MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 20. lipnja 2022.

## ZADATAK 1

Zadano je preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ formulom

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+5x_2y_2.$$

(a) (3 boda) Dokažite da je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni produkt.

(b) (2 boda) Neka je $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$, za $v\in\mathbb{R}^2$, norma inducirana zadanim skalarnim produktom. Odredite koja krivulja drugog reda je dana jednadžbom $\|(x,y)\|=1$, tj. njenu vrstu i koordinate u kojima je ta krivulja dana kanonskom jednadžbom.

**Rješenje:**

(a) (1) $\langle (x,y),(x,y)\rangle = x^2+4xy+5y^2=(x+2y)^2+y^2\geq 0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(2) $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 0 \iff x^2+4xy+5y^2=0 \iff (x+2y)^2+y^2=0 \iff x+2y=0,\ y=0 \iff x=y=0$.

(3) $\langle (x_1,x_2)+(y_1,y_2),(z_1,z_2)\rangle = \langle (x_1+y_1,x_2+y_2),(z_1,z_2)\rangle = (x_1+y_1)z_1+2(x_1+y_1)z_2+2(x_2+y_2)z_1+5(x_2+y_2)z_2 = (x_1z_1+2x_1z_2+2x_2z_1+5x_2z_2)+(y_1z_1+2y_1z_2+2y_2z_1+5y_2z_2) = \langle (x_1,x_2),(z_1,z_2)\rangle + \langle (y_1,y_2),(z_1,z_2)\rangle,\ \forall x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2\in\mathbb{R}$.

(4) $\langle \alpha(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = \langle (\alpha x_1,\alpha x_2),(y_1,y_2)\rangle = \alpha x_1y_1+2\alpha x_1y_2+2\alpha x_2y_1+5\alpha x_2y_2 = \alpha\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle,\ \forall x_1,x_2,y_1,y_2,\alpha\in\mathbb{R}$.

(5) $\langle (y_1,y_2),(x_1,x_2)\rangle = y_1x_1+2y_1x_2+2y_2x_1+5y_2x_2 = x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+5x_2y_2 = \langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle,\ \forall x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$.

(b) Uočimo $\|(x,y)\| = \iff \|(x,y)\|^2=1 \iff x^2+4xy+5y^2=1$. Pripadna kvadratna forma dana je simetričnom matricom $\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$. Kako je $A$ simetrična, postoji ortogonalna matrica $Q$ takva da je $D=Q^TAQ$ dijagonalna matrica. Karakteristični polinom matrice $A$ je $k_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)(5-\lambda)-4=\lambda^2-6\lambda+1$, pa je $\sigma(A)=\{3\pm2\sqrt{2}\}$. Pripadni (normirani) svojstveni vektori su $v_1=\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}-1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}-1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$, pa je $Q=\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}&\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\\\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}&\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\end{pmatrix}$.

Definirajmo $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=Q^T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Tada je jednadžba $x^2+4xy+5y^2=1$ ekvivalentna jednadžbi $(3+2\sqrt{2})(x')^2+(3-2\sqrt{2})(y')^2=1$. Dakle, zadana krivulja je elipsa.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 20. lipnja 2022.

## ZADATAK 2

(5 bodova) Obzirom na standardni skalarni produkt u $M_2(\mathbb{R})$: $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^T)$, odredite ortogonalnu projekciju matrice $T = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ na potprostor $W$, generiran skupom $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Kolika je udaljenost matrice $T$ od potprostora $W$?

**Rješenje:** Odredimo ortogonalnu projekciju od $T$ na $W^\perp$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in W^\perp \iff x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_3 = 0, \quad 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Dakle $W^\perp = [\{B\}]$, gdje je $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Uzmimo normiranu matricu $E = \frac{1}{\sqrt{3}}B$. Sada je

$$\begin{aligned} P_W(T) &= T - P_{W^\perp}(T) = T - \langle T, E\rangle E = T - B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ d(T, W) &= ||P_{W^\perp}(T)|| = ||\langle T, E\rangle E|| = ||B|| = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 20. lipnja 2022.

