

Parcijalne diferencijalne jednačbe 2

Kolokvij 11.6.2019.

1. [12+12+8] Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

- (a) Pokažite da je $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ koristeći definiciju distribucije pridružene funkciji.
 (b) Vrijedi li $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$? Dokažite ili opovrgnite.
 (c) Odredite g' u smislu distribucija, gdje je $g = f \cdot \chi_{[-2019, 2019]}$.
2. [18] Izvedite rješenje zadatke koristeći Fourierovu transformaciju:

$$\begin{cases} u_t - 4\Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0, \cdot) = u_0, & \text{na } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

gdje je $u_0(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \sin(x_i)$.

3. [10] Izračunajte Fourierovu transformaciju funkcije $f(x) = \sin^2(x) \cos^2(x)$.
4. [10] Pokažite da je s

$$\langle T, \varphi \rangle := \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x^2) - \varphi(0)}{1 - \cos x} dx$$

dobro definirana distribucija na \mathbb{R} te odredite njen red.

5. [7+8]
- (a) Pronađite sve funkcije $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ za koje vrijedi $\varphi * \varphi = \varphi$.
 (b) Odredite limes niza distribucija $T_n(x) = n \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x)$.