Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2

Pisana provjera znanja 3.7.2020.

1. (3+4) Odredite jesu li sljedeća preslikavanja na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ distribucije:

   a) T_f, gdje je $f(x) = e^x \cos e^x$,

   b) $T = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$.

   Je li neko od ovih preslikavanja i temperirana distribucija? Svoje odgovore obrazložite.

2. (3) Odredite limes niza $T_n = n \cdot (\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$ u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. (5) Odredite Fourierovu transformaciju funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane s

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 2 - |x|, & 1 \leq |x| \leq 2, \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

4. (5) Koristeći Fourierovu transformaciju izvedite formulu za rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_t + u_x = u, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

   gdje je $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5. (2+5)

   a) Neka je $p \in [1, \infty]$ te $(f_n)_n \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ i $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Pokažite: ako vrijedi $f_n \xrightarrow{L^p} f$, onda vrijedi i $\widehat{f_n} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \hat{f}$.

   b) Neka je $f \in L^2(\mathbb{R})$ te stavimo

$$g_n(\xi) := \int_{-n}^{n} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

   Pokažite da vrijedi

$$g_n \xrightarrow{L^2} \hat{f}.$$

6. (8) Neka su $a, b : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ takvi da vrijedi sljedeće:

   - $a \in C^1([-1,1])$ i postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $a(x) \geq \varepsilon$ za sve $x \in [-1,1]$,
   - $b \in C([-1,1])$ i $b(x) \geq 0$ za sve $x \in [-1,1]$.

   Pokažite da postoji jedinstveni $u \in H_0^1(\langle -1, 1 \rangle)$ slabo rješenje problema

$$\begin{cases} -(au')' + bu = f, \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

   gdje je $f(x) = \sin x$. Je li taj u rješenje i u klasičnom smislu? Svoj odgovor obrazložite.

Rješenja

1. Linearnost preslikavanja je u oba slučaja očita. Kako je $f(x) = e^x \cos x$ neprekidna funkcija, ona je posebno u $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ te je dobro definiran element $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Također, kako je $f = g'$, gdje je $g(x) = \sin e^x$, te je $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, to je onda i $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Da je $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se vidi na identičan način kao u zadatku 1.2.10 s vježbi (poseban slučaj $a = 1$). Također, za $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ imamo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^{-1}(1+n^2)|\varphi(n)| \leq ||\varphi||_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2},$$

   odakle, zbog konvergencije reda u posljednjem izrazu, zaključujemo da T uistinu je temperirana distribucija.

2. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\langle T_n, \varphi\rangle = n \cdot (\varphi(1/n) - \varphi(-1/n)) = 2\varphi'(x_n),$$

   za neki $x_n \in \langle -1/n, 1/n\rangle$. Puštanjem $n \to \infty$ zbog $x_n \to 0$ imamo

$$\lim_n \langle T_n, \varphi\rangle = 2\varphi'(0) = \langle -2\delta_0', \varphi\rangle.$$

3. Slično kao u zadatku 2.6.6. s vježbi (ovdje je riječ o "trapezu" za razliku od "trokuta" u onom zadatku), primijetimo kako je zapravo

$$f = \chi_{[-1/2,1/2]} * \chi_{[-3/2,3/2]},$$

   pa korištenjem formule za Fourierovu transformaciju konvolucije dvije L^1 funkcije dobivamo

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin \pi\xi \cdot \sin 3\pi\xi}{\pi^2\xi^2}.$$

4. Primjenom Fourierove transformacije po prostornoj varijabli dolazimo do početne zadaće

$$\begin{cases} \hat{u}_t + 2\pi i\xi\hat{u} = \hat{u}, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \widehat{u_0}(\xi). \end{cases}$$

   Rješavamo dobiveni ODJ (po t), te dobivamo

$$\hat{u}(\xi, t) = \widehat{u_0}(\xi)e^{(1-2\pi i\xi)t} = e^t\widehat{u_0}(\xi)e^{-2\pi it\xi} = e^t\widehat{\tau_t u_0}(\xi).$$

   Primjenom inverzne Fourierove transformacije konačno dobivamo

$$u(x, t) = e^t \cdot u_0(x - t).$$

   Jednostavnom provjerom se možemo uvjeriti da dobivena funkcija zaista jest rješenje.

