LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok – 31. siječnja 2024.

Dopušteno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.

Zadatak 1. (20 bodova) Ispitajte za koje skalare λ, μ je preslikavanje $s : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ zadano sa

$$s\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - \mu x_3y_2 + 3x_3y_3 + \lambda x_4y_4.$$

skalarni produkt na prostoru $M_2(\mathbb{R})$.

Zadatak 2. (20 bodova) U unitarnom prostoru $M_3(\mathbb{R})$ sa standardnim skalarnim produktom $\langle A \,|\, B\rangle = \operatorname{tr}\left(AB^T\right)$ dani su potprostor M svih antisimetričnih matrica i potprostor N svih matrica oblika $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Odredite najbolju aproksimaciju matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ matricama iz potprostora $M + N$.

Zadatak 3. (20 bodova) Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza prostora $V^3(O)$ i neka je $S : V^3(O) \longrightarrow V^3(O)$ operator koji vektor prvo zrcali s obzirom na pravac zadan vektorom $\vec{i} - \vec{k}$, a potom njegovu sliku projicira na ravninu razapetu vektorima $\vec{i} + \vec{j}, \vec{k}$.

a) (10 bodova) Operatoru S odredite matrični prikaz u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

b) (5 bodova) Odredite jezgru i sliku operatora S.

b) (5 bodova) Postoji li baza (f) za $V^3(O)$ u kojoj S ima matrični prikaz

$$[S]_{(f)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Zadatak 4. (20 bodova)

a) (6 bodova) Linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadan je svojom matricom u paru baza $(e) = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $(e') = \{(1,0,0), (1,1,1), (1,1,0)\}$ s

$$[A]_{(e',e)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Odredite matrični zapis operatora A u kanonskoj bazi, tj. odredite $[A]_{(e)}$.

b) (14 bodova) Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore ovog operatora te algebarske i geometrijske kratnosti svojstvenih vrijednosti. Može li se operator A dijagonalizirati? Ako se može dijagonalizirati, odredite $[A]_{(e)}^{2024}$.

Zadatak 5. (20 bodova)

a) (10 bodova) Neka su V i W netrivijalni vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ i $A : V \to W$ linearni operator. Koristeći teorem o rangu i defektu dokažite da je rang linearnog operatora A jednak rangu matričnog prikaza linearnog operatora A u bilo kojem paru baza.

b) (10 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i L potprostor od V. Dokažite da je $L \dotplus L^{\perp} = V$.