi *quaternio*, koja se prevodi kao četvorka, odnosno cjelina od četiri dijela. Oznaka $\mathbb{H}$ za kvaternione dana je u čast W. R. Hamiltona[4], koji je 1843. godine otkrio kvaternione, tražeći proširenje polja kompleksnih brojeva do trodimenzionalne realne algebre s dijeljenjem s dvije imaginarne jedinice. Nakon višegodišnjih neuspjelih pokušaja, shvatio je da to ne može postići u dimenziji 3, već u dimenziji 4, s tri imaginarne jedinice i, j, k koje moraju zadovoljavati jednakost $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Tu formulu je 16. listopada 1843. Hamilton urezao u kamen dublinskog mosta Broom Bridge, na kojem se i danas nalazi sljedeća plaketa:

Slika preuzeta s Wikipedie: `https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion`

Slično kao i na algebri kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, na algebri kvaterniona $\mathbb{H}$ uvodimo **konjugiranje**, kao unarnu operaciju $* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definiranu s

$$(a + bi + cj + dk)^* := a - bi - cj - dk.$$

Lako se pokaže da konjugiranje na $\mathbb{H}$ zadovoljava sljedeća svojstva:

$$(p^*)^* = p, \qquad (\lambda p + \mu q)^* = \lambda p^* + \mu q^*, \qquad (pq)^* = q^* p^*, \qquad p^* = -\frac{1}{2}(p + ipi + jpj + kpk),$$

gdje su $p, q \in \mathbb{H}$ te $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Za kvaternion $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ redom definiramo njegov **realni i imaginarni dio**:

$$\operatorname{Re} q := a = \frac{1}{2}(q + q^*) \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im} q := bi + cj + dk = \frac{1}{2}(q - q^*).$$

[4]William Rowan Hamilton (1805.–1865.), irski matematičar

Napokon, $\mathbb{H}$ opskrbljujemo s euklidskom normom

$$\|a + bi + cj + dk\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

za koju se lako provjeri da zadovoljava sljedeća svojstva:

$$\|1\| = 1, \qquad \|q^*\| = \|q\|, \qquad q^*q = qq^* = \|q\|^2, \qquad \|pq\| = \|p\|\|q\|$$

za sve $p, q \in \mathbb{H}$. Posebno, svaki nenul kvaternion $q \in \mathbb{H}$ je invertibilan s inverzom

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}.$$

Nadalje, algebra $\mathbb{H}$ je centralna, tj. $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$. Naime, ako je $q = a + bi + cj + dk \in Z(\mathbb{H})$, onda iz $qi = iq$ i $qj = jq$ redom dobivamo $c = d = 0$ i $b = d = 0$, odnosno $q = a \in \mathbb{R}$.

Dakle, sve zajedno, imamo sljedeći rezultat:

Propozicija 5.4. *Algebra kvaterniona $\mathbb{H}$ je centralna realna algebra s dijeljenjem dimenzije 4.*

Zadatak 10. Dokažite da je svaki automorfizam algebre kvaterniona $\mathbb{H}$ nužno unutrašnji.

6 Frobeniusov teorem

Sada smo spremni dokazati Frobeniusov teorem. Prisjetimo se iskaza:

Teorem 6.1 (**Frobeniusov teorem**[5]**, 1877.**)**.** *Do na izomorfizam postoje točno tri konačnodimenzionalne realne algebre s dijeljenjem: realni brojevi $\mathbb{R}$, kompleksni brojevi $\mathbb{C}$ i kvaternioni $\mathbb{H}$.*

Dokaz Frobeniuosovg teorema provodimo u koracima. Neka je A konačnodimenzionalna realna algebra s dijeljenjem.

<u>*Korak 1.*</u> Ako je $\dim_{\mathbb{R}} A = 1$ onda je $A = \mathbb{R}1_A \cong \mathbb{R}$.

<u>*Korak 2.*</u> Ako je $\dim_{\mathbb{R}} A > 1$ onda prema dokazu Propozicije 4.5 postoji element $i_A \in A$ takav da je $i_A^2 = -1$ te A sadrži podalgebru $\mathbb{C}_A = \mathbb{R}1_A \dot{+} \mathbb{R}i_A$ izomorfnu s $\mathbb{C}$. Posebno, ako je $\dim_{\mathbb{R}} A = 2$, imamo $A = \mathbb{C}_A \cong \mathbb{C}$.

<u>*Korak 3.*</u> Pretpostavimo da je $\dim_{\mathbb{R}} A > 2$, tako da je $\mathbb{C}_A \subsetneq A$.

Zadatak 11. Dokažite da ne postoji element $a \in A \setminus \mathbb{C}_A$ koji komutira s i_A.

<u>*Korak 4.*</u> Promotrimo A kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}_A$ i označimo ga s ${}_{\mathbb{C}}A$. Definirajmo sada preslikavanje

$$\phi : {}_{\mathbb{C}}A \to {}_{\mathbb{C}}A \qquad \text{s} \qquad \phi(a) := i_A a i_A^{-1}.$$

Zadatak 12. Dokažite da preslikavanje ϕ zadovoljava sljedeća svojstva:

(a) ϕ je involucija, tj. $\phi^2 = \phi \circ \phi = \mathrm{id}_A$.

(b) ϕ je $\mathbb{C}_A$-linearno, tj $\phi(\omega_1 a_1 + \omega_2 a_2) = \omega_1 \phi(a_1) + \omega_2 \phi(a_2)$ za sve $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}_A$ i $a_1, a_2 \in A$.

