Zadatak 2.5.6. Odredite koje se od sljedećih funkcija daju razviti u Laurentov red u okolini točke 0.

(a) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{z}}$

Rješenje. U svakom od ova tri podzadatka treba ispitati da li postoji $\rho > 0$ takav da je funkcija holomorfna na probušenom krugu $K^*(0, \rho)$. Ako postoji, funkcija se može razviti u Laurentov red oko 0.

(a) Funkcija $z \mapsto \sin z$ je holomorfna na $\mathbb{C}$, pa je funkcija $z \mapsto \sin \frac{1}{z}$ holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dakle, zadana funkcija se može razviti u Laurentov red na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Funkcija $z \mapsto \frac{1}{\sin z}$ nije definirana tamo gdje je $\sin z = 0$, tj. za

$$z \in \operatorname{Arc}\sin 0 = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dakle, funkcija $z \mapsto \frac{1}{\sin z}$ je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Oko nule $z \mapsto \frac{1}{\sin z}$ je dakle holomorfna na probušenom krugu $K^*(0, \pi)$, pa se na tom području može razviti u Laurentov red.

(c) Funkcija $z \mapsto \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ nije definirana tamo gdje je $z = 0$ i tamo gdje je $\sin \frac{1}{z} = 0$, tj. nije definirana za

$$z \in \left\{ \frac{1}{k\pi} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{0\}.$$

Sada vidimo da za svaki $\rho > 0$ skup $K^*(0, \rho)$ sadrži točke u kojima funkcija f nije definirana, zbog

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k\pi} = 0.$$

Dakle, zadana funkcija se ne može razviti u Laurentov red niti na jednoj okolini točke 0.

$\square$

Zadatak 2.5.7. Razvijte sljedeće funkcije u Laurentov red u okolini zadane točke i odredite područje konvergencije dobivenog reda.

(a) $f(z) = z^2 \sin \dfrac{1}{z-1}$ oko 1

(b) $f(z) = \sin z \cdot \sin \frac{1}{z}$ oko 0

(c) $f(z) = e^{z + \frac{1}{z}}$ oko 0

Rješenje. (a) Uvedimo supstituciju $w = z - 1$. Za $w \neq 0$ imamo

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^2 \sin\frac{1}{z-1} = (w+1)^2 \sin\frac{1}{w} = (w^2+2w+1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{1}{w}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!w^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2}{(2n+1)!w^{2n}} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!w^{2n+1}} \\
&= w + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\right)\frac{1}{w^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2}{(2n+1)!w^{2n}} \\
&= (z-1) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(1-2n-4n^2)}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n}}.
\end{aligned}$$

Red konvergira na $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

(b) Laurentov red oko nule za sinus je

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

i on konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$. Zaključujemo da je Laurentov red oko nule za $\sin\frac{1}{z}$ jednak

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{-2n-1}}{(2n+1)!}$$

i da konvergira za sve $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Laurentov red za $f(z)$ dobit ćemo kao umnožak ta dva Laurentova reda:

$$f(z) = \sin z \cdot \sin\frac{1}{z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m \frac{z^{-2m-1}}{(2m+1)!}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k,$$

pri čemu vidimo da je koeficijent

$$c_k = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_0^2,\ 2n+1-2m-1=k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}.$$

Zamjećujemo da ćemo dobiti koeficijente c_k samo za parne potencije, jer $k = 2(n-m)$. Označimo $k = 2l$. Sada imamo $c_{2l+1} = 0$ i

$$c_{2l} = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_0^2,\ n-m=l} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)!(2m+1)!} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m+l}}{(2m+2l+1)!(2m+1)!} & l \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-l}}{(2n+1)!(2n-2l+1)!} & l < 0 \end{cases}$$

Dakle, možemo pisati

$$c_{2l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2n+1)!(2n+2|l|+1)!}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Znamo da funkcija f ima Laurentov red oko nule konvergentan na probušenoj ravnini $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ i znamo da njegovi koeficijenti moraju biti jednaki ovima, dakle, zaključujemo da gore dobiven red koji definira koeficijent c_{2l} zaista konvergira. (Kako biste dokazali direktno da red konvergira?)

