LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 24. studenog 2022.

Zadatak 1. (9 bodova)

a) (2 boda) Za $\alpha \in \mathbb{R}$ dano je preslikavanje $A_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A_\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_2, \alpha x_3),\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Dokažite da je A_α linearni operator za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) (4 boda) Neka je $(\cdot \,|\, \cdot)$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$. Odredite sve $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$s(x, y) = (A_\alpha x \,|\, y),\ x, y \in \mathbb{R}^3$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$, pri čemu je A_α linearni operator iz a) dijela zadatka.

c) (3 boda) Neka je $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2 s realnim koeficijentima. Provjerite je li preslikavanje zadano s

$$(p \,|\, q) = p(1)q(1) - p(0)q(0)$$

skalarni produkt na $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Rješenje.

a) Za proizvoljni i fiksni $\alpha \in \mathbb{R}$ i za bilo koje $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ te $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}
A_\alpha(\alpha_1 x + \alpha_2 y) &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1, 2(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2), \alpha(\alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3)) \\
&= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1, 2\alpha_1 x_2 + 2\alpha_2 y_2, \alpha\alpha_1 x_3 + \alpha\alpha_2 y_3) \\
&= (\alpha_1 x_1, 2\alpha_1 x_2, \alpha\alpha_1 x_3) + (\alpha_2 y_1, 2\alpha_2 y_2, \alpha\alpha_2 y_3) \\
&= \alpha_1(x_1, 2x_2, \alpha x_3) + \alpha_2(y_1, 2y_2, \alpha y_3) \\
&= \alpha_1 A_\alpha x + \alpha_2 A_\alpha y
\end{aligned}$$

Dakle, A_α je linearni operator za sve $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Imamo

$$s(x, x) = (A_\alpha x | y) = ((x_1, 2x_2, \alpha x_3) | (x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2x_2^2 + \alpha x_3^2$$

Uočimo da za vektor $x = (0, 0, 1)$ vrijedi $s(x, x) = \alpha$. Odavde slijedi da samo za $\alpha > 0$ vrijedi $s(x, x) \geq 0$ i $s(x, x) = 0 \iff x = 0$.
Provjerimo još ostala svojstva u slučaju $\alpha > 0$. Kako je A_α linearni operator, imamo

$$s(x + y, z) = (A_\alpha(x + y)|z) = (A_\alpha x + A_\alpha y|z) = (A_\alpha x|z) + (A_\alpha y|z) = s(x, z) + s(y, z)$$

$$s(\lambda x, y) = (A_\alpha(\lambda x)|y) = (\lambda A_\alpha x|z) = \lambda s(x, y)$$

$$s(y, x) = y_1 x_1 + 2y_2 x_2 + \alpha y_3 x_3 = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + \alpha x_3 y_3 = s(x, y)$$

Dakle, s je skalarni produkt za sve $\alpha > 0$.

c) Uzmimo konstantni polinom $p(x) = 1$. Tada je $(p|p) = p(1)^2 - p(0)^2 = 0$ i $p \neq 0$, dakle, preslikavanje nije skalarni produkt

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 24. studenog 2022.

Zadatak 2. (9 bodova) Zadan je podskup S unitarnog prostora $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sa standardnim skalarnim produktom,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

a) (1 bod) Je li skup S linearno nezavisan? Detaljno obrazložite.

b) (4 boda) Odredite jednu ortonormiranu bazu za $[S]$.

c) (2 boda) Definirajte ortogonalni komplement $A^\perp$ vektorskog potprostora $A \neq \emptyset$, $A \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i pokažite da je $A^\perp$ potprostor od $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

d) (2 boda) Odredite jednu bazu za $[S]^\perp$.

Rješenje.

a) Ako matrice u skupu S redom označimo s E, F, G i H, možemo primijetiti da je $F + 2G = E$. Stoga S nije linearno nezavisan.

b) Koristeći zaključak iz (i) dijela,

$$[S] = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right] = [\{F, G, H\}].$$