(c) ϕ je multiplikativno, tj. $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2)$ za sve $a_1, a_2 \in A$.

<u>*Korak 5.*</u> Iz (a) i (b) dijela zadatka 12 slijedi da su 1 i -1 jedini kandidati za svojstvene vrijednosti od ϕ. Označimo pripadne svojstvene potprostore s V_1 i V_{-1}, tj.

$$V_1 := \{a \in A : \phi(a) = a\},$$

$$V_{-1} := \{a \in A : \phi(a) = -a\}.$$

Očito je $\mathbb{C}_A \subseteq V_1$. Štoviše, iz zadatka 11 slijedi da je $V_1 = \mathbb{C}_A$.

[5]Ferdinand Georg Frobenius (1849.–1917.), njemački matematičar

Zadatak 13. Zaključite da je $V_{-1} \neq \{0\}$ i da vrijedi ${}_{\mathbb{C}}A = V_1 \dotplus V_{-1}$ (direktna suma vektorskih prostora nad $\mathbb{C}_A$).

<u>*Korak 6.*</u> Fiksirajmo neki element $b \in V_{-1} \setminus \{0\}$. Prema Lemi 4.4 postoje $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$b^2 = \lambda 1_A + \mu b \tag{1}$$

Ako na jednakost (1) djelujemo s operatorom ϕ, tada koristeći zadatak 12 dobivamo

$$\phi(b)^2 = \lambda 1_A + \mu\phi(b).$$

Prema izboru elementa b imamo $\phi(b) = -b$, pa je

$$b^2 = \lambda 1_A - \mu b. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi da je $\mu = 0$. Kako $b \notin \mathbb{R}1_A$, mora biti $\lambda < 0$. Uvedimo sada elemente

$$j_A := \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} b,$$
$$k_A := i_A j_A.$$

Zadatak 14. Dokažite da $\{1_A, i_A, j_A, k_A\}$ čini linearno nezavisan skup u A, te uspostavite sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} i_A^2 = j_A^2 = k_A^2 &= -1_A, \\ i_A j_A = -j_A i_A &= k_A, \\ j_A k_A = -k_A j_A &= i_A, \\ k_A i_A = -i_A k_A &= j_A. \end{aligned}$$

<u>*Korak 7.*</u> Iz prethodnog razmatranja slijedi da je

$$\mathbb{H}_A := \mathbb{R}1_A \dotplus \mathbb{R}i_A \dotplus \mathbb{R}j_A \dotplus \mathbb{R}k_A \subseteq A$$

podalgebra od A koja je izomorfna s algebrom kvaterniona $\mathbb{H}$. Ostaje još dokazati da je $A = \mathbb{H}_A$. U tu svrhu izaberimo proizvoljni element $a \in V_{-1}$. Koristeći (c) dio zadatka 12 dobivamo

$$\phi(j_A a) = \phi(j_A)\phi(a) = (-j_A)(-a) = j_A a.$$

Odavde zaključujemo da je $j_A a \subseteq V_1 = \mathbb{C}_A$, pa je $a \in j_A^{-1}\mathbb{C}_A \subseteq \mathbb{H}_A$. Dakle, $V_{-1} \subseteq \mathbb{H}_A$ i $V_1 = \mathbb{C}_A \subseteq \mathbb{H}_A$, što zajedno s $A = V_1 \dotplus V_{-1}$ povlači $A = \mathbb{H}_A$. Time je dokaz Frobeniusovog teorema u potpunosti završen. $\square$

Na kraju ovog odjeljka napomenimo da se prepostavka konačne dimenzionalnosti algebre A u Frobeniusovom teoremu ne može ispustiti.

Primjer 6.2. Za proizvoljno polje $\mathbb{F}$ definiramo **algebru Laurentovih**[6] **redova** $\mathbb{F}((X))$ kao skup svih formalnih redova oblika

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n X^n,$$

gdje je samo konačno mnogo skalara $\lambda_n \in \mathbb{F}$ s negativnim indeksima n različito od 0.

Na $\mathbb{F}((X))$ uvodimo operacije množenja skalarom, zbrajanja i množenja na sličan način kao i na algebri polinoma $\mathbb{F}[X]$:

$$\lambda\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n X^n\right) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda\lambda_n) X^n,$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n X^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n X^n := \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_n + \mu_n) X^n,$$
$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n X^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n X^n\right) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu_n X^n, \quad \text{gdje je } \nu_n := \sum_{i+j=n} \lambda_i \mu_j.$$

Primijetimo da je definicija množenja na $\mathbb{F}((X))$ smislena, s obzirom da za svaki nenul element $f \in \mathbb{F}((X))$ postoji $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $f = \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n X^n$ i $\lambda_m \neq 0$. Nije teško provjeriti da $\mathbb{F}((X))$ s obzirom na gore uvedene operacije (komutativna) algebra s dijeljenjem. Također, jer je $\mathbb{F}[X] \subset \mathbb{F}((X))$, algebra $\mathbb{F}((X))$ je beskonačnodimenzionalna.

Posebno, $\mathbb{R}((X))$ je primjer beskonačnodimenzionalne (komutativne) realne algebre s dijeljenjem.

[6]Pierre Alphonse Laurent (1813.–1854.), francuski matematičar, inženjer i vojni časnik

7 Domaća zadaća

- Za domaću zadaću potrebno je riješiti zadatke 11-14 te još barem 4 od preostalih zadataka 1-10.
- Zadaću predajete kao *jedan pdf file* preko sustava Merlin do 23. 6. 2021. u 23:59.
- Dozvoljeno je pisati u LaTeXu.