Kolegij *Studentska natjecanja iz matematike*, ak. god. 2020./2021.
https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/snim_a

Tema br. 12:

Oktonioni i Hurwitzov teorem

Ilja Gogić, 18. 6. 2021.

1 Uvod

Osnovni cilj ovog predavanja je uvesti algebru oktoniona $\mathbb{O}$, opisati njena osnovna svojstva, te provesti klasifikaciju realnih Hurwitzovih[1] algebri.

Kao i obično, vektorski prostor

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

opskrbljujemo sa standarnim skalarnim produktom

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Induciranu (euklidsku) normu na $\mathbb{R}^n$ označavamo s $\|\cdot\|$; dakle

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Kao motivaciju za ovo predavanje krećemo s jednim starim problemom:

Problem 1.1 (**Hurwitzov problem**). Za koje prirodne brojeve n postoje realni brojevi λ^i_{jk} $(1 \leq i, j, k \leq n)$ takvi da za proizvoljne realne brojeve x_i, y_i $(1 \leq i \leq n)$ vrijedi sljedeći identitet:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j,k=1}^n \lambda^i_{jk} x_j y_k\right)^2 ?$$

Kako bismo dali odgovarajuću reformulaciju Hurwitzovog problema, promatrat ćemo i algebre koje *nisu nužno asocijativne*. Dakle, u ovom predavanju ćemo pod **algebrom** podrazumijevati vektorski prostor A nad poljem $\mathbb{F}$ opskrbljen s bilinearnom operacijom množenja $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto ab$. Ako je množenje u algebri A asocijativno, tj. ako vrijedi $(ab)c = a(bc)$ za sve $a, b, c \in A$, naglasit ćemo da je riječ o **asocijativnoj algebri**.

Napomena 1.2. Očito je funkcija $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bilinearna ako i samo ako su sve njene koordinatne funkcije $\phi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilinearne. Nadalje, funkcija (forma) $\phi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je bilinearna ako i samo ako je oblika

$$\phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{T}_i \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j,k=1}^n \lambda^i_{jk} x_i y_j$$

za neku (jednoznačno određenu) matricu $\mathbf{T}_i = (\lambda^i_{jk}) \in M_n(\mathbb{R})$. Slijedi da je svaka bilinearna funkcija $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (odnosno množenje na $\mathbb{R}^n$) oblika

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{j,k=1}^n \lambda^1_{jk} x_j y_k, \ldots, \sum_{j,k=1}^n \lambda^n_{jk} x_j y_k\right),$$

za neke $\lambda^i_{jk} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j, k \leq n)$. Stoga, na originalni Hurwitzov problem možemo gledati kao na pitanje za koje prirodne brojeve n je moguće definirati množenje na $\mathbb{R}^n$ s obzirom na koje je euklidska norma multiplikativna, tj. vrijedi

$$\|\mathbf{x}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

[1] Adolf Hurwitz (1859.–1919.), njemački matematičar

Zadatak 1. Pretpostavimo da na $\mathbb{R}^n$ postoji množenje $\cdot$ s obzirom na koje je euklidska norma multiplikativna. Dokažite da tada na $\mathbb{R}^n$ možemo definirati novo množenje $\star$ s obzirom na koje je euklidska norma na $\mathbb{R}^n$ također multiplikativna, te postoji element $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ takav da vrijedi

$$\mathbf{e} \star \mathbf{x} = \mathbf{x} \star \mathbf{e} = \mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Uputa. Neka je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan jedinični vektor. Dokažite da su operatori lijevog i desnog množnja s $\mathbf{v}$, $L_{\mathbf{v}}, R_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $L_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$, $R_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$ ortogonalni, te definirajte

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} := R_{\mathbf{v}}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot L_{\mathbf{v}}^{-1}(\mathbf{y}) \qquad \text{i} \qquad \mathbf{e} := \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Koristeći zadatak 1 i Napomenu 1.2, dobivamo:

Propozicija 1.3. *Hurwitzov problem ima pozitivno rješenje za $n \in \mathbb{N}$ ako i samo ako na $\mathbb{R}^n$ možemo definirati množenje s obzirom na koje $\mathbb{R}^n$ ima neutralni element (jedinicu) i s obzirom na koje je euklidska norma multiplikativna.*

Uzeviši u obzir Propoziciju 1.3, mi ćemo u nastavku pretpostavljati da *sve naše algebre A imaju jedinicu*, odnosno element $1_A \in A$ sa svojstvom da je $1_A a = a 1_A = a$ za sve $a \in A$. Primijetimo da je jedinica i u neasocijativnim algebrama nužno jedinstvena.