## ZADATAK 3

(a) (3 boda) Zadan je linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim skalarnim produktom svojim matričnim prikazom

$$A(f,e) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $(e)$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$, a $(f) = \{(1,2,1),(1,-2,-1),(0,1,1)\}$. Odredite matrični prikaz njegovog adjungiranog operatora u kanonskoj bazi. (Napomena: Umjesto oznake $A(f,e)$ može se koristiti i oznaka $[A]_e^f$).

(b) (3 boda) Postoji li antihermitski unitarni operator $A : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ na kompleksnom unitarnom prostoru $\mathbb{C}^7$ sa standardnim skalarnim produktom takav da je njegov matrični prikaz u kanonskoj bazi za $\mathbb{C}^7$ matrica s realnim koeficijentima? Obrazložite odgovor.

**Rješenje:**

(a) Vrijedi

$$A(e) = I(e,f)A(f,e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 3 & -7 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Kako je $(e)$ ONB, vrijedi $A^*(e) = (A(e))^* = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 10 & -7 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) <u>1. način</u> Pretpostavimo da postoji traženi linearni operator. Tada za $\lambda \in \sigma(A)$ i svojstveni vektor $x$ za svojstvenu vrijednost $\lambda$ vrijedi $\langle Ax, x\rangle = \langle x, -Ax\rangle$ (jer je $A$ antihermitski), odnosno $\lambda\|x\|^2 = -\overline{\lambda}\|x\|^2$, odnosno, kako je $x \neq 0$, $\lambda = -\overline{\lambda}$, tj. $\lambda \in i\mathbb{R}$. Na predavanjima smo pokazali da su sve svojstvene vrijednosti unitarnog operatora modula jedan. Stoga je $\sigma(A) \subset \{i, -i\}$. Sada imamo $k_A(x) = (-1)^7(x-i)^a(x+i)^{7-a}$ pa je

$$\det A = k_A(0) = (-1)^7(-i)^a i^{7-a} = (-1)^{7+a} i^7 = -i(-1)^{7+a} \notin \mathbb{R},$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom da je matrični prikaz operatora $A$ u kanonskoj bazi za $\mathbb{C}^7$ matrica s realnim koeficijentima.

2. način Pretpostavimo da postoji traženi linearni operator. Tada je $A^* = -A$ i $AA^* = A^*A = I$ iz čega dobivamo $A^2 = -I$. Sada je $\det(A^2) = \det(-I) = (-1)^7 = -1$. Iz Binet-Cauchyevog teorema dobivamo

$$(\det A)^2 = \det(A^2) = -1,$$

odnosno $\det A \in \{i, -i\}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je matrični prikaz operatora $A$ u kanonskoj bazi za $\mathbb{C}^7$ matrica s realnim koeficijentima.

MATIČNI BROJ STUDENTA IME I PREZIME BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 20. lipnja 2022.

## ZADATAK 4

(4 boda) Nađite neku ortogonalnu matricu $U$ takvu da je $U^TAU$ dijagonalna matrica ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje:** Iz činjenice da vrijedi $A^* = A^T = A$ slijedi da se $A$ može dijagonalizirati u ONB. Računamo:

$$0 = k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -(\lambda - 3)\lambda^2,$$

iz čega slijedi da je $\lambda_1 = 0$ te $\lambda_2 = 3$. Sada imamo:

$$V_A(\lambda_1)\ldots \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $V_A(\lambda_1) = [\{v_1, v_2\}]$, gdje je $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ te $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Nadalje, imamo:

$$V_A(\lambda_2)\ldots \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $V_A(\lambda_2) = [\{v_3\}]$, gdje je $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Operator $A$ se dijagonalizira u bazi $(f) = \{v_1, v_2, v_3\}$, ali to nije ONB. Uočimo da je $\langle v_1, v_3\rangle = 0$, $\langle v_2, v_3\rangle = 0$, ali $\langle v_1, v_2\rangle \neq 0$. Stoga moramo Gram–Schmidtovim postupkom ortonormirati bazu $(f)$:

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = v_2 - \langle v_2, \hat{v}_1\rangle \hat{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{v}_2 = \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Na kraju normiramo $v_3$ jer je okomit na $\hat{v}_1$ i $\hat{v}_2$ pa je:

$$\hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $A$ se dijagonalizira u ONB $\hat{f} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$, tj. za matrice

$$D = A(\hat{f}) = A(\hat{f}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 \end{bmatrix}$$

vrijedi da je $U^T A U$ dijagonalna matrica.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 20. lipnja 2022.

