Poglavlje 5

Rang matrice

DEFINICIJA 5.1. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i neka su $S_1, \dots, S_n \in M_{m1}(\mathbb{F})$ stupci od A. **Rang matrice** A definira se kao $\dim [\{S_1, \dots, S_n\}]$. Oznaka $r(A)$.

ČINJENICE 5.2.

1. $r(A) \leq m, n$. Očito je $r(A) \leq n$, a $r(A) \leq m$ jer je $\dim M_{m1}(\mathbb{F}) = m$.
2. Riječima: Rang je broj linearno nezavisnih stupaca od A.
3. $r(A) = 0$ ako i samo ako je $A = 0$. $r(I_n) = n$.

ZADATAK 5.1. Odredite rang matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE Stupci matrice A su $S_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $S_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $S_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Odmah se vidi da je $S_2 = -2S_1$ i S_1, S_3 su linearno nezavisni. Dakle, $r(A) = 2$. $\square$

Teorem 5.3. *Broj linearno nezavisnih redaka od $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ jednak je broju linearno nezavisnih stupaca, tj. "rang po retcima jednak je rangu po stupcima".*

ZADATAK 5.2. Utvrdite rang po retcima matrice A iz prethodnog zadatka.

RJEŠENJE Retci matrice A su $R_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $R_2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $R_3 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Očito su R_1 i R_2 linearno nezavisni. Pretpostavimo da je $R_3 = \alpha R_1 + \beta R_2$. Tada je

$$\begin{aligned} -2 &= \alpha + 2\beta \\ 4 &= -2\alpha - 4\beta \\ 1 &= \alpha \end{aligned}$$

Rješenje je $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{3}{2}$ pa je $R_3 = R_1 - \frac{3}{2} R_2$. Dakle, $r(A) = 2$. $\square$

ČINJENICE 5.4.

1. Primjenom elementarnih transformacija rang matrice se ne mijenja.
2. Kažemo da je matrica $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ekvivalentna matrici $B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ako se A može dobiti iz B primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija redaka i stupaca. Pišemo $A \sim B$.
3. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $M_{mn}(\mathbb{F})$.
4. Za $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $A \sim B$ povlači da je $r(A) = r(B)$.

5. Neka je $r = 0, 1, \ldots, \min\{m, n\}$. Matrica $D_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ (r jedinica) zove se **kanonska matrica tipa** $m \times n$ **ranga** r. Na primjer, sve matrice $D_r \in M_{23}(\mathbb{F})$ su
$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Ako je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $r(A) = r$, onda je $A \sim D_r \in M_{mn}(\mathbb{F})$.

7. Za $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ je $A \sim B$ ako i samo ako je $r(A) = r(B)$.

Zadatak 5.3. Odredite $r(A)$ iz Zadatka 5.1 primjenom elementarnih transformacija.

Rješenje

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D_2.$$

Dakle, $r(A) = 2$.

Zadatak 5.4. Odredite $r(A)$ za $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim D_3.$$

Dakle, $r(A) = 3$.

Zadatak 5.5. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ matrica ranga r. Dokažite da se A može prikazati kao zbroj r matrica ranga 1. (Uputa: Tvrdnju prvo dokažite za slučaj kada je A kanonska matrica ranga r.)

Rješenje Iz $r(A) = r$ slijedi da postoje regularne matrice $S \in M_m$ i $T \in M_n$ takve da je $A = SD_rT$, pri čemu je $D_r \in M_{mn}$ kanonska matrica ranga r. Matricu D_r lako rastavimo na zbroj r matrica ranga 1: definiramo matrice $B_1, \ldots, B_r$ tako da matrica B_k ima 1 na mjestu (k, k) i sve ostalo nule. Tada je $D_r = B_1 + \ldots + B_r$, odakle je $A = SD_rT = SB_1T + \ldots + SB_rT$. Kako su S i T regularne matrice, vrijedi $r(SB_kT) = r(B_k) = 1$.

DZ 5.1. Odredite $r(A)$ za

1. $A = \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3)$

2. $A = \begin{bmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 2)$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 6 & 6 & 0 & 20 & 19 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3)$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3)$

Zadatak 5.6. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite $r(A)$ za $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Rješenje

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda - 12 & 0 & 6 & -15 \\ -20 & 0 & 10 & -25 \\ -4 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda - 12 & 0 & 6 & -15 \\ 4 & 0 & \text{-2} & 5 \\ -4 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & \frac{13}{2} \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \text{-2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$r(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = 0 \\ 3, & \lambda \neq 0 \end{cases}.$$

□

DZ 5.2. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rang matrice

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 2$ za $\lambda = 3$, inače je $r(A) = 3)$,

2. $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{bmatrix}$ $(r(A) = 2$ za $\lambda = 0$, inače je $r(A) = 3)$,

3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda & 7 \end{bmatrix}$ $(r(A) = 3$ za sve $\lambda)$.