2 Realne Hurwitzove algebre – definicija i osnovna svojstva

Definicija 2.1. Za realnu algebru A kažemo da je **Hurwitzova (kompozicijska) algebra** ako A možemo opskrbiti sa skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ čija je inducirana norma multiplikativna s obzirom na operaciju množenja na A, tj. vrijedi

$$\|ab\| = \|a\|\|b\| \qquad \forall a, b \in A.$$

Prema Propoziciji 1.3 imamo sljedeću reformulaciju Hurwitzovog problema:

Problem 2.2 (Hurwitzov problem - reformulacija). Za koje prirodne brojeve n na unitarnom prostoru $\mathbb{R}^n$ (sa standardnim skalarnim produktom) možemo definirati operaciju množenja s obzirom na koje je $\mathbb{R}^n$ realna Hurwitzova algebra?

Prije nego li damo odgovor na Hurwitzov problem, u nastavku ćemo najprije opisati neka osnovna svojstva realnih Hurwitzovih algebri. Krećemo s poznatim primjerima:

Primjer 2.3. Kao što znamo, euklidska norma je multiplikativna na realnim brojevima $\mathbb{R}$, kompleksnim brojevima $\mathbb{C}$ i kvaternionima $\mathbb{H}$, tako da su $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ realne Hutwitzove algebre. Eksplicitno, imamo sljedeće identitete:

- $n = 1$
$$x_1^2 y_1^2 = (x_1 y_1)^2,$$
- $n = 2$
$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2,$$
- $n = 4$
$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2,$$
  gdje su
$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 \\ z_2 &= x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 \\ z_3 &= x_1 y_3 - x_2 y_4 + x_3 y_1 + x_4 y_2 \\ z_4 &= x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1. \end{aligned}$$

Dakle, odgovor na Hurwitzov problem je potvrdan za $n = 1, 2, 4$.

Kao i u slučaju asocijativnih algebri, za element a algebre A kažemo da je **invertibilan**, ako postoji element $b \in A$ takav da je $ab = ba = 1_A$. U tom slučaju za element b kažemo da je **(multiplikativni) inverz** od A. Općenito, inverzi invertibilnih elemenata u neasocijativnim algebrama ne moraju biti jedinstveni, ali to neće biti slučaj u realnim Hurwitzovim algebrama (Korolar 2.9).

Nadalje, za (neasocijativnu) algebru A kažemo da je **algebra s dijeljenjem** ako za svaki $a \in A$, $a \neq 0$, i $b \in A$ postoje jedinstveni $x, y \in A$ takvi da vrjedi $ax = b$ i $ya = b$. Primijetimo da se u asocijativnom slučaju ova definicija podudara s prethodno danom definicijom algebre s dijeljenjem (da je svaki nenul element u A invertibilan).

Napomena 2.4. S obzirom da je norma $\|\cdot\|$ na realnoj Hurwitzovoj algebri A inducirana iz skalarnog produkta $\langle\cdot,\cdot\rangle$, vrijedi sljedeći identitet:

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{2}\left(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2\right) \qquad \forall a, b \in A.$$

Nadalje, očito je $\|1_A\| = 1$ i $\|a^{-1}\| = \|a\|^{-1}$ za sve invertibilne elemente $a \in A$.

Zadatak 2. Neka je A realna Hurwitzova algebra. Dokažite da tada za sve $a, b, a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ vrijede sljedeći identiteti:

$$\begin{aligned}
\langle a_1 b, a_2 b\rangle &= \langle a_1, a_2\rangle \|b\|^2, \\
\langle a b_1, a b_2\rangle &= \|a\|^2 \langle b_1, b_2\rangle, \\
\langle a_1 b_1, a_2 b_2\rangle + \langle a_1 b_2, a_2 b_1\rangle &= 2\langle a_1, a_2\rangle\langle b_1, b_2\rangle, \\
\langle a_1 a, b_1 b\rangle &= -\langle a_1 b, b_1 a\rangle, \quad \text{ako je } a \perp b, \\
a^2 &= 2\langle a, 1_A\rangle a - \|a\|^2 1_A.
\end{aligned}$$

Propozicija 2.5 (Jedinstvenost skalarnog produkta). *Na svakoj realnoj algebri A postoji najviše jedan skalarni produkt s obzirom na kojeg je A realna Hurwitzova algebra.*

Posebno, ako su A i B realne Hurwitzove algebre te $\phi : A \to B$ monomorfizam algebri, tada je ϕ izometrija.