Skup $\{F, G, H\}$ je linearno nezavisan sto mozemo pokazati na sljedeci nacin: pretpostavimo da skup nije linearno nezavisan. Tada postoje realni brojevi α i β td vrijedi $\alpha F + \beta G = H$. Uzmimo drugi redak:

$$\begin{aligned} -\alpha + 3\beta &= 0 \\ -\alpha + \beta &= 0, \end{aligned}$$

odakle dobivamo kontradikciju ($\alpha = \beta = 0$, što je nemoguće jer H nije nul-matrica). Preostalo je ortonormirati skup $\{F, G, H\}$ koristeći Gram-Schmidtov postupak. Radi jednostavnosti, poredajmo matrice na sljedeći način: $\{H, F, G\}$. Tada $E_1 = H$ je prvi element ortonormirane baze. Odredimo B_2 i E_2 (oznake uvedene na predavanjima i vježbama):

$$B_2 = F - (F|E_1)E_1, \quad E_2 = \frac{B_2}{||B_2||}.$$

Računamo $(F|E_1) = \mathrm{tr}(E_1^T F) = 1$ pa je

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odredimo još B_3 i E_3:

$$B_3 = G - (G|E_1)E_1 - (G|E_2)E_2, \quad E_3 = \frac{B_3}{||B_3||}.$$

Računamo $(G|E_1) = -1$, $(G|E_2) = 4/\sqrt{6}$ pa je

$$B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \frac{1}{\sqrt{210}} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dakle, jedna ortonormirana baza za S je skup $\{E_1, E_2, E_3\}$.

c) Ortogonalni komplement $A^\perp$ vektorskog potprostora A je skup svih $a \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ takvih da je $(a|b) = 0$ za svaki $b \in A$. Kako bismo pokazali da je $A^\perp$ i sam vektorski potprostor, uzmimo $c, d \in A^\perp$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i proizvoljni $x \in A$. Vrijedi da je

$$(\alpha c + \beta d|x) = \alpha(c|x) + \beta(d|x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha c + \beta d \in A^\perp.$$

Jasno je $0 \in A^\perp$ i pokazali smo da je $A^\perp$ zatvoren na linearne kombinacije, dakle, $A^\perp$ je vektorski potprostor.

d) Baza za $[S]^\perp$ sastoji se od jednog elementa $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ kojeg izračunamo iz kriterija:

$$(J|E_1) = 0, \quad \sqrt{6}(J|E_2) = 0, \quad \sqrt{210}(J|E_3) = 0.$$

Dobijamo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ -c + 2b - d &= 0 \\ 11c + 8b + 5d &= 0. \end{aligned}$$

Nakon kratkog računa dobijamo J_{baza} = element baze za $[S]^\perp$:

$$J_{baza} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 24. studenog 2022.

Zadatak 3. (5 bodova) Na unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim skalarnim produktom zadan je potprostor

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\right\}.$$

a) (2 boda) Dokažite da je skup

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,0,y) \in M^\perp\right\}$$

potprostor od $\mathbb{R}^3$.

b) (3 boda) Za proizvoljni $x \in \mathbb{R}^3$ nađite $u \in S$, $v \in S^\perp$ takve da je $x = u + v$.

Rješenje. Očito je jedna baza za M skup $\{(1,1,1)\}$.

a) Iz uvjeta $(x,0,y) \in M^\perp$ dobivamo izraz koji x, y trebaju zadovoljavati:

$$((x,0,y)|(1,1,1)) = x + 0 + y = 0 \qquad \iff \qquad y = -x,$$

pa je $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x\} = \{(x,-x,z) : x, z \in \mathbb{R}\}$. Dakle, svaki vektor is S se može zapisati kao $x(1,-1,0) + z(0,0,1)$ pri čemu su $x, z \in \mathbb{R}$. To je točno definicija linearne ljuske: $[\{(1,-1,0),(0,0,1)\}]$ pa je S potprostor (jer je linearna ljuska, a linearna ljuska je zatvorena na linearne kombinacije).

b) Neka je $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Onda je u ortogonalna projekcija od x na S, a v je ortogonalna projekcija od x na $S^\perp$. Ortonormiranjem baze $\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$ za skup S dobivamo ortonormiranu bazu

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), (0,0,1)\right\}.$$

Koristeći formulu za ortogonalnu projekciju dobivamo

$$\begin{aligned} u &= \left\langle (a,b,c) \,|\, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) + \langle (a,b,c) \,|\, (0,0,1) \rangle \,(0,0,1) \\ &= \frac{1}{2}(a-b)(1,-1,0) + c(0,0,1) = \left(\frac{1}{2}(a-b), \frac{1}{2}(b-a), c\right), \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$v = x - u = (a,b,c) - \left(\frac{1}{2}(a-b), \frac{1}{2}(b-a), c\right) = \left(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(b+a), 0\right).$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 24. studenog 2022.

