LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij – 20. veljače 2023.

Zadatak 1. (20 bodova) Neka su $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ i $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ neke dvije baze za $\mathbf{R}^3$ pri čemu vrijedi

$$b_1 = a_1 + 2a_2 - a_3, \quad b_2 = 2a_1 + a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2.$$

Neka je $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ linearni operator koji u bazi (b) ima sljedeći matrični prikaz:

$$A(b) = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -6 & 7 & 0 \\ 8 & -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (6 bodova) Odredite matrični prikaz operatora A u bazi (a).

b) (6 bodova) Odredite spektar od A. Je li A monomorfizam?

c) (4 boda) Odredite sliku od $x(a) = (2, 2, 1)$. Je li x u slici od A? Ako je, odredite sve elemente čija je on slika.

d) (4 boda) Izrazite $A(b)^{2023}$ preko $A(a)^{2023}$ i matrica prijelaza $I(a, b), I(b, a)$.

Rješenje.

a) Mozemo odrediti matrice prijelaza:

$$I(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I(b,a) = (I(a,b))^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix},$$

pa iz $A(a) = I(a,b)A(b)I(b,a)$ imamo da je

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Iz a) dijela lako vidimo da je $\sigma(A) = \{1, 3\}$. Vidimo da je $r(A) = 3$ (iz matrice) pa je $d(A) = 3 - r(A) = 0$, odakle slijedi da je A monomorfizam. Tu činjenicu možemo dokazati na još jedan način. Budući da $0 \notin \sigma(A)$, slijedi da je $\det A \neq 0$ pa je A regularan operator, a onda je i monomorfizam.

c) Vrijedi

$$(Ax)(a) = A(a)x(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Iz b) dijela zadatka slijedi da je A epimorfizam pa je x svakako u slici operatora A. Direktnim računom se provjeri da se u njega preslika samo element $y(a) = (2, 2, 1/3)$.

d) Vrijedi

$$A(b)^{2023} = I(b,a)A(a)I(a,b)I(b,a)A(a)I(a,b) \ldots I(b,a)A(a)I(a,b) = I(b,a)A(a)^{2023}I(a,b),$$

jer $I(b,a) = (I(a,b))^{-1}$. Buduci da je $A(a)$ dijagonalna matrica, onda je $A(a)^{2023}$ dijagonalna matrica ciji su elementi na dijagonali redom 1, 1 i 3^{2023}.

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij – 20. veljače 2023.

Zadatak 2. (20 bodova) Neka je $(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}), (\cdot \mid \cdot))$ unitarni prostor gdje je $(p|q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$. Neka je $M \leq \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ razapet skupom $\{p_1, p_2\}$,

$$p_1(t) = 1 - t^2, \quad p_2(t) = t.$$

a) (8 bodova) Odredite p_3 takav da je $[\{p_3\}] = M^\perp$.

b) (8 bodova) Odredite ortogonalnu projekciju od $q(t) = 2 + t$ na $M^\perp$.

c) (4 boda) Odredite djelovanje elemenata dualne baze $(f) = \{f_1, f_2\}$ bazi $\{p_1, p_2\}$ od M na polinom $r(t) = 2 + 3t - 2t^2$.

Rješenje.

a) Neka je $p_3(t) = a + bt + ct^2$ za neke $a, b, c \in \mathbf{R}$. Mora vrijediti

$$(p_3|p_1) = 0 = (p_3|p_2)$$

odnosno

$$\int_{-1}^{1}(a + bt + ct^2)(1 - t^2)dt = \int_{-1}^{1}(a + bt + ct^2 - at^2 - bt^3 - ct^4)dt = \cdots = 2\left(a + \frac{c}{3} - \frac{a}{3} - \frac{c}{5}\right) = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(at + bt^2 + ct^3)dt = \cdots = \frac{2b}{3} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = 0, \quad a = -\frac{1}{5}c.$$

Dakle, $M^\perp = \left[\left\{t^2 - \frac{1}{5}\right\}\right]$ pa mozemo za p_3 uzeti npr. $p_3 = 5t^2 - 1$.

b) Potrebna nam je neka ortonormirana baza za $M^\perp$. Odredimo normu od p_3 (norma je inducitana skalarnim produktom):

$$(p_3|p_3) = \int_{-1}^{1}(25t^4 - 10t^2 + 1)dt = 2\left(5 - \frac{10}{3} + 1\right) = \frac{16}{3},$$

odakle slijedi da je jedna ortonormirana baza za $M^\perp$ skup $\{b\}$ (gdje je $b = \frac{\sqrt{3}}{4}p_3 = \frac{5\sqrt{3}}{4}t^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}$). Ako s $q_{M^\perp}$ oznacimo ortogonalnu projekciju vektora q na $M^\perp$, onda je

$$q_{M^\perp} = (q|b)b = \frac{3}{16}(q|p_3)p_3,$$

odnosno

$$q_{M^\perp} = \frac{3}{16}\frac{8}{3}\ p_3 = \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{2}.$$

c) Definirajmo

$$f_1(p_1) = 1, \quad f_1(p_2) = 0$$
$$f_2(p_1) = 0, \quad f_2(p_2) = 1.$$

Primijetimo, $r = 2p_1 + 3p_2$. Iskoristimo linearnost od f_1, f_2 i imamo

$$f_1(r) = 2f_1(p_1) + 3f_1(p_2) = 2, \quad f_2(r) = 2f_2(p_1) + 3f_2(p_2) = 3.$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij – 20. veljače 2023.