Dokaz. Pretpostavimo da je A Hurwitzova algebra s obzirom na skalarne produkte $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ i $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$. Prema Napomeni 2.4 dovoljno je dokazati jednakost induciranih normi, tj. da za sve $a \in A$ vrijedi $\|a\|_1 = \|a\|_2$. Neka je stoga $a \in A$ proizvoljan. Prema zadatku 2 vrijedi

$$2\langle a, 1_A\rangle_1 a - \|a\|_1^2 1_A = a^2 = 2\langle a, 1_A\rangle_2 a - \|a\|_2^2 1_A.$$

Jer je $\|1_A\|_1 = \|1_A\|_2 = 1$, očito je $\|a\|_1 = \|a\|_2$ za $a \in \mathbb{R}1_A$. Ako $a \notin \mathbb{R}1_A$, skup $\{1_A, a\}$ je linearno nezavisan pa iz gornje jednakosti odmah slijedi $\|a\|_1 = \|a\|_2$.

Neka je sada B neka druga realna Hurwitzova algebra te neka je $\phi : A \to B$ monomorfizam algebri. Označimo skalarne produkte na A i B redom s $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ i $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$ te definirajmo fukciju $\langle\cdot,\cdot\rangle_\phi : A \times A \to \mathbb{R}$ s

$$\langle a_1, a_2\rangle_\phi := \langle \phi(a_1), \phi(a_2)\rangle_B.$$

Jer je preslikavanje ϕ linearna injekcija, očito je $\langle\cdot,\cdot\rangle_\phi$ skalarni produkt na A. Nadalje, inducirana norma $\|\cdot\|_\phi$ je multiplikativna. Zaista, zbog multiplikativnosti preslikavanja ϕ i norme $\|\cdot\|_B$, za sve $a_1, a_2 \in A$ imamo

$$\begin{aligned}
\|a_1 a_2\|_\phi &= \|\phi(a_1 a_2)\|_B = \|\phi(a_1)\phi(a_2)\|_B = \|\phi(a_1)\|_B \|\phi(a_2)\|_B \\
&= \|a_1\|_\phi \|a_2\|_\phi.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je A Hurwitzova algebra i s obzirom na skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_\phi$ pa iz prve tvrdnje slijedi $\langle\cdot,\cdot\rangle_\phi = \langle\cdot,\cdot\rangle_A$. Dakle,

$$\langle \phi(a_1), \phi(a_2)\rangle_B = \langle a_1, a_2\rangle_A$$

za sve $a_1, a_2 \in A$, odnosno ϕ je izometrija. □

Na svakoj realnoj Hurwitzovoj algebri A definiramo **involuciju**, kao unarnu operaciju $* : A \to A$ definiranu s

$$a^* := -a + 2\langle a, 1_A\rangle 1_A. \tag{1}$$

Primijetimo da je na $A = \mathbb{R}$ involucija identiteta, dok se za $A = \mathbb{C}$, odnosno $A = \mathbb{H}$, involucija podudara s uobičajenim konjugiranjem kompleksnih brojeva, odnosno kvaterniona. Osnovna svojstva involucije dana su u sljedećem zadatku:

Zadatak 3. Dokažite da involucija na realnoj Hurwitzovoj algebri A zadovoljava sljedeća svojstva:

$$(\lambda a + \mu b)^* = \lambda a^* + \mu b^*,$$
$$(a^*)^* = a$$
$$(ab)^* = b^* a^*$$
$$a^* a = a a^* = \|a\|^2 1_A$$
$$\langle x^*, y^* \rangle = \langle x, y \rangle$$
$$\langle ax, y \rangle = \langle x, a^* y \rangle$$
$$\langle xa, y \rangle = \langle x, y a^* \rangle$$

gdje su $a, b, x, y \in A$ te $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Napomena 2.6. Neka je A realna Hurwitzova algebra A. Kao i prije, za fiksirani element $a \in A$ s L_a i R_a redom označimo operatore lijevog, odnosno desnog množenja s a, tj. $L_a, R_a : A \to A$,

$$L_a x := ax \qquad \text{i} \qquad R_a x := xa \qquad (x \in A).$$

Primijetimo da zadnja dva svojstva zadatka 3 možemo reinterpretirati kao

$$\langle L_a x, y \rangle = \langle x, L_{a^*} y \rangle \qquad \text{i} \qquad \langle R_a x, y \rangle = \langle x, R_{a^*} y \rangle$$

za sve $x, y, \in A$, tako da su hermitski adjungirani operatori od L_a i R_a redom operatori L_{a^*} i R_{a^*}.