5. a) Pretpostavimo da vrijedi $||f_n - f||_{L^p} \to 0$. Prvo za $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ imamo

$$|\langle f_n - f, \varphi\rangle| \leq ||f_n - f||_{L^p}||\varphi||_{L^q} \to 0,$$

odnosno $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} f$. Kako je Fourierova transformacija nizovno neprekidna na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, slijedi tvrdnja.

b) Definiramo niz funkcija f_n na sljedeći način:

$$f_n = f \cdot \chi_{[-n,n]}.$$

Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f_n \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, te imamo $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Zbog $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, Fourierovu transformaciju možemo računati pomoću integrala:

$$\widehat{f_n}(\xi) = \int f_n(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{-n}^{n} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = g_n(\xi).$$

S druge strane, jer je Fourierova transformacija unitaran operator na L^2, imamo

$$g_n = \widehat{f_n} \xrightarrow{L^2} \widehat{f},$$

što daje tvrdnju.

6. Na $H_0^1(\langle -1, 1\rangle)$ definiramo bilinearnu formu

$$B(u, v) = \int_{-1}^{1} au'v' + buv.$$

Do ove forme dolazimo na isti način kao i u primjerima s vježbi/predavanja; množenjem jednadžbe s $v \in H_0^1(\langle -1, 1\rangle)$, integriranjem i parcijalnom integracijom prvog člana. Kako je $f \in C([-1, 1]) \subseteq L^2(\langle -1, 1\rangle)$, za pronalazak jedinstvenog slabog rješenja gornjeg problema je još potrebno pokazati da je B neprekidna i koercitivna. Neprekidnost imamo zbog

$$\begin{aligned}
|B(u, v)| &\leq \int_{-1}^{1} |au'v'| + |buv| \\
&\leq ||a||_{L^\infty}||u'||_{L^2}||v'||_{L^2} + ||b||_{L^\infty}||u||_{L^2}||v||_{L^2} \\
&\leq (||a||_{L^\infty} + ||b||_{L^\infty})||u||_{H_0^1}||v||_{H_0^1},
\end{aligned}$$

dok koercitivnost slijedi iz

$$B(u, u) = \int_{-1}^{1} a(u')^2 + bu^2 \overset{b\geq 0}{\geq} \int_{-1}^{1} a(u')^2 \overset{a\geq\varepsilon}{\geq} \varepsilon||u'||_{L^2}^2 \overset{\text{Poincare}}{\geq} C\varepsilon||u||_{H_0^1}^2.$$

Time smo dobili egzistenciju i jedinstvenost $u \in H_0^1(\langle -1, 1\rangle)$ slabog rješenja traženog problema. Pokažimo da je u i rješenje u klasičnom smislu. Za $\varphi \in C_c^\infty(\langle -1, 1\rangle)$ imamo

$$\langle -(au')', \varphi\rangle = \langle au', \varphi'\rangle = \int_{-1}^{1} au'\varphi' = \int_{-1}^{1} (f - bu)\varphi.$$

Stoga je $(au')' = f - bu \in C([-1,1])$. Posebno vidimo da je $au' \in H^1(\langle -1,1\rangle)$. Kako je $\varepsilon \le a \le ||a||_{L^\infty}$, to je onda i

$$u' = \frac{1}{a}(au') \in H^1(\langle -1,1\rangle),$$

odnosno $u \in H^2(\langle -1,1\rangle)$, i posebno $u \in C^1(\langle -1,1\rangle)$. Konačno, jer je

$$u'' = \frac{1}{a}(f - bu - a'u') \in C(\langle -1,1\rangle),$$

vidimo da je $u \in C^2(\langle -1,1\rangle)$. Sada se možemo vratiti iz formulacije slabog rješenja obrnutim postupkom, te vidimo da u zaista je i rješenje problema u klasičnom smislu.