Zadatak 2.6.2. Odredite singularitete i ispitajte njihov karakter za funkcije

(a) $f(z) = \dfrac{z-2}{z(z^2+9)^3}$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{2+e^{-z}}$

(c) $f(z) = \dfrac{1-e^z}{2+e^z}$

Rješenje. (a) Singulariteti funkcije f su 0, $3i$, $-3i$, što vidimo iz

$$f(z) = \frac{z-2}{z(z^2+9)^3} = \frac{z-2}{z(z-3i)^3(z+3i)^3}.$$

Pogledajmo prvo kojeg je tipa singularitet 0. Funkcija $z \mapsto \frac{z-2}{(z^2+9)^3}$ je holomorfna u 0 i vrijedi

$$\frac{z-2}{(z^2+9)^3} = -\frac{2}{9^3} + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

za neke koeficijente $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$. Sada je

$$\frac{z-2}{z(z^2+9)^3} = -\frac{2}{9^3} \cdot \frac{1}{z} + a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots$$

pa je 0 pol prvog reda funkcije f.

Pogledajmo sada kojeg je tipa singularitet $3i$. Funkcija $z \mapsto \frac{z-2}{z(z+3i)^3}$ je holomorfna u $3i$. Vrijedi

$$\frac{z-2}{z(z+3i)^3} = \frac{3i-2}{3i(6i)^3} + a_1(z-3i) + a_2(z-3i)^2 + a_3(z-3i)^3 + \dots$$

za neke koeficijente $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$. Sada je

$$\frac{z-2}{z(z^2+9)^3} = \frac{3i-2}{3 \cdot 6^3} \cdot \frac{1}{(z-3i)^3} + a_1 \frac{1}{(z-3i)^2} + a_2 \frac{1}{z-3i} + a_3 + \dots$$

pa je $3i$ pol trećeg reda funkcije f.

Pogledajmo još kojeg je tipa singularitet $-3i$. Funkcija $z \mapsto \frac{z-2}{z(z-3i)^3}$ je holomorfna u $-3i$. Vrijedi

$$\frac{z-2}{z(z-3i)^3} = \frac{-3i-2}{-3i(-6i)^3} + a_1(z+3i) + a_2(z+3i)^2 + a_3(z+3i)^3 + \dots$$

za neke koeficijente $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$. Sada je

$$\frac{z-2}{z(z^2+9)^3} = \frac{-3i-2}{3 \cdot 6^3} \frac{1}{(z+3i)^3} + a_1 \frac{1}{(z+3i)^2} + a_2 \frac{1}{z+3i} + a_3 + \dots$$

pa je $3i$ pol trećeg reda funkcije f.

(b) Funkcija je

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2+e^{-z}}.$$

Singulariteti su 0 i $z_k = -\ln 2 - i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Da bismo vidjeli kojeg je tipa singularitet 0, primijetimo da je funkcija $z \mapsto \frac{1}{2+e^{-z}}$ holomorfna u 0 pa je

$$\frac{1}{2+e^{-z}} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

za neke koeficijente $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$. Sada je

$$\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2+e^{-z}} = \frac{1}{z^3} - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \dots$$

pa je 0 pol reda 3 funkcije f.

Točke $z_k, k \in \mathbb{Z}$, su nultočke prvog reda funkcije $z \mapsto 2 + e^{-z}$, pa su tada i polovi prvog reda funkcije $z \mapsto \frac{1}{2+e^{-z}}$. Budući da je funkcija $z \mapsto \frac{1}{z^3}$ holomorfna u tim točkama, slijedi da su točke z_k polovi prvog reda funkcije f za sve $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Funkcija je

$$f(z) = \frac{1-e^z}{2+e^z}.$$

Singulariteti funkcije f su točke $z_k = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Definiramo funkcije

$$g(z) = 1 - e^z, \;\; h(z) = 2 + e^z.$$

Odredit ćemo tip singulariteta z_k. Vidimo da je funkcija g holomorfna u točki z_k i vrijedi $g(z_k) = 1 - (-2) = 3$. Zbog toga je

$$g(z) = 3 + a_1(z - z_k) + a_2(z - z_k)^2 + \dots$$

za neke $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$. Budući da vrijedi

$$h(z_k) = 0, \;\; h'(z_k) = e^{z_k} = -2 \neq 0$$

slijedi da je točka z_k nultočka prvog reda funkcije h, pa onda i pol prvog reda funkcije $1/h$. Dakle, imamo

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{b_{-1}}{z - z_k} + b_0 + b_1(z - z_k) + \dots$$

za neke $b_{-1}, b_0, b_1, \dots \in \mathbb{C}$, pri čemu je $b_{-1} \neq 0$. Slijedi da je tada

$$f(z) = g(z) \cdot \frac{1}{h(z)} = \frac{3b_{-1}}{z - z_k} + \dots,$$

pa je točka z_k pol prvog reda funkcije f, za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

□

Zadatak 2.6.3. Neka je z_0 pol (odnosno bitan singularitet) funkcije f i neka je funkcija g holomorfna u z_0 te $g(z_0) \neq 0$. Dokažite da je tada z_0 pol (odnosno bitan singularitet) funkcije $z \mapsto f(z)g(z)$.