Zadatak 4. (11 bodova)

a) (7 bodova) Neka je $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ n–dimenzionalni unitarni prostor te $M \leq V$. Dokažite da je $M \dotplus M^{\perp} = V$.

b) (4 boda) Neka je $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ konačnodimenzionalni unitarni prostor, $M \leq V$ i $x \in V$. Definirajte ortogonalnu projekciju vektora x na potprostor M. Neka je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ortonormirana baza potprostora M. Dokažite da je njegova ortogonalna projekcija na potprostor M dana s

$$x_M = \sum_{i=1}^{m} \langle x \mid e_i \rangle \, e_i.$$

Rješenje. Vidjeti dokaz propozicije 1.4.4. u skripti i propozicije 1.4.6 (b).

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 24. studenog 2022.

Zadatak 5. (6 bodova)

a) (3 boda) Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem i neka je $A : V \to W$ bijektivni linearni operator. Dokažite da je tada i $A^{-1} : W \to V$ linearni operator.

b) (3 boda) Neka je V vektorski prostori i neka je skup $\{v_1, v_2\}$ linearno nezavisan skup u V. Postoji li linearni operator $A : V \to V$ takav da je

$$A(3v_1 - 2v_2) = 0_V, \ A(v_1 + v_2) = v_1, \ A(v_1 - 4v_2) = v_2?$$

Obrazložite odgovor.

Rješenje.

a) Vidjeti dokaz propozicije 2.1.4. u skripti.

b) Uočimo da je $(3v_1 - 2v_2) - 2(v_1 + v_2) = v_1 - 4v_2$. Ukoliko bi postojao linearni operator s traženim svojstvima, vrijedilo bi

$$A(3v_1 - 2v_2) - 2A(v_1 + v_2) = A(v_1 - 4v_2),$$

odnosno $-2v_1 = v_2$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da su v_1 i v_2 linearno nezavisni vektori. Dakle, ne postoji linearni operator s traženim svojstvima.

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 24. studenog 2022.

Zadatak 1. (9 bodova)

a) (2 boda) Za $\beta \in \mathbb{R}$ dano je preslikavanje $B_\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$B_\beta(x_1, x_2, x_3) = (\beta x_1, x_2, 3x_3),\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Dokažite da je B_β linearni operator za svaki $\beta \in \mathbb{R}$.

b) (4 boda) Neka je $(\cdot\,|\,\cdot)$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$. Odredite sve $\beta \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$s(x, y) = (B_\beta x\,|\,y),\ x, y \in \mathbb{R}^3$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$, pri čemu je B_β linearni operator iz a) dijela zadatka.

c) (3 boda) Neka je $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2 s realnim koeficijentima. Provjerite je li preslikavanje zadano s

$$(p\,|\,q) = -p(2)q(2) + p(0)q(0)$$

skalarni produkt na $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Obrazložite odgovor.

Rješenje.

a) Za proizvoljni i fiksni $\beta \in \mathbb{R}$ i za bilo koje $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ te $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}
B_\beta\left(\alpha_1 x + \alpha_2 y\right) &= (\beta(\alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3), \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2, 3(\alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3)) \\
&= (\beta\alpha_1 x_3 + \beta\alpha_2 y_3, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2, 3\alpha_1 x_3 + 3\alpha_2 y_3) \\
&= (\beta\alpha_1 x_1, 3\alpha_1 x_2, \alpha_1 x_3) + (\beta_2 y_1, \alpha_2 y_2, 3\alpha_2 y_3) \\
&= \alpha_1(\beta x_1, x_2, 3x_3) + \alpha_2(\beta y_1, y_2, 3y_3) \\
&= \alpha_1 B_\beta x + \alpha_2 B_\beta y
\end{aligned}$$

Dakle, B_β je linearni operator za sve $\beta \in \mathbb{R}$.

b) Imamo

$$s(x, x) = (B_\beta x|y) = ((\beta x_1, x_2, 3x_3)|(x_1, x_2, x_3)) = \beta x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2$$