ZADATAK 5

(a) (3 boda) Neka je $V$ unitaran prostor i $M \leq V$. Dokažite da je $A(M) \subseteq M$ ako i samo ako je $A^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

(b) (3 boda) Neka je $V$ kompleksni konačnodimenzionalni unitarni prostor, te $A, B \in L(V)$. Ako je $A$ hermitski i $B$ unitaran, dokažite da je $(A - iI)(B - 5I)$ invertibilan operator.

**Rješenje:** (a) Pretpostavimo da je $A(M) \subseteq M$. Trebamo dokazati da za svaki $x \in M^\perp$ vrijedi $A^*x \in M^\perp$, to jest, da za svaki $x \in M^\perp$ vrijedi $\langle A^*x, m\rangle = 0$ za svaki $m \in M$. To zaista vrijedi, jer je $\langle A^*x, m\rangle = \langle x, Am\rangle$. Prema pretpostavci je $Am \in M$, a kako je $x \in M^\perp$, to je $\langle x, Am\rangle = 0$.

Obratna inkluzija se dokazuje na sličan način ili primjenom prve inkluzije na operator $A^*$ i potprostor $M^\perp$ (uvažavajući da je $(M^\perp)^\perp = M$ i $(A^*)^* = A$.)

(b) Prisjetimo se da je $\lambda$ svojstvena vrijednost operatora $T \in L(V)$ ako i samo ako $T - \lambda I$ nije injektivan, odnosno, ako i samo ako $T - \lambda I$ nije invertibilan. To možemo iskazati i ovako: $\lambda$ nije svojstvena vrijednost od $T$ ako i samo ako je $T - \lambda I$ invertibilan operator.

Kako je $A$ hermitski operator, sve njegove svojstvene vrijednosti su realne. Zato $i$ nije svojstvena vrijednost od $A$, te je $A - iI$ invertibilan.

Operator $B$ je unitaran, pa je $|\lambda| = 1$ za svaki $\lambda \in \sigma(B)$. Zato $5 \notin \sigma(B)$, pa je $B - 5I$ invertibilan. Produkt invertibilnih operatora je invertibilan, odakle slijedi tvrdnja.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 20. lipnja 2022.

## ZADATAK 1

Zadano je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formulom

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

(a) (3 boda) Dokažite da je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt.

(b) (2 boda) Neka je $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, za $v \in \mathbb{R}^2$, norma inducirana zadanim skalarnim produktom. Odredite koja krivulja drugog reda je dana jednadžbom $\|(x, y)\| = 1$, tj. njenu vrstu i koordinate u kojima je ta krivulja dana kanonskom jednadžbom.

**Rješenje:**

(a) (1) $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 4x^2 + 4xy + 2y^2 = (2x + y)^2 + y^2 \geq 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(2) $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0 \iff 4x^2 + 4xy + 2y^2 = 0 \iff (2x + y)^2 + y^2 = 0 \iff 2x + y = 0, y = 0 \iff x = y = 0$.

(3) $\langle (x_1, x_2) + (y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle = \langle (x_1 + y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2) \rangle = 4(x_1 + y_1)z_1 + 2(x_1 + y_1)z_2 + 2(x_2 + y_2)z_1 + 2(x_2 + y_2)z_2 = (4x_1z_1 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1 + 2x_2z_2) + (4y_1z_1 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 2y_2z_2) = \langle (x_1, x_2), (z_1, z_2) \rangle + \langle (y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle, \ \forall x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

(4) $\langle \alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle (\alpha x_1, \alpha x_2), (y_1, y_2) \rangle = 4\alpha x_1y_1 + 2\alpha x_1y_2 + 2\alpha x_2y_1 + 2\alpha x_2y_2 = \alpha \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle, \ \forall x_1, x_2, y_1, y_2, \alpha \in \mathbb{R}$.