Uvedimo sada i pojam alternativnih algebri:

Definicija 2.7. Za algebru A kažemo da je **alternativna** ako za sve $a, b \in A$ vrijede identiteti

$$a(ab) = (aa)b, \tag{2}$$
$$(ba)a = b(aa). \tag{3}$$

Na svakoj algebri A možemo definirati **asocijator**, kao trilinearno preslikavanje $[\cdot, \cdot, \cdot] : A \times A \times A \to A$ definirano s

$$[a, b, c] := (ab)c - a(bc).$$

Koristeći asocijator, jednakosti (2) i (3) možemo redom zapisati u obliku $[a, a, b] = 0$ i $[b, a, a] = 0$.

Zadatak 4. Dokažite da je algebra A alternativna, ako i samo ako je njen asocijator *alternirajuće preslikavanje*, tj. za svaku permutaciju $\sigma \in S_3$ i svaki izbor elemenata $a_1, a_2, a_3 \in A$ vrijedi

$$[a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}] = \operatorname{sgn}(\sigma)[a_1, a_2, a_3].$$

Napomena 2.8. Iz zadatka 4 posebno slijedi da u alternativnim algebrama vrijedi i identitet

$$a(ba) = (ab)a,$$

tako da u njima produkti oblika $a^2 b$, ab^2 i aba imaju jednoznačno značenje.

Zadatak 5. Dokažite da u svakoj alternativnoj algebri A vrijede **Moufangini identiteti**[2]:

$$(aba)c = a(b(ac)),$$
$$c(bab) = ((cb)a)b,$$
$$(bc)(ab) = b(ca)b$$

za sve $a, b, c \in A$.

Zadatak 6. Koristeći zadatak 5, dokažite sljedeći **Artinov teorem**[3]: Algebra A je alternativna ako i samo ako je svaka podalgebra od A generirana s dva elementa asocijativna.

Uputa. Pretpostavimo da je A alternativna algebra. Za proizvoljna dva elementa $a, b \in A$ i $k \in \mathbb{N}$ označimo s $p_k = p_k(a, b)$ bilo koji neasocijativni produkt oblika $x_1 x_2 \cdots x_k$ (s nekim poretkom zagrada) gdje je svaki $x_i \in \{a, b\}$. Kako bismo dokazali da je podalgebra od A generirana s a i b asocijativna, dovoljno je dokazati da vrijedi $[p_k, r_l, s_m]$ za sve neasocijativne produkte $p_k(a, b)$, $r_l(a, b)$ i $s_m(a, b)$. Potonju tvrdnju dokažite indukcijom po $n = k + l + m$.

[2] Ruth Moufang (1905.–1977.), njemačka matematičarka
[3] Emil Artin (1898.–1962.), austrijski matematičar

Zadatak 7. Neka je A alternativna algebra. Koristeći Moufangine identitete (zadatak 5), dokažite da za proizvoljan invertibilni element $a \in A$ i svaki $x \in A$ vrijedi

$$a^{-1}(ax) = x = (xa)a^{-1}.$$

Odavde zaključite da je inverz svakog invertibilnog $a \in A$ jedinstven. Kao i obično označit ćemo ga s a^{-1}.

Korolar 2.9. *Neka je A realna Hurwitzova algebra.*

(a) A je alternativna algebra.

(b) A je algebra s dijeljenjem. Štoviše, svaki nenul element $a \in A$ ima jedinstven inverz dan s

$$a^{-1} = \frac{1}{\|a\|^2} a^*.$$

Dokaz. Kako bismo dokazali tvrdnju (a), najprije primijetimo da za sve $a, b \in A$ vrijedi

$$a^*(ab) = (a^*a)b = \|a\|^2 b. \tag{4}$$

Zaista, koristeći zadatke 2 i 3, za proizvoljan element $c \in A$ imamo

$$\langle a^*(ab), c\rangle = \langle ab, ac\rangle = \|a\|^2 \langle b, c\rangle = \langle (a^*a)b, c\rangle.$$

Jednakost (2) sada dobivamo tako što u (4) uvrstimo definiciju (1) od a^*, dok jednakost (3) dobivamo iz (2) primjenom involucije.

