MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 12. veljače 2024.

Zadatak 1. (24 boda) Neka je dan niz

$$a_1 = a_2 = 0, \quad a_{n+2} = a_{n+1}^2 + \frac{7}{15}a_n + \frac{1}{15}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte konvergira li niz (a_n) i ako da, odredite mu limes.

Rješenje. Pretpostavimo da niz konvergira i označimo limes sa L. Vrijedi

$$\begin{aligned} L &= L^2 + \frac{7}{15}L + \frac{1}{15} \\ L^2 - \frac{8}{15}L + \frac{1}{15} &= 0 \\ (L - \frac{1}{5})(L - \frac{1}{3}) &= 0. \end{aligned}$$

Dakle $L = \frac{1}{5}$ ili $\frac{1}{3}$.

Pokažimo indukcijom da je niz omeđen odozgo s $\frac{1}{5}$, a odozdo s 0, odnosno za svaki $n \in \mathbb{N}$ $a_n, a_{n+1} \in [0, \frac{1}{5}]$. Za $n = 1$ imamo $a_1 = a_2 = 0 \in [0, \frac{1}{5}]$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za taj n. Koristeći pretpostavku indukcije imamo

$$0 \leq a_{n+1}^2 + \frac{7}{15}a_n + \frac{1}{15} \leq (\frac{1}{5})^2 + \frac{7}{15}\frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{1}{5}(\frac{1}{5} + \frac{7}{15} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{5}.$$

Kako je $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + \frac{7}{15}a_n + \frac{1}{15}$, tvrdnja vrijedi za $n + 1$.

Pokažimo sada indukcijom da je niz rastući, odnosno, za svaki $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2}$. Iz $a_1 = a_2 = 0$ i $a_3 = \frac{1}{15}$ vidimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za taj n. Koristeći pretpostavku indukcije, i već pokazano da članovi niza nisu negativni, imamo

$$a_{n+3} = a_{n+2}^2 + \frac{7}{15}a_{n+1} + \frac{1}{15} \geq a_{n+1}^2 + \frac{7}{15}a_n + \frac{1}{15} = a_{n+2}.$$

Uočimo, da članovi niza nisu negativni smo koristili da bi iz $a_{n+2} \geq a_{n+1}$ zaključili $a_{n+2}^2 \geq a_{n+1}^2$ Dakle, tvrdnja vrijedi za $n + 1$.

Niz je rastući i omeđen odozgo pa je konvergentan. Manji od kandidata za limes, $\frac{1}{5}$, je gornja međa, pa je i limes niza (a_n).

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 12. veljače 2024.

Zadatak 2.

(a) (16 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \frac{\sqrt{n^2+k}-n}{\sqrt{n^2+2k}-n} : n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

ako postoje.

(b) (10 bodova) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija zadana s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Ispitajte u kojim točkama je funkcija f neprekidna.

Rješenje.

(a) Označimo izraz koji definira članove skupa A s $R(n,k)$. Prvo, uočimo da vrijedi

$$R(n,k) = \frac{\sqrt{n^2+k}-n}{\sqrt{n^2+2k}-n} = \frac{1 \cdot \left(\sqrt{n^2}+2k+n\right)}{2 \cdot \left(\sqrt{n^2+k}+n\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{2k}{n^2}}+1}{2\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)}$$

Sada, vidimo da je $1/2$ donja međa skupa A jer vrijedi

$$\frac{\sqrt{1+\frac{2k}{n^2}}+1}{2\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)} > \frac{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}{2\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

Isto, kako vrijedi (ako gledamo $k=1$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} = \frac{1}{2},$$

dobivamo da je $1/2$ infimum skupa A. S druge pak strane,

$$\frac{\sqrt{1+\frac{2k}{n^2}}+1}{2\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)} < \frac{\sqrt{2+\frac{2k}{n^2}}+\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

pa je $\sqrt{2}/2$ gornja međa skupa A te vrijedi (ako gledamo $k=n^3$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2n^3}{n^2}}+1}{2\left(\sqrt{1+\frac{n^3}{n^2}}+1\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dakle, supremum skupa A je $\sqrt{2}/2$.

(b) Pokazat ćemo da f nema limes niti u jednoj točki svoje domene, pa ne može vrijediti neprekidnost. Neka je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Zbog gustoće $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$, možemo pronaći nizove $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ te $(r_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takve da $q_n \to c$ i $r_n \to c$. Međutim, kako je $f(q_n) = 1$ te $f(r_n) = 0$, vidimo da $f(q_n) \to 1$ i $f(r_n) \to 0$, pa limes ne može postojati.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 12. veljače 2024.

Zadatak 3. Dana je funkcija

$$g(x) = \arccos\left(\frac{3}{2}x^2 - 3x + 1\right).$$

(a) (8 bodova) Odredite prirodnu domenu D funkcije g.