Uočimo da za vektor $x = (1, 0, 0)$ vrijedi $s(x, x) = \beta$. Odavde slijedi da samo za $\beta > 0$ vrijedi $s(x, x) \geq 0$ i $s(x, x) = 0 \iff x = 0$.
Provjerimo još ostala svojstva u slučaju $\beta > 0$. Kako je B_β linearni operator, imamo

$$s(x + y, z) = (B_\beta(x + y)|z) = (B_\beta x + A_\alpha y|z) = (B_\beta x|z) + (B_\beta y|z) = s(x, z) + s(y, z)$$

$$s(\lambda x, y) = (B_\beta(\lambda x)|y) = (\lambda B_\beta x|z) = \lambda s(x, y)$$

$$s(y, x) = \beta y_1 x_1 + y_2 x_2 + 3y_3 x_3 = \beta x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3x_3 y_3 = s(x, y)$$

Dakle, s je skalarni produkt za sve $\beta > 0$.

c) Uzmimo konstantni polinom $p(x) = 1$. Tada je $(p|p) = -p(2)^2 + p(0)^2 = 0$ i $p \neq 0$, dakle, preslikavanje nije skalarni produkt

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 24. studenog 2022.

Zadatak 2. (9 bodova) Zadan je podskup S unitarnog prostora $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sa standardnim skalarnim produktom,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

a) (1 bod) Je li skup S linearno nezavisan? Detaljno obrazložite.

b) (4 boda) Odredite jednu ortonormiranu bazu za $[S]$.

c) (2 boda) Definirajte ortogonalni komplement $A^\perp$ vektorskog potprostora $A \neq \emptyset$, $A \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i pokažite da je $A^\perp$ potprostor od $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

d) (2 boda) Odredite jednu bazu za $[S]^\perp$.

Rješenje.

a) Ako matrice u skupu S redom označimo s E, $2F$, G i H, možemo primijetiti da je $2F + 2G = E$. Stoga S nije linearno nezavisan.

b) Koristeći zaključak iz (i) dijela,

$$[S] = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right] = [\{F, G, H\}].$$

Skup $\{F, G, H\}$ je linearno nezavisan sto mozemo pokazati na sljedeci nacin: pretpostavimo da skup nije linearno nezavisan. Tada postoje realni brojevi α i β td vrijedi $\alpha F + \beta G = H$. Uzmimo drugi redak:

$$\begin{aligned} -\alpha + 3\beta &= 0 \\ -\alpha + \beta &= 0, \end{aligned}$$

odakle dobivamo kontradikciju ($\alpha = \beta = 0$, što je nemoguće jer H nije nul-matrica). Preostalo je ortonormirati skup $\{F, G, H\}$ koristeći Gram-Schmidtov postupak. Radi jednostavnosti, poredajmo matrice na sljedeći način: $\{H, F, G\}$. Tada $E_1 = H$ je prvi element ortonormirane baze. Odredimo B_2 i E_2 (oznake uvedene na predavanjima i vježbama):

$$B_2 = F - (F|E_1)E_1, \quad E_2 = \frac{B_2}{||B_2||}.$$

Računamo $(F|E_1) = \operatorname{tr}(E_1^T F) = 1$ pa je

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odredimo još B_3 i E_3:

$$B_3 = G - (G|E_1)E_1 - (G|E_2)E_2, \quad E_3 = \frac{B_3}{||B_3||}.$$

Računamo $(G|E_1) = -1$, $(G|E_2) = 4/\sqrt{6}$ pa je

$$B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \frac{3}{\sqrt{210}} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dakle, jedna ortonormirana baza za S je skup $\{E_1, E_2, E_3\}$.

c) Ortogonalni komplement $A^\perp$ vektorskog potprostora A je skup svih $a \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ takvih da je $(a|b) = 0$ za svaki $b \in A$. Kako bismo pokazali da je $A^\perp$ i sam vektorski potprostor, uzmimo $c, d \in A^\perp$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i proizvoljni $x \in A$. Vrijedi da je

$$(\alpha c + \beta d|x) = \alpha(c|x) + \beta(d|x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha c + \beta d \in A^\perp.$$

Jasno je $0 \in A^\perp$ i pokazali smo da je $A^\perp$ zatvoren na linearne kombinacije, dakle, $A^\perp$ je vektorski potprostor.

d) Baza za $[S]^\perp$ sastoji se od jednog elementa $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ kojeg izračunamo iz kriterija:

$$(J|E_1) = 0, \quad \sqrt{6}(J|E_2) = 0, \quad \frac{\sqrt{210}}{3}(J|E_3) = 0.$$

Dobijamo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ -c + 2b - d &= 0 \\ 11c + 8b + 5d &= 0. \end{aligned}$$

Nakon kratkog računa dobijamo J_{baza} = element baze za $[S]^\perp$:

$$J_{baza} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 24. studenog 2022.