Tvrdnja (b) slijedi direktno iz četvrtog svojstva zadatka 3 te zadatka 7. □

Neka je A realna Hurwitzova algebra. Za element $a \in A$ redom definiramo njegov **realni i imaginarni dio**:

$$\operatorname{Re} a := \frac{1}{2}(a + a^*) \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im} a = \frac{1}{2}(a - a^*).$$

Ako je $a = \operatorname{Re} a$, kažemo da je a **realan element**, a ako je $a = \operatorname{Im} a$ kažemo da je a **čisto imaginarni element**. Očito je element $a \in A$ realan ako i samo ako je $a \in \mathbb{R}1_A$.

Zadatak 8. Neka je A realna Hurwitzova algebra. Označimo s $\operatorname{Im}(A)$ potprostor svih čisto imaginarnih elemenata u A. Dokažite:

(a) $\operatorname{Im}(A) = \{a \in A : a^2 \in \mathbb{R}1_A,\ a \notin \mathbb{R}1_A\} \cup \{0\}$.

(b) $A = (\mathbb{R}1_A) \oplus \operatorname{Im}(A)$ (ortogonalna suma potprostora).

3 Cayley-Dicksonova konstrukcija

Za sada znamo da (do na izomorfizam) postoje tri realne Hurwitzove algebre: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$. Štoviše imamo prirodne inkluzije $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$. Sada ćemo opisati tzv. **Cayley-Dicksonovu konstrukciju**[4,5] iz koje ćemo dobiti i još jednu realnu Hurwitzovu algebru dimenzije 8 – *algebru oktoniona* $\mathbb{O}$.

U tu svrhu fiksirajmo proizvoljnu realnu Hurwitzovu algebru A dimenzije barem 2. Jer je $\mathbb{R}1_A \subset A$, A svakako sadrži (barem jednu) pravu podalgebru. Neka je B bilo koja *prava konačnodimenzionalna podalgebra* od A. Izaberimo proizvoljan element $j \in A$ norme 1 koji je ortogonalan na B. Posebno, jer je $1_A \in B$, imamo $\langle j, 1_A\rangle = 0$. Odavde slijedi

$$j^* = -j \qquad \Longrightarrow \qquad j^2 = -1_A.$$

Nadalje, prema definiciji involucije na realnim Hurwitzovim algebrama, B je trivijalno zatvorena s obzirom na involuciju, tako da za sve $b, c \in B$ imamo $\langle b, cj\rangle = \langle c^*b, j\rangle = 0$. Odavde slijedi da je

$$Bj := \{bj : b \in B\}$$

[4] Arthur Cayley (1821.–1895.), britanski matematičar
[5] Leonard Eugene Dickson (1874.–1954.), američki matematičar

potprostor od A koji je ortogonalan na B. Nadalje, jer je algebra A alternativna (Korolar 2.9), imamo

$$(xj)(j^{-1}) = (xj)(-j) = -(xj)j = -x(j^2) = x \qquad \forall x \in A,$$

(mogli smo se i direktno pozvati na zadatak 7), tako da je preslikavanje $\phi : B \to Bj$ definirano s $\phi(b) := bj$ linearna bijekcija. Posebno je

$$\dim_{\mathbb{R}} Bj = \dim_{\mathbb{R}} B. \tag{5}$$

Neka je

$$C := B \oplus Bj \subseteq A.$$

Zbog (5) je $\dim_{\mathbb{R}} C = 2\dim_{\mathbb{R}} B$. Tvrdimo da je C podalgebra od A te da za sve $a, b, c, d \in B$ vrijede sljedeće jednakosti:

$$(a + bj)^* = a^* - bj, \tag{6}$$

$$(a + bj)(c + dj) = (ac - d^*b) + (bc^* + da)j. \tag{7}$$

Zaista, jer je $j \perp B$, za $b \in B$ imamo

$$0 = 2\langle j, b^*\rangle 1_A = 2\langle jb, 1_A\rangle 1_A = (jb)^* + jb = -b^*j + jb,$$