Laurentov red je dakle

$$f(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2n+1)!(2n+2|l|+1)!} \right) z^{2l}.$$

(c) Imamo

$$f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} = e^z e^{\frac{1}{z}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m! z^m} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k,$$

gdje je koeficijent

$$c_k = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_0^2,\ n-m=k} \frac{1}{n!m!} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+k)!m!} & k \geq 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n-k)!} & k < 0 \end{cases}$$

Možemo dakle pisati

$$c_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+|k|)!}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Laurentov red je dakle

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+|k|)!} \right) z^k.$$

Laurentov red konvergira na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$\square$

2.6 Singulariteti

Zadatak 2.6.1. Odredite singularitete i ispitajte njihov karakter za funkcije

(a) $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$

(b) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}} - 1}{z-1}$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{z}}$

Rješenje. (a) Singulariteti funkcije f su točke z u kojima funkcija tg nije definirana (to jest $\cos z = 0$), a to su točke skupa

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

i točke z u kojima je $\operatorname{tg} z = 0$, a to su točke skupa

$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Skup singulariteta je unija

$$\left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Odredimo prvo kojeg su tipa singulariteti oblika $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vrijedi

$$f(z) = \frac{z}{\sin z} \cos z,\ \ z \in \mathbb{C} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\},$$

pa je

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \left(\frac{z}{\sin z} \cos z\right) = 0,$$

jer je

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \cos z = 0, \quad \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{z}{\sin z} \in \mathbb{C}.$$

Budući da postoji limes funkcije f u točkama $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, zaključujemo da se radi o uklonjivim singularitetima.

Odredimo sada kojek su tipa singulariteti oblika $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Razdvojit ćemo ovo na dva slučaja, kada je $k = 0$ i kada je $k \neq 0$.

Za $k = 0$ iz $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = 1$ imamo:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} \cos z = 1,$$

pa zaključujemo da je 0 uklonjiv singularitet funkcije f.

Kada $z \to k\pi, k \neq 0$, tada $\sin z \to 0, |\cos z| \to 1$. Slijedi da je

$$\lim_{z\to k\pi} |f(z)| = \lim_{z\to k\pi} \frac{|z|}{|\sin z|} |\cos z| = +\infty,$$

pa zaključujemo da su te točke polovi funkcije f.

Moramo još odrediti kojeg reda su polovi $k\pi, k \neq 0$. To možemo tako da odredimo red nultočaka $k\pi$, $k \neq 0$, funkcije $\frac{1}{f}$.

Vrijedi

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{\sin z}{z \cos z} = \frac{1}{z \cos z} \cdot \sin z.$$

Funkcija $z \mapsto \frac{1}{z \cos z}$ je holomorfna na nekim okolinama točaka $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ i te točke nisu njene nultočke, pa je dovoljno gledati red nultočaka $k\pi$ za funkciju $z \mapsto \sin z$.

Vidimo da je $\sin(k\pi) = 0$ i $\sin'(k\pi) = \cos(k\pi) \neq 0$. Dakle, red tih nultočaka je 1 pa su točke $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ polovi prvog reda funkcije f.

(b)

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} - 1}{z - 1}$$

Singulariteti funkcije f su 0 i 1 jer funkcija u tim točkama nije definirana.

Odredimo prvo kojeg je tipa singularitet 0. Vrijedi

$$e^{\frac{1}{z}} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}.$$

Vidimo da je u tom razvoju oko 0 beskonačno mnogo članova s negativnim potencijama, pa je 0 bitan singularitet za funkciju $z \mapsto e^{\frac{1}{z}} - 1$. To znači da $\lim_{z\to 0}(e^{\frac{1}{z}} - 1)$ ne postoji.

Budući da je $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z-1} = -1$, zaključujemo da ne postoji ni $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{\frac{1}{z}}-1}{z-1}$, pa je 0 bitan singularitet funkcije f.

Promotrimo sada singularitet 1. Funkcija $z \mapsto e^{\frac{1}{z}} - 1$ je holomorfna u 1. Razvijmo tu funkciju u red oko 1. Taj red neće imati članova s negativnim potencijama, jer je funkcija holomorfna u 1. Imamo

$$e^{\frac{1}{z}} - 1 = a_0 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + a_3(z-1)^3 + \dots,$$

gdje je $a_0 = f(1) = e - 1$.

Funkcija $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ ima u 1 pol prvog reda (ona je već razvijena u red oko točke 1).

Dakle, imamo

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} - 1}{z-1} = \frac{1}{z-1}\left(e - 1 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + a_3(z-1)^3 + \dots\right) =$$
$$= \frac{e-1}{z-1} + a_1 + a_2(z-1) + a_3(z-1)^2 + \dots$$

Dakle, točka 1 je pol prvog reda funkcije f.

(c)

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

Singulariteti funkcije f su točka 0 i točke z u kojima je $\sin \frac{1}{z} = 0$, dakle točke skupa

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Već smo vidjeli u primjeru na početku poglavlja da singularitet 0 funkcije f nije izolirani singularitet, pa nam preostaje odrediti tip ostalih singulariteta.

Točke $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ su nultočke funkcije

$$z \mapsto \frac{1}{f(z)} = \sin \frac{1}{z}.$$

One su reda 1 jer je vrijednost funkcije $\sin' \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} \cos \frac{1}{z}$ u točki $\frac{1}{k\pi}$ različita od 0. Dakle, točke $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ su polovi prvog reda funkcije f.

$\square$