Rješenje. (i) Pretpostavimo da je z_0 pol funkcije f reda m. Tada možemo zapisati Laurentove redove funkcija u okolini z_0 na sljedeći način i vrijedi

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= \left(\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots \right) \cdot \left(b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \dots \right) \\ &= a_{-m} b_0 \frac{1}{(z-z_0)^m} + (a_{-m+1} b_0 + a_{-m} b_1) \frac{1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots \end{aligned}$$

Točka z_0 je pol funkcije f reda m pa mora biti $a_{-m} \neq 0$, a zbog uvjeta $g(z_0) \neq 0$ mora biti $b_0 \neq 0$. Dakle, $a_{-m} \cdot b_0 \neq 0$, pa je z_0 pol m-tog reda funkcije $z \mapsto f(z)g(z)$.

(ii) Pretpostavimo da je z_0 bitni singularitet funkcije f. Pokazat ćemo da tada z_0 ne može biti ni uklonjivi singularitet ni pol funkcije $z \mapsto f(z)g(z)$.

Kad bi z_0 bio uklonjivi singularitet funkcije fg, postojao bi limes

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = a \in \mathbb{C}.$$

Kako je $g(z_0) \neq 0$, vrijedi $\lim_{z \to z_0} 1/g(z) = 1/g(z_0)$, pa bi moralo vrijediti

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left(f(z)g(z) \cdot \frac{1}{g(z)} \right) = \lim_{z \to z_0} f(z)g(z) \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{a}{g(z_0)},$$

čime bi z_0 bio uklonjivi singularitet funkcije f.

Kad bi z_0 bio pol funkcije fg, imali bismo $\lim_{z \to z_0} |f(z)g(z)| = +\infty$, a kako je $\lim_{z \to z_0} 1/|g(z)| = 1/|g(z_0)| \in \mathbb{C}$ moralo bi vrijediti

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty \cdot \frac{1}{|g(z_0)|} = +\infty,$$

pa bi z_0 bio pol funkcije f.

Slično zaključivanje mogli smo provesti i u zadacima 2.6.1. (b), 2.6.2. (a) i (c). $\square$

Zadatak 2.6.4. Odredite singularitete i njihov karakter za funkcije

(a) $f(z) = z^2 \operatorname{ctg} z$

(b) $f(z) = \sin(e^{\frac{1}{z}})$

(c) $f(z) = e^{z - \frac{1}{z}}$

Rješenje. (a) Napišimo $f(z) = z^2 \operatorname{ctg} z = \frac{z^2 \cos z}{\sin z}$. Singulariteti su $z_k = k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$. Stavimo

$$g(z) = z^2 \cos z, \ h(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

Funkcija g je holomorfna u z_k i vrijedi

$$g(z_k) \neq 0 \text{ za } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Točke z_k su nultočke prvog reda funkcije $z \mapsto \sin z$, pa su onda polovi prvog reda funkcije $h(z)$. Prema Zadatku 2.6.3., točke z_k za $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ su polovi prvog reda funkcije f.

Preostaje nam odrediti tip singulariteta $z_0 = 0$. Iz

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = 1, \ \lim_{z \to 0} \cos z = 0, \ \lim_{z \to 0} z = 0$$

slijedi da je $\lim_{z \to 0} f(z) = 0$, pa je 0 uklonjivi singularitet funkcije f.

(b) Jedini singularitet funkcije $f(z)$ je u $z_0 = 0$ i pokazat ćemo da je to bitni singularitet. Promatrajmo nizove

$$a_k = \frac{1}{2k\pi i}, \ b_k = \frac{1}{(2k+1)\pi i}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi $\lim_k a_k = \lim_k b_k = 0$. Budući da je

$$\lim_k e^{1/a_k} = 1, \ \lim_k e^{1/b_k} = -1$$

slijedi

$$\lim_k f(a_k) = \sin 1, \ \lim_k f(b_k) = \sin(-1).$$

Zbog toga ne postoji limes $\lim_{z \to 0} f(z)$. Sljedeće, kad bi limes $\lim_{z \to 0} |f(z)|$ postojao i bio jednak ∞, ne bi moglo vrijediti $\lim_k |f(a_k)| = |\sin 1| \neq \infty$. Budući da vrijedi, zaključujemo da je 0 bitni singularitet funkcije f.

(c) Napišimo $f(z) = e^{z-\frac{1}{z}} = e^z \cdot e^{-\frac{1}{z}}$. Jedini singularitet ove funkcije je u $z_0 = 0$. Funkcija $z \mapsto e^z$ je holomorfna u točki z_0 i $e^{z_0} = 1 \neq 0$. Znamo da je Laurentov red u okolini 0 funkcije $z \mapsto e^{-\frac{1}{z}}$ jednak

$$e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-n},$$

pa je 0 bitni singularitet te funkcije. Prema Zadatku 2.6.3., točka 0 je bitni singularitet funkcije f.

$\square$