tako da je

$$jb = b^*j \qquad \forall b \in B. \tag{8}$$

Odavde dobivamo jednakost (6). Kako bismo dokazali jednakost (7), dovoljno je dokazati sljedeće identitete:

$$a(dj) = (da)j, \tag{9}$$

$$(bj)c = (bc^*)j, \tag{10}$$

$$(bj)(dj) = -d^*b. \tag{11}$$

Jer je $Bj \perp B$, koristeći (8) te zadatke 2 i 3, za proizvoljan $x \in A$ redom imamo

$$\begin{aligned}\langle a(dj), x\rangle &= \langle dj, a^*x\rangle = \langle (dj)^*, (a^*x)^*\rangle = -\langle dj, x^*a\rangle = \langle da, x^*j\rangle \\ &= \langle da, -xj + 2\langle x, 1_A\rangle j\rangle = -\langle da, xj\rangle = \langle (da)j, x\rangle,\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}\langle (bj)(dj), x\rangle &= \langle bj, x(dj)^*\rangle = \langle (bj)^*, (x(dj)^*)^*\rangle = -\langle jb^*, (dj)x^*\rangle \\ &= -\langle bj, (dj)x^*\rangle = \langle bx^*, (dj)j\rangle = -\langle bx^*, d\rangle = -\langle d^*b, x\rangle.\end{aligned}$$

Time smo dokazali jednakosti (9) i (11). Jednakost (10) dobivamo primjenom involucije na jednakost (9), uz supstituciju $a \leftrightarrow c^*$ i $d \leftrightarrow b$.

Napokon, jer je norma na A multiplikativna, iz (7) dobivamo identitet

$$(\|a\|^2 + \|b\|^2)(\|c\|^2 + \|d\|^2) = \|ac - d^*b\|^2 + \|bc^* + da\|^2,$$

iz kojeg slijedi

$$\langle ac, d^*b\rangle = \langle bc^*, da\rangle.$$

Dakle, za sve $a, b, c, d \in B$ vrijedi

$$\langle d(ac), b\rangle = \langle (da)c, b\rangle,$$

odakle dobivamo

$$d(ac) = (da)c.$$

Time smo dokazali sljedeći rezultat:

Propozicija 3.1. *Svaka prava konačnodimenzionalna podalgebra realne Hurwitzove algebre je nužno asocijativna.*

4 Algebra oktoniona $\mathbb{O}$

Primjenom Cayley-Dicksonove konstrukcije na algebru kvaterniona $\mathbb{H}$, dolazimo do algebre oktoniona $\mathbb{O}$ koju možemo konkretno realizirati na sljedeći način:

- Kao unitarni prostor, $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$. Označimo s $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_8\}$ kanonsku ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^8$. Stavimo

$$1 := \mathbf{e}_1 \qquad \text{i} \qquad e_k := \mathbf{e}_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 7),$$

  tako da se svaki $a \in \mathbb{O}$ može na jedinstven način prikazati u obliku

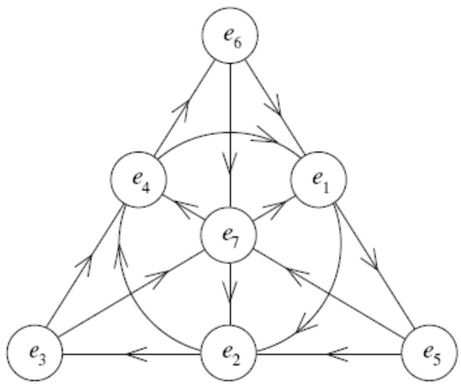
$$a = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_7 e_7,$$

  za neke realne brojeve $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_7$.

- Slično kao i na kvaternionima $\mathbb{H}$, na prostoru $\mathbb{O}$ definiramo operaciju množenja tako da najprije specificiramo međusobne produkte elemenata $e_1, \ldots, e_7$. Najprije deklariramo da je 1 multiplikativna jedinica u $\mathbb{O}$ te definiramo

$$e_1^2 = e_2^2 = \ldots = e_7^2 = -1.$$

  Međusobne produkte različitih $e_j e_k$ najjednostavnije je zapamtiti koristeći sljedeću sliku:



Slika preuzeta iz članka J. C. Baez, *The octonions*, `https://arxiv.org/pdf/math/0105155.pdf`