(5) $\langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle = 4y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 2y_2x_2 = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle, \ \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Uočimo $\|(x, y)\| = \iff \|(x, y)\|^2 = 1 \iff 4x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$. Pripadna kvadratna forma dana je simetričnom matricom $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Kako je $A$ simetrična, postoji ortogonalna matrica $Q$ takva da je $D = Q^T A Q$ dijagonalna matrica. Karakteristični polinom matrice $A$ je $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4$, pa je $\sigma(A) = \{3 \pm \sqrt{5}\}$. Pripadni (normirani) svojstveni vektori su $v_1 = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, pa je $Q = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$.

Definirajmo $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Tada je jednadžba $4x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$ ekvivalentna jednadžbi $(3 + \sqrt{5})(x')^2 + (3 - \sqrt{5})(y')^2 = 1$. Dakle, zadana krivulja je elipsa.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 20. lipnja 2022.

ZADATAK 2

(5 bodova) Obzirom na standardni skalarni produkt u $M_2(\mathbb{R})$: $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^T)$, odredite ortogonalnu projekciju matrice $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ na potprostor $Z$, generiran skupom $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$. Kolika je udaljenost matrice $S$ od potprostora $Z$?

**Rješenje:** Odredimo ortogonalnu projekciju od $S$ na $Z^\perp$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in Z^\perp \iff x_2 + x_4 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0.$$

Dakle $S^\perp = [\{C\}]$, gdje je $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Uzmimo normiranu matricu $E = \frac{1}{\sqrt{3}}C$. Sada je

$$P_Z(S) = S - P_{Z^\perp}(S) = S - \langle S, E\rangle E = S - C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$d(S, Z) = ||P_{Z^\perp}(S)|| = ||\langle S, E\rangle E|| = ||C|| = \sqrt{3}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 20. lipnja 2022.

ZADATAK 3

(a) (3 boda) Zadan je linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim skalarnim produktom svojim matričnim prikazom

$$A(f,e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $(e)$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$, a $(f) = \{(2,1,1), (-2,-1,1), (1,1,0)\}$. Odredite matrični prikaz njegovog adjungiranog operatora u kanonskoj bazi. (Napomena: Umjesto oznake $A(f,e)$ može se koristiti i oznaka $[A]_e^f$).

(b) (3 boda) Postoji li antihermitski unitarni operator $A : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ na kompleksnom unitarnom prostoru $\mathbb{C}^5$ sa standardnim skalarnim produktom takav da je njegov matrični prikaz u kanonskoj bazi za $\mathbb{C}^5$ matrica s realnim koeficijentima? Obrazložite odgovor.

**Rješenje:**

(a) Vrijedi

$$A(e) = I(e,f)A(f,e) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Kako je $(e)$ ONB, vrijedi $A^*(e) = (A(e))^* = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) <u>1. način</u> Pretpostavimo da postoji traženi linearni operator. Tada za $\lambda \in \sigma(A)$ i svojstveni vektor $x$ za svojstvenu vrijednost $\lambda$ vrijedi $\langle Ax, x\rangle = \langle x, -Ax\rangle$ (jer je $A$ antihermitski), odnosno $\lambda\|x\|^2 = -\overline{\lambda}\|x\|^2$, odnosno, kako je $x \neq 0$, $\lambda = -\overline{\lambda}$, tj. $\lambda \in i\mathbb{R}$. Na predavanjima smo pokazali da su sve svojstvene vrijednosti unitarnog operatora modula jedan. Stoga je $\sigma(A) \subset \{i, -i\}$. Sada imamo $k_A(x) = (-1)^5(x-i)^a(x+i)^{5-a}$ pa je

$$\det A = k_A(0) = (-1)^5(-i)^a i^{5-a} = (-1)^{5+a} i^5 = -i(-1)^{5+a} \notin \mathbb{R},$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom da je matrični prikaz operatora $A$ u kanonskoj bazi za $\mathbb{C}^5$ matrica s realnim koeficijentima.

