Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2

Kolokvij 9.7.2021.

1. (5+3=8 bodova)

   (a) Definiramo preslikavanje $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

   $$\langle T, \varphi \rangle := \int_0^\infty x\varphi(x)dx.$$

   Je li T distribucija? Je li T temperirana distribucija? Svoje odgovore obrazložite.

   (b) Neka su $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ međusobno različiti. Dokažite da je $\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}\}$ linearno nezavisan podskup $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. (5 bodova) Odredite

   $$(\mathcal{D}') - \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

3. (5 bodova) Koristeći Fourierovu transformaciju riješite zadaću:

   $$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{na } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) = \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3, & \text{na } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

4. (4+3=7 bodova) Neka su $(f_n), (g_n) \subseteq \mathcal{S}$, $f, g \in \mathcal{S}$. Pretpostavimo da vrijedi $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ i $g_n \xrightarrow{\mathcal{S}} g$.

   (a) Dokažite: $f_n * g_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f * g$,

   (b) Vrijedi li $f_n g_n \xrightarrow{\mathcal{S}} fg$? Dokažite ili opovrgnite.

5. (5 bodova) Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ograničen i otvoren. Neka su $A \in L^\infty(\Omega; M_d(\mathbb{R}))$ i $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ te pretpostavimo dodatno da za neki $\vartheta > 0$ vrijedi

   $$A(x)\xi \cdot \xi \geq \vartheta|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

   Zadan je operator $Lu := -\mathrm{div}\,(A\nabla u) + bu$. Pokažite da postoji $\mu > 0$ takav da, uz uvjet $b(x) \geq -\mu$ za s.s. $x \in \Omega$, pripadna bilinearna forma $B(\cdot, \cdot)$ na $H_0^1(\Omega)$ zadovoljava uvjete Lax-Milgramovog teorema.

Rješenja

1. (a) Primijetimo kako je zapravo $T = T_f$, gdje je $f(x) = xH(x)$. Kako je $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, riječ je o regularnoj distribuciji. Nadalje, za $\varphi \in \mathcal{S}$ imamo

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}(1+x)^3|\varphi(x)|dx \leq ||\varphi||_{3,0} \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}dx.$$

Kako je zadnji integral konačan, slijedi da je $T \in \mathcal{S}'$.

(b) Neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i} = 0.$$

Za $j \in \{1, \dots, n\}$ neka je $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ takva da je

i. $\psi(x_j) = 1$

ii. $\operatorname{supp}\psi \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \{x_j\}$.

Tada je $0 = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}, \psi\rangle = \alpha_j \psi(x_j)$, pa zaključujemo da je $\alpha_j = 0$. Kako je j bio proizvoljan, slijedi tvrdnja.

2. Stavimo $f_n(x) = \frac{x}{x^2+\frac{1}{n^2}}$ i $g_n(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \frac{1}{n^2})$. Imamo $f_n = g_n'$, pa je dovoljno odrediti $\lim_n g_n$. Očito za s.s $x \in \mathbb{R}$ imamo $g_n \to \ln|x|$. Također, na $\langle 0, 1\rangle$ je niz g_n dominiran s $|\ln x| + 1$, dok je na $\langle 1, \infty\rangle$ dominiran s $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$, pa kako su obje funkcije u $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, primjenom LTDK-a dobivamo

$$\lim_n \langle g_n, \varphi\rangle = \langle \ln|x|, \varphi\rangle, \qquad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Konačno, imamo da je $\lim_n f_n = \lim_n g_n' = (\lim_n g_n)' = p.v.\frac{1}{x}$.

3. Rješenje identično zadatku iz 2019. (dostupno na forumu u odgovarajućem threadu). Alternativno dio s računanjem posljednjeg dijela se može napraviti i na sljedeći način: kao formulu za rješenje dobijemo

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = u_0(x_1, x_2, x_3) * (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

no kako je u_0 separirana po varijablama, to je dovoljno izračunati jednodimenzionalnu konvoluciju, te izmnožiti tri rezultata (Fubini). Imamo

$$\begin{aligned} \cos x * (-4\pi t)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} &= \left(\frac{1}{2}(\delta_{1/2\pi} + \delta_{-1/2\pi})e^{-4\pi^2\xi^2 t}\right)^\frown \\ &= \left(\frac{1}{2}(\delta_{1/2\pi} + \delta_{-1/2\pi})e^{-t}\right)^\frown \\ &= e^{-t}\cos x. \end{aligned}$$

Dakle, rješenje je dano s

$$u(x,t) = u_0(x)e^{-3t}.$$

4. (a) Na vježbama je u Propoziciji 3.6.3. pokazano da za proizvoljne $N \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ vrijedi

$$||u * v||_{N,\beta} \leq C||u||_{N_1,\beta_1}||v||_{N_2,\beta_2},$$

za tamo izračunate polunorme. Imamo

$$\begin{aligned} ||f_n * g_n - f * g||_{N,\beta} &\leq ||f_n * (g_n - g)||_{N,\beta} + ||(f_n - f) * g||_{N,\beta} \\ &\leq C||f_n||_{N_1,\beta_1}||g_n - g||_{N_2,\beta_2} + C||f_n - f||_{N_1,\beta_1}||g||_{N_2,\beta_2} \end{aligned}$$

Prema pretpostavci, $||f_n - f||_{N_1,\beta_1}, ||g_n - g||_{N_2,\beta_2} \to 0$, dok je niz $||f_n||_{N_1,\beta_1}$ ograničen, pa puštanjem limesa slijedi tvrdnja.

(b) Tvrdnja vrijedi; slijedi direktno iz a) primjenom Fourierove transformacije koja je izomorfizam na funkcije $\check{f}_n, \check{g}_n, \check{f}, \check{g}$ i činjenice da konvolucija prelazi u produkt.