  To je ilustracija tzv. **Fanove ravnine**[6], odnosno konačne projektivne ravnine reda 2. Fanova ravnina ukupno ima 7 točaka ($e_1, \ldots, e_7$) i 7 pravaca (stranice trokuta, visine trokuta i kružnica), svake dvije točke određuju jedinstven pravac koji njima prolazi, svaki pravac sadrži točno tri točke (koje su ciklički uređene strelicama kao na slici), te kroz svaku točku prolaze točno tri pravca. Dakle, ako je (e_i, e_j, e_k) ciklički uređena trojka, tada je

$$e_i e_j = e_k \qquad \text{te} \qquad e_k e_j = -e_k.$$

  Npr. imamo: $e_2 e_1 = -e_4$, $e_2 e_6 = e_7$, $e_3 e_6 = -e_4$, $e_5 e_4 = -e_7$, $e_7 e_6 = -e_2$.

  Definiciju množenja zatim po bilinearnosti proširujemo na čitav $\mathbb{O}$ i na taj način $\mathbb{O}$ dobiva strukturu algebre.

- Nije teško (ali je naporno) provjeriti da je euklidska norma na $\mathbb{O}$ multiplikativna s obzirom na prethodno definirano množenje, tako da je $\mathbb{O}$ zaista realna Hurwitzova algebra dimenzije 8.

- S obzirom da je $\mathbb{O}$ realna Hurwitzova algebra, ona je alternativna (Korolar 2.9). Nadalje, algebra $\mathbb{O}$ nije asocijativna, jer npr. imamo

$$-e_6 = (e_1 e_2) e_3 \neq e_1 (e_2 e_3) = e_6.$$

[6] Gino Fano (1871.–1952.), talijanski matematičar

- Kao i na svakoj realnoj Hurwitzovoj algebri, involucija na $\mathbb{O}$ je definirana formulom (1). Eksplicitno, imamo
$$(a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_7e_7)^* = a_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - \ldots - a_7e_7.$$
Nije teško direktno iz definicije množenja na $\mathbb{O}$ provjeriti da za sve $a \in \mathbb{O}$ vrijedi poznati identitet
$$a^*a = aa^* = \|a\|^2 1.$$

Definicija 4.1. Ovako definirana (Hurwitzova) algebra $\mathbb{O}$ zove se **algebra oktoniona**.

Napomena 4.2. Oktonione je prvotno otkrio J. T. Graves[7] 1894. godine, ubrzo nakon što je W. R. Hamilton[8] otkrio kvaternione. Oktonione je nezavisno otkrio i A. Cayley, a njegov članak o tom oktriću (objavljen 1895. godine) izašao je ranije nego što je objavljen Gravesov članak. Zbog toga se otkriće oktoniona često (i nepravdeno) pripisuje samo Cayleyu te se njemu u čast govori o Cayleyevim okotonionima ili Cayleyevim brojevma.

5 Klasifikacija realnih Hurwitzovih algebri

Koristeći prethodna razmatranja, sada možemo (do na izomorfizam) u potpunosti klasificirati realne Hurwitzove algebre. Neka je stoga A realna Hurwitzova algebra.

- Ako je $\dim_{\mathbb{R}} A = 1$, tada je $A = \mathbb{R}1_A \cong \mathbb{R}$.
- Neka je $\dim_{\mathbb{R}} A > 1$. Tada je $B_1 := \mathbb{R}1_A$ prava podalgebra od A pa Cayley-Dicksonovom konstrukcijom na B_1 dobivamo dvodimenzionalnu podalgebru B_2 od A koja je izomorfna s algebrom kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Posebno, ako je $\dim_{\mathbb{R}} A = 2$, imamo $A \cong \mathbb{C}$.
  - Ako je $\dim_{\mathbb{R}} A > 2$, Cayley-Dicksonovom konstrukcijom na podalgebru B_2 dolazimo do podalgebre B_4 dimenzije 4 koja je izomorfna algebri kvaterniona $\mathbb{H}$ (zadatak 9). Posebno, ako je $2 < \dim_{\mathbb{R}} A \leq 4$, imamo $A \cong \mathbb{H}$, tako da ne postoje trodimenzionalne realne Hurwitzove algebre.
  - Ako je $\dim_{\mathbb{R}} A > 4$, Cayley-Dicksonovom konstrukcijom na podalgebru B_4 dolazimo do podalgebre B_8 dimenzije 8. Primijetimo da je B_8 neasocijativna algebra. Naime, neka je $B_8 = B_4 \oplus B_4 j$, gdje je $j \in A$ kao u Cayley-Dicksonovoj konstrukciji. Kako algebra $B_4 \cong \mathbb{H}$ nije komutativna, postoje elementi $a, b \in B_4$ takvi da je $ab \neq ba$. Tada je i $(ba)j \neq (ab)j$ pa koristeći svojstvo (9) dobivamo
  $$a(bj) = (ba)j \neq (ab)j.$$
  Štoviše, algebra B_8 je izomorfna algebri oktoniona $\mathbb{O}$ (zadatak 9) Dakle, ako je $4 < \dim_{\mathbb{R}} A \leq 8$, slijedi $A \cong \mathbb{O}$.
  - Ostaje još primijetiti da tu Cayley-Dicksonova konstrukcija staje. Naime, ako bi postojala realna Hurwitzova algebra A dimenzije veće od 8, tada bi prema prethodnom razmatranju A sadržavala neasocijativnu pravu podalgebru $B_8 \cong \mathbb{O}$, što je kontradikcija s Propozicijom 3.1.