2. način Pretpostavimo da postoji traženi linearni operator. Tada je $A^* = -A$ i $AA^* = A^*A = I$ iz čega dobivamo $A^2 = -I$. Sada je $\det(A^2) = \det(-I) = (-1)^5 = -1$. Iz Binet-Cauchyevog teorema dobivamo

$$(\det A)^2 = \det(A^2) = -1,$$

odnosno $\det A \in \{i, -i\}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je matrični prikaz operatora $A$ u kanonskoj bazi za $\mathbb{C}^7$ matrica s realnim koeficijentima.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 20. lipnja 2022.

ZADATAK 4

(4 boda) Nađite neku ortogonalnu matricu $U$ takvu da je $U^TAU$ dijagonalna matrica ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje:** Iz činjenice da vrijedi $A^* = A^T = A$ slijedi da se $A$ može dijagonalizirati u ONB. Računamo:

$$0 = k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2,$$

iz čega slijedi da je $\lambda_1 = -1$ te $\lambda_2 = 2$. Sada imamo:

$$V_A(\lambda_1) \ldots \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $V_A(\lambda_1) = [\{v_1, v_2\}]$, gdje je $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ te $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Nadalje, imamo:

$$V_A(\lambda_2) \ldots \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $V_A(\lambda_2) = [\{v_3\}]$, gdje je $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Operator $A$ se dijagonalizira u bazi $(f) = \{v_1, v_2, v_3\}$, ali to nije ONB. Uočimo da je $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$, $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$, ali $\langle v_1, v_2 \rangle \neq 0$. Stoga moramo Gram–Schmidtovim postupkom ortonormirati bazu $(f)$:

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = v_2 - \langle v_2, \hat{v}_1 \rangle \hat{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{v}_2 = \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Na kraju normiramo $v_3$ jer je okomit na $\hat{v}_1$ i $\hat{v}_2$ pa je:

$$\hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $A$ se dijagonalizira u ONB $\hat{f} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$, tj. za matrice

$$D = A(\hat{f}) = A(\hat{f}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \hat{v}_3 & \hat{v}_1 & \hat{v}_2 \end{bmatrix}$$

vrijedi da je $U^T A U$ dijagonalna matrica.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

# LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 20. lipnja 2022.

ZADATAK 5

(a) (3 boda) Neka je $V$ unitaran prostor i $M \leq V$. Dokažite da je $A(M) \subseteq M$ ako i samo ako je $A^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

(b) (3 boda) Neka je $V$ kompleksni konačnodimenzionalni unitarni prostor, te $A, B \in L(V)$. Ako je $A$ hermitski i $B$ unitaran, dokažite da je $(A - iI)(B - 5I)$ invertibilan operator.

**Rješenje:** (a) Pretpostavimo da je $A(M) \subseteq M$. Trebamo dokazati da za svaki $x \in M^\perp$ vrijedi $A^*x \in M^\perp$, to jest, da za svaki $x \in M^\perp$ vrijedi $\langle A^*x, m\rangle = 0$ za svaki $m \in M$. To zaista vrijedi, jer je $\langle A^*x, m\rangle = \langle x, Am\rangle$. Prema pretpostavci je $Am \in M$, a kako je $x \in M^\perp$, to je $\langle x, Am\rangle = 0$.

Obratna inkluzija se dokazuje na sličan način ili primjenom prve inkluzije na operator $A^*$ i potprostor $M^\perp$ (uvažavajući da je $(M^\perp)^\perp = M$ i $(A^*)^* = A$.)

(b) Prisjetimo se da je $\lambda$ svojstvena vrijednost operatora $T \in L(V)$ ako i samo ako $T - \lambda I$ nije injektivan, odnosno, ako i samo ako $T - \lambda I$ nije invertibilan. To možemo iskazati i ovako: $\lambda$ nije svojstvena vrijednost od $T$ ako i samo ako je $T - \lambda I$ invertibilan operator.

Kako je $A$ hermitski operator, sve njegove svojstvene vrijednosti su realne. Zato $i$ nije svojstvena vrijednost od $A$, te je $A - iI$ invertibilan.

Operator $B$ je unitaran, pa je $|\lambda| = 1$ za svaki $\lambda \in \sigma(B)$. Zato $2 \notin \sigma(B)$, pa je $B - 2I$ invertibilan. Produkt invertibilnih operatora je invertibilan, odakle slijedi tvrdnja.