Zadatak 3. (5 bodova) Na unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim skalarnim produktom zadan je potprostor

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y = z\right\}$$

a) (2 boda) Dokažite da je skup

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (0, 2x, y) \in M^\perp\right\}$$

potprostor od $\mathbb{R}^3$.

b) (3 boda) Za proizvoljni $x \in \mathbb{R}^3$ nađite $u \in S$, $v \in S^\perp$ takve da je $x = u + v$.

Rješenje. Očito je jedna baza za M skup $\{(1, -1, 1)\}$.

a) Iz uvjeta $(0, 2x, y) \in M^\perp$ dobivamo izraz koji x, y trebaju zadovoljavati:

$$((0, 2x, y)|(1, -1, 1)) = -2x + y = 0 \quad\iff\quad y = 2x,$$

pa je $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x\} = \{(x, 2x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$. Dakle, svaki vektor is S se može zapisati kao $x(1, 2, 0) + z(0, 0, 1)$ pri čemu su $x, z \in \mathbb{R}$. To je točno definicija linearne ljuske: $[\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}]$ pa je S potprostor (jer je linearna ljuska, a linearna ljuska je zatvorena na linearne kombinacije).

b) Neka je $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Onda je u ortogonalna projekcija od x na S, a v je ortogonalna projekcija od x na $S^\perp$. Ortonormiranjem baze $\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$ za skup S dobivamo ortonormiranu bazu

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0), (0, 0, 1)\right\}.$$

Koristeći formulu za ortogonalnu projekciju dobivamo

$$\begin{aligned} u &= \left\langle (a, b, c) \,|\, \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) + \langle (a, b, c) \,|\, (0, 0, 1)\rangle\, (0, 0, 1) \\ &= \frac{1}{5}(a + 2b)(1, 2, 0) + c(0, 0, 1) = \left(\frac{1}{5}(a + 2b), \frac{1}{5}(2a + 4b), c\right), \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$v = x - u = (a, b, c) - \left(\frac{1}{5}(a + 2b), \frac{1}{5}(2a + 4b), c\right) = \left(\frac{1}{5}(4a - 2b), \frac{1}{5}(b - 2a), 0\right).$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 24. studenog 2022.

Zadatak 4. (11 bodova)

a) (7 bodova) Neka je $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ n–dimenzionalni unitarni prostor te $L \leq V$. Dokažite da je $L^{\perp}$ direktni komplement potprostora L.

b) (4 boda) Neka je $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ konačnodimenzionalni unitarni prostor $a \in V$ te $L \leq V$. Definirajte udaljenost vektora a od potprostora L i dokažite da je $d(a, L) = d(a, a_L)$, gdje je a_L ortogonalna projekcija vektora a na potprostor L.

Rješenje. Vidjeti dokaz propozicije 1.4.4. u skripti i propozicije 1.4.7.

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 24. studenog 2022.

Zadatak 5. (6 bodova)

a) (3 boda) Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem i neka je $A : V \to W$ bijektivni linearni operator. Dokažite da je tada i $A^{-1} : W \to V$ linearni operator.

b) (3 boda) Neka je V vektorski prostori i neka je skup $\{v_1, v_2\}$ linearno nezavisan skup u V. Postoji li linearni operator $A : V \to V$ takav da je

$$A(v_1 + v_2) = v_2,\ A(2v_1 - 3v_2) = v_1,\ A(-v_1 + 4v_2) = 0_V?$$

Obrazložite odgovor.

Rješenje.

a) Vidjeti dokaz propozicije 2.1.4. u skripti.

b) Uočimo da je $(2v_1 - 3v_2) + (-v_1 + 4v_2) = v_1 + v_2$. Ukoliko bi postojao linearni operator s traženim svojstvima, vrijedilo bi

$$A(2v_1 - 3v_2) + A(-v_1 + 4v_2) = A(v_1 + v_2),$$

odnosno $v_1 = v_2$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da su v_1 i v_2 linearno nezavisni vektori. Dakle, ne postoji linearni operator s traženim svojstvima.