(b) (8 bodova) Odredite najveći interval I koji sadrži $x_0 = \frac{1}{2}$, te je g na I injekcija.

(c) (8 bodova) Neka je $f : I \to g(I)$ dana pravilom $f(x) = g(x)$. Odredite f^{-1}.

Rješenje.

a) Mora vrijediti $-1 \leq \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 \leq 1$.

   i) $-1 \leq \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 \iff \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2 \geq 0$.
   Zadnja nejednakost vrijedi za sve x jer je diskriminanta od $\frac{3}{2}x^2 - 3x + 2$ negativna, a vodeći koeficijent pozitivan.

   ii) $\frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 \leq 1 \iff \frac{3}{2}x^2 - 3x = \frac{3}{2}x(x-2) \leq 0$.

   Dakle $D = [0, 2]$.

b) Kako je arccos injekcija, I je najveći interval u D na kojem je $\frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$ injekcija, a sadrži $\frac{1}{2}$. Tjeme ove kvadratne funkcije je $-(-3)/[2(3/2)] = 1$, pa je $I = [0, 1]$.

c) $\frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$ je na I padajuća, pa preslika I na $[-\frac{1}{2}, 1]$. Označimo

$$g_1 : I \to [-\frac{1}{2}, 1], \quad g_1(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1,$$
$$g_2 : [-\frac{1}{2}, 1] \to [0, \frac{2\pi}{3}], \quad g_2(x) = \arccos x.$$

Sada je $f = g_2 \circ g_1$ i $f^{-1} = g_1^{-1} \circ g_2^{-1} : [0, \frac{2\pi}{3}] \to [0, 1]$.

$$g_1(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 = y \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 - y = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 6(1-y)}}{3}$$
$$g_1^{-1}(y) = \frac{3 - \sqrt{3 + 6y}}{3}$$
$$g_2^{-1}(y) = \cos y$$
$$f^{-1}(y) = \frac{3 - \sqrt{3 + 6\cos y}}{3}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 12. veljače 2024.

Zadatak 4.

(a) (12 bodova) Odredite

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{2}} \sin(xe^{-x})$$

(b) (14 bodova) Postoji li nekonstantna neprekidna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $f(\mathbb{R}) \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$?

Rješenje.

(a) Dokažimo najprije da je $\lim_{x\to\infty} xe^{cx} = 0$ za svaki $c > 0$.

Označimo $n := \lfloor x \rfloor$. Tada zbog monotonosti funkcija vrijedi

$$0 \leq xe^{-cx} \leq (n+1)e^{-cn}.$$

Na vježbama, u 2. poglavlju se pokaže da je $\lim_{n\to\infty}(n+1)e^{-cn} = \lim_{n\to\infty} e^{-cn} + ne^{-cn} = 0$. To znači da za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ takav da je $0 < xe^{-cx} < \varepsilon$ za sve x takve da je $\lfloor x \rfloor \geq M$, što sigurno vrijedi ako je $x > M + 1$. Dakle, po definiciji limesa vrijedi $\lim_{x\to\infty} xe^{-cx} = 0$ za sve $c > 0$.

Sada koristeći navedeno zaključujemo da $xe^{-x} \to 0$ za $x \to \infty$ pa koristeći limes $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ vrijedi:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{2}} \sin(xe^{-x}) = \lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin(xe^{-x})}{xe^{-x}} = 0 \cdot 1 = 0$$

(b) Takva funkcija ne postoji. Naime, neka je f neprekidna i nekonstantna funkcija na $\mathbb{R}$. Tada postoje $x_1 < x_2$ takvi da je $f(x_1) < f(x_2)$ i po Bolzano - Weiestrassovom teoremu funkcija f na intervalu $[x_1, x_2]$ postiže minimum m, maksimum M i sve vrijednosti u intervalu $[m, M]$, gdje je $m \leq f(x_1) < f(x_2) \leq M$.

Na predavanju se pokaže da je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$ pa postoji broj

$$q \in \left[m, \frac{m+2M}{3}\right] \cap \mathbb{Q}.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ dovoljno velik vrijedi

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}}{n} \leq \frac{M-m}{3}$$

pa je

$$a := q + \frac{\sqrt{2}}{n} \in [m, M]$$

i broj a je iracionalan. Naime, kad bi bio racionalan, tada bi i $\sqrt{2} = 2^n(a-q)$ bio racionalan, što je dokazano na predavanju da nije istina. Dakle, kako je $a \in [m, M]$, mora postojati $x \in [x_1, x_2]$ takav da je $f(x) = a$ pa ne može vrijediti da je $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$ pa posebno ni $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q} \cap [0,1]$.