LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – 2. veljače 2023.

Zadatak 1. Neka je $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ neka ortonormirana baza za $V^3(O)$. Neka je $R : V^3(0) \to V^3(0)$ operator rotacije oko osi x za kut $\phi = 45°$ koji u bazi $(b) = \{\vec{b_1}, \vec{j}+\vec{k}, \vec{b_3}\}$ ima matrični zapis:

$$R(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

a) (6 bodova) Odredite bazu (b) takvu da vrijedi $||\vec{b_1}|| = \sqrt{3}$ i $\vec{b_1} \cdot \vec{i} > 0$ te matrice prijelaza iz baze (b) u bazu $(e) = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ i iz baze (e) u (b).

b) (2 boda) Prikažite $\vec{a_1}(b) = (-1 \quad 1 \quad 0)^t$ u bazi (e) i $\vec{a_2}(e) = (8 \quad 0 \quad -3)^t$ u bazi (b).

Rješenje.

a) <u>1. način</u>: Radi jednostavnosti, u rjesenju je za $\vec{b_i}$ koristena oznaka b_i, $i = 1,2,3$. U kanonskoj bazi, operator R ima matricni zapis:

$$R(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Oznacimo $b_2 = \vec{j}+\vec{k}$. Primijetimo da je

$$Rb_1 = b_1 - b_2 + \sqrt{2}b_3, \quad Rb_2 = \sqrt{2}b_3, \quad Rb_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}b_2 + \sqrt{2}b_3.$$

Pogledajmo srednju jednazbu. Pomnozimo matricu $R(e)$ s vektorom stupcem $(0\,1\,1)^t$ koji odgovara matricnom zapisu $b_2(e)$ i tako dobijemo vektor stupac $(0\,0\,\sqrt{2})^t$ sto je isto sto i $\sqrt{2}b_3$ odakle slijedi da je $b_3 = \vec{k}$.

Sada pogledajmo prvu jednadzbu koja za $b_1(e) = (x \quad y \quad z)^t$ postaje

$$\begin{bmatrix} x \\ (y-z)\sqrt{2}/2 \\ (y+z)\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z-1+\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

odakle slijedi $y = z = 1$, a $x \neq 0$. Uvjeti na b_1 impliciraju da je $x = 1$. U tom je slucaju:

$$I(e,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I(b,e) = I(e,b)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>2. način</u>: Vrijedi $R(b) = I(b,e)R(e)I(e,b)$. Pomnožimo li lijevu i desnu stranu jednakosti s $I(e,b)$ dobivamo $I(e,b)R(b) = R(e)I(e,b)$. Uvedimo oznake $b_1 = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $b_3 = u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}$. Sada je

$$I(e,b) = \begin{bmatrix} x & 0 & u \\ y & 1 & v \\ z & 1 & w \end{bmatrix}$$

pa uvrštavanjem u $I(e,b)R(b) = R(e)I(e,b)$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} x & 0 & u \\ y & 1 & v \\ z & 1 & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 0 & u \\ y & 1 & v \\ z & 1 & w \end{bmatrix}.$$

Množenjem i izjednačavanjem matričnih koeficijenata dobivamo $u = 0, v = 0, w = 1$ te $y - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - z), z - 1 + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z)$, odakle dobivamo $y = z = 1$. Dakle,

$$I(e,b) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

odnosno $b_1 = x\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $b_3 = \vec{k}$. Iz uvjeta $|b_1| = \sqrt{3}$ i $b_1 \cdot \vec{i} > 0$ dobivamo $x = 1$. Nastavak rješenja je isti kao i u prvom načinu rješavanja zadatka.

b) Vrijedi:

$$a_1(e) = I(e,b)a_1(b) = (-1 \quad 0 \quad 0)^t, \quad a_2(b) = I(b,e)a_2(e) = (8 \quad -8 \quad -3)^t.$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – 2. veljače 2023.

Zadatak 2.

(a) (5 bodova) Zadana je baza $(a) = \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ prostora $\mathbb{R}^4$. Odredite dualnu bazu (a^*), tj. odredite djelovanje funkcionala iz dualne baze na proizvoljni $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$.