Zadatak 3. (20 bodova)

a) (10 bodova) Neka je $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ unitarni prostor i $a, b, c \in V$ takvi da je skup $\{a, b, c\}$ linearno nezavisan. Dokažite da je $\Gamma(a, b, c) \neq 0$.

b) (4 boda) Precizno iskažite Gram-Schmidtov teorem.

c) (6 bodova) Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ neka ortonormirana baza unitarnog prostora $(V, (\cdot \mid \cdot))$. Pokažite da za svaki vektor $x \in V$ vrijedi

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i) e_i.$$

Rješenje.

a) Ovo je poseban slučaj propozicije 1.1.7. iz skripte za $k = 3$.

b) Vidi teorem 1.4.2. u skripti.

c) Propozicija 1.4.6 a) u skripti.

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij – 20. veljače 2023.

Zadatak 4. (20 bodova)

a) (2 boda) Napišite potpuni iskaz teorema o rangu i defektu.

b) (6 bodova) Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istem poljem, iste dimenzije, $A : V \to W$ linearan operator te $\{v_1, v_2, v_3\}$ linearno nezavisan skup u V takav da je

$$A(v_1) = 3w_1 + 8w_2,\ A(v_2) = -w_1 + 4w_2,\ A(v_3) = 5w_1 + 11w_2,$$

za neke vektore $w_1, w_2 \in W$. Može li operator A biti monomorfizam? Može li A biti epimorfizam?

c) (12 bodova) Neka je $A : V \to V$ linearni operator, pri čemu je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Precizno definirajte svojstvenu vrijednost linearnog operatora A. Dokažite da je $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost linearnog operatora A ako i samo ako je $k_A(\lambda) = 0$, gdje je k_A karakteristični polinom linearnog operatora A. Navedite definiciju dijagonalizabilnog operatora.

Rješenje.

a) Vidi teorem 2.4.11. u skripti.

b) Pretpostavimo da je A monomorfizam. Prema propoziciji s predavanja, A svaki linearno nezavisan skup preslikava u linearno nezavisan skup. Posebno, slika linearno nezavisnog skupa $\{v_1, v_2, v_3\}$ je linearno nezavisan skup $S = \{Av_1, Av_2, Av_3\} \subset W$. Stoga je $\dim[S] = 3$. Međutim, $[S] = [\{w_1, w_2\}]$ pa je $\dim[S] < 3$. Dakle, A nije monomorfizam.

Ako je A epimorfizam, onda je $r(A) = \dim W = \dim V$ (jer V i W imaju istu dimenziju, po uvjetima zadatka), a onda je po teoremu o rangu i defektu $d(A) = 0$, odnosno, A je monomorfizam, što je nemoguće.

c) Vidi definiciju 2.8.1 u skripti, propoziciju 2.8.3 te definiciju 2.8.10. u skripti.

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij – 20. veljače 2023.

Zadatak 5. (20 bodova)

a) (10 bodova) Neka su V, W, Z konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem, $A : V \to W$ i $B : W \to Z$ linearni operatori, $(e), (f), (g)$ baze vektorskih prostora V, W, Z, tim redom. Dokažite da vrijedi $[B \circ A]_{(g,e)} = [B]_{(g,f)}[A]_{(f,e)}$.

b) (10 bodova) Neka je $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza na $V^3(O)$ koja određuje koordinatne osi x, y, z. Dani su linearni operatori A i B na prostoru $V^3(O)$, pri čemu je A zrcaljenje s obzirom na ravninu razapetu vektorima $\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + \vec{k}$, a B ortogonalna projekcija na pravac razapet vektorom $2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Odredite matrični prikaz operatora $B \circ A$ u bazi (e) te rang i defekt linearnog operatora $B \circ A$.

Rješenje.

a) Vidjeti dokaz s predavanja (provodi se primjenom propozicije 2.3.2 iz skripte).

b) Vrijedi $A(\vec{v}) = \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}$, gdje je $\vec{n}$ normirani vektor normale ravnine razapetom vektorima $\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + \vec{k}$. Računski se dobije $\vec{n} = \vec{j}$ (ili) $-\vec{j}$. Dakle,

$$A(\vec{v}) = \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \vec{j})\vec{j},$$

odakle slijedi $A(\vec{i}) = \vec{i}, A(\vec{j}) = -\vec{j}, A(\vec{k}) = \vec{k}$.

Uočite da se ovo moglo odrediti i bez računanja jer je riječ o xz–ravnini.

Sada je

$$[A]_{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalje imamo $B(\vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{a_0})\vec{a_0}$, gdje je $\vec{a_0}$ normirani vektor smjera pravca razapetog vektorom $2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, odnosno $\vec{a_0} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. Dakle,

$$B(\vec{v}) = \frac{1}{6}(\vec{v} \cdot (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}))(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}),$$

odakle dobivamo $B(\vec{i}) = \frac{1}{3}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), B(\vec{j}) = \frac{1}{6}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), B(\vec{k}) = \frac{1}{6}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, odnosno

$$[B]_{(e)} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz a) dijela zadatka slijedi

$$[B \circ A]_{(e)} = [B]_{(e)}[A]_{(e)} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je $r(B \circ A) = r([B \circ A]_{(e)})$, slijedi da je $r(B \circ A) = 1$, odakle iz teorema o rangu i defektu slijedi $d(B \circ A) = 3 - r(B \circ A) = 2$.