Zadatak 9. Koristeći iste oznake kao u prethodnom razmatranju, dokažite da je $B_4 \cong \mathbb{H}$ i $B_8 \cong \mathbb{O}$.

Sve zajedno, dokazali smo sljedeći važan teorem:

Teorem 5.1 (Hurwitzov teorem, 1898.). *Do na izomorfizam postoje točno četiri realne Hurwitzove algebre: algebra realnih brojeva $\mathbb{R}$, algebra kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, algebra (Hamiltonovih) kvaterniona $\mathbb{H}$ i algebra (Cayleyevih) oktoniona $\mathbb{O}$.*

Napomena 5.2. Hurwitzov teorem ima razna poopćenja, između ostalog na algebre nad proizvoljnim poljima. Također, tvrdnja Hurwitzovog teorema vrijedi i uz znatno slabije pretpostavke na algebru A. Tako je npr. dovoljno samo zahtijevati da je A normirana algebra s jedinicom čija je norma multiplikativna (Urbanik-Wrightov teorem[9,10] iz 1960.).

[7] John Thomas Graves (1806.–1870.), irski matematičar i pravnik
[8] William Rowan Hamilton (1805.–1865.), irski matematičar
[9] Kazimierz Urbanik (1930.–2005.), poljski matematičar
[10] Fred Boyer Wright, Jr. (1925.–), američki matematičar

Nadalje, M. Zorn[11] je 1930. godine dokazao sljedeće direktno poopćenje Frobeniusovog teorema: do na izomorfizam, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ su jedine konačnodimenzionalne alternativne realne algebre s dijeljenjem. Štoviše, koristeći alate algebarske topologije, R. Bott[12], J. Milnor[13] i M. Kervaire[14] su 1958. godine dokazali da je svaka konačnodimenzionalna realna algebra s dijeljenjem nužno dimenzije 1, 2, 4 ili 8.

Na kraju ovog predavanja spomenimo da bismo na analogan način mogli promatrati i kompleksne Hurwitzove algebre. Prisjetimo se da smo kao direktnu posljedicu Osnovnog teorema algebre dobili da je $\mathbb{C}$ jedina konačnodimenzioalna kompleksna algebra s dijeljenjem. Na sličan način ispada da je $\mathbb{C}$ i jedina konačnodimenzionalna kompleksna Hurwitzova algebra. Štoviše, u analogiji sa spomenutim Urbanik-Wrightovim teoremom (Napomena 5.2), imamo sljedeći rezultat:

Propozicija 5.3. *Neka je A konačnodimenzionalna kompleksna algebra opskrbljena s multiplikativnom normom. Tada je $A \cong \mathbb{C}$.*

Zadatak 10. Dokažite Propoziciju 5.3.

6 Domaća zadaća

- Za domaću zadaću potrebno je riješiti barem 5 od navedenih 10 zadataka.
- Zadaću predajete kao *jedan pdf file* preko sustava Merlin do 13. 7. 2021. u 23:59.
- Dozvoljeno je pisati u LaTeXu.

[11]Max August Zorn (1906.–1993.), njemački matematičar (poznat po Zornovoj lemi iz teorije skupova)
[12]Raoul Bott (1923.–2005.), mađarsko-američki matematičar
[13]John Willard Milnor (1931.–), američki matematičar
[14]Michel André Kervaire (1927.–2007.), francuski matematičar