(b) (3 boda) Prikažite linearni funkcional

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

u dualnoj bazi (a^*) iz prethodnog zadatka

Rješenje.

(a) Za proizvoljni $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$ moramo naći zapis u zadanoj bazi, tj. moramo odrediti skalare $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ takve da je

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) + \gamma(0,0,1,1) + \delta(0,0,0,1)$$

iz čega dobivamo sustav

$$\begin{aligned} \alpha &= x_1 \\ \alpha + \beta &= x_2 \\ \beta + \gamma &= x_3 \\ \gamma + \delta &= x_4 \end{aligned}$$

Jednostavnim računom dobivamo rješenja sustava:

$$\begin{aligned} &\alpha = x_1 \\ &\beta = -x_1 + x_2 \\ &\gamma = x_1 - x_2 + x_3 \\ &\delta = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Kako za elemente dualne baze vrijedi $a_1^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = \alpha$, $a_2^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = \beta$, $a_3^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = \gamma$. i $a_4^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = \delta$, zaključujemo

$$\begin{aligned} &a_1^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 \\ &a_2^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = -x_1 + x_2 \\ &a_3^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 - x_2 + x_3 \\ &a_4^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \end{aligned}$$

(b) Tražimo skalare A, B, C, D takve da za sve $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = Ax_1 + B(-x_1 + x_2) + C(x_1 - x_2 + x_3) + D(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4).$$

Odnosno, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} A - B + C - D &= 1 \\ B - C + D &= 1 \\ C - D &= 1 \\ D &= 1 \end{aligned}$$

Lako se vidi da je rješenje ovog sustava $A = B = C = 2$ i $D = 1$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – 2. veljače 2023.

Zadatak 3. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ dimenzije 3. Spektar linearnog operatora $A : V \to V$ je $\sigma(A) = \{0, 1, 2\}$.

a) (5 bodova) Odredite rang i defekt operatora A. Je li A epimorfizam, monomorfizam i/ili izomorfizam?

b) (3 boda) Ako je s $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ označena baza u kojoj je matrični prikaz operatora A dijagonalna matrica, odredite djelovanje operatora A na $v = 5a_1 - 3a_2 - a_3$. Je li v u slici operatora A?

Rješenje.

a) Označimo i ovdje s $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ bazu u kojoj je matrični prikaz od A dijagonalna matrica pri čemu su elementi od (a) upravo svojstveni vektori za svojstvene vrijednosti $0, 1, 2$ redom:

$$A(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vrijedi $Aa_1 = 0$, $Aa_2 = a_2$ i $Aa_3 = 2a_3$. Zaključujemo da je $\ker A = [\{a_1\}]$ pa je $d(A) = 1$ i $r(A) = 2$ $(\mathrm{Im}(A) = [\{a_2, a_3\}])$. Operator A nije nista od navedenog.

b) Vrijedi

$$Av = 5Aa_1 - 3Aa_2 - Aa_3 = -3a_2 - 2a_3.$$

S obzirom da je $\mathrm{Im}A = [\{a_2, a_3\}]$, ne postoji vektor koji se preslika u a_1 zbog nezavisnosti skupa $\{a_1, a_2, a_3\}$. Stoga v nije u slici od A.

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – 2. veljače 2023.

Zadatak 4. (8 bodova)

a) (4 bodova) Neka su (e) i (f) dvije baze konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V. Izvedite formulu koja povezuje prikaz vektora $x \in V$ u te dvije baze.

b) (4 bodova) Iskažite definiciju determinante linearnog operatora na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru i pokažite da je definicija korektna.

Rješenje.

a) Vidjeti dokaz propozicije 2.7.3. u skripti.

b) Vidjeti Definiciju 2.7.9. i propoziciju 2.7.8. u skripti.

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – 2. veljače 2023.

Zadatak 5. (8 bodova) Dokažite relaciju koja općenito vrijedi između geometrijske i algebarske kratnosti svojstvene vrijednosti linearnog operatora na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru.

Rješenje. Vidjeti propoziciju 2.8.9. u skripti.