ZADATAK 5.7. Neka su dani vektori $a_1, \ldots, a_k, b \in \mathbb{F}^n$. Dokažite da je b jednak linearnoj kombinaciji vektora $a_1, \ldots, a_k$ ako i samo ako je

$$r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k & b \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{bmatrix}\right).$$

RJEŠENJE

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je b jednak linearnoj kombinaciji vektora $a_1, \ldots, a_k$. Tada je $b \in [\{a_1, \ldots, a_k\}]$ pa je sigurno $[\{a_1, \ldots, a_k\}] = [\{a_1, \ldots, a_k, b\}]$. Zaista, uvijek je $[\{a_1, \ldots, a_k\}] \leq [\{a_1, \ldots, a_k, b\}]$, dok obratna inkluzija slijedi iz

$$\begin{aligned} x \in [\{a_1, \ldots, a_k, b\}] \Rightarrow x &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \beta b, \text{ za } b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \beta \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta\lambda_i)\, a_i \\ \Rightarrow x &\in [\{a_1, \ldots, a_k\}]. \end{aligned}$$

Vektore $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{F}^n$ možemo shvatiti kao stupce pa dobivamo matrice $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k & b \end{bmatrix}$. Njihovi rangovi su po definiciji

$$r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{bmatrix}\right) = \dim [\{a_1, \ldots, a_k\}] = \dim [\{a_1, \ldots, a_k, b\}] = r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k & b \end{bmatrix}\right).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k & b \end{bmatrix}\right)$. Tada je i $\dim [\{a_1, \ldots, a_k\}] = \dim [\{a_1, \ldots, a_k, b\}]$. Iz toga i činjenice da je $[\{a_1, \ldots, a_k\}] \leq [\{a_1, \ldots, a_k, b\}]$, slijedi da je $[\{a_1, \ldots, a_k\}] = [\{a_1, \ldots, a_k, b\}]$. Specijalno je $b \in [\{a_1, \ldots, a_k\}]$, odnosno b je linearna kombinacija vektora $a_1, \ldots, a_k$.

ZADATAK 5.8. Provjerite jesu li vektori $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$ linearno nezavisni.
RJEŠENJE Vektori a_1, a_2, a_3 su linearno nezavisni ako i samo ako je $\dim [\{a_1, a_2, a_3\}] = 3$. Pogledajmo matricu $A = \begin{bmatrix} a_1^T & a_2^T & a_3^T \end{bmatrix}$ i odredimo njen rang.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -27 & -21 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -9 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \\ -9 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \\ -9 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $r(A) = 2$ pa su a_1, a_2, a_3 linearno zavisni.

ZADATAK 5.9.

1. Navedite primjer matrice $A \in M_n$, $A \neq 0$, takve da je njena adjunkta $\tilde{A}$ jednaka nulmatrici.

2. Što možete zaključiti o adjunkti matrice $A \in M_n$ čiji je rang jednak $n - 2$?

3. Neka je $A \in M_n$ i $B = 2A$. Koja je veza između njihovih adjunkti $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$?

Zadatak 5.10. U $\mathbb{R}^5$ zadani su potprostori M i N razapeti vektorima $M = [\{a_1, a_2, a_3\}]$, $a_1 = (1,0,2,4,7)$, $a_2 = (-4,2,8,1,1)$, $a_3 = (1,1,0,0,9)$, $N = [\{b_1, b_2, b_3\}]$, $b_1 = (2,2,-1,4,9)$, $b_2 = (4,-4,12,1,6)$, $b_3 = (1,4,1,5,-5)$. Odredite $\dim M$, $\dim N$, $\dim(M+N)$, $\dim(M \cap N)$.

Rješenje Primijetimo da je $\dim M$ jednaka broju linearno nezavisnih vektora među vektorima a_1, a_2, a_3, a $\dim N$ je jednaka broju linearno nezavisnih vektora među vektorima b_1, b_2, b_3. Te vektore možemo shvatiti kao stupce nekih matrica pa su rangovi tih matrica jednaki dimenzijama odgovarajućih prostora.

$$M' := \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 16 & -2 \\ 0 & 17 & -4 \\ 0 & 29 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je $r(M') = 3$, tj. $\dim M = 3$.

$$N' := \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 12 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -6 & -20 & 0 \\ -3 & 8 & 0 \\ -6 & -19 & 0 \\ 19 & 26 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 1 \\ 3 & 10 & 0 \\ -\frac{27}{5} & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je $r(N') = 3$, tj. $\dim N = 3$.

$M + N = [\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}]$ pa gledamo matricu

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & 8 & 0 & -1 & 12 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 9 & 9 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 16 & -2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 17 & -4 & -4 & -15 & 1 \\ 0 & 29 & 2 & -5 & -22 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 20 & 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 25 & 0 & 4 & -31 & 17 \\ 0 & 25 & 0 & -9 & -14 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 42 & 1 & 0 & -12 & 18 \\ 0 & 20 & 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & -47 & 45 \\ 0 & -155 & 0 & 0 & 22 & -83 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & -47 & 45 \\ 0 & -155 & 0 & 0 & 22 & -83 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 105 & -47 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & -155 & 22 & -83 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 105 & -47 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{995}{21} & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{995}{21} & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $r(X) = 5$ pa je $\dim M + N = 5$. Konačno je

$$\dim(M \cap N) = \dim M + \dim N - \dim(M+N) = 3 + 3 - 5 = 1.$$

□

ZADATAK 5.11. Za koje je skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vektor $b = (7, -2, \lambda)$ linearna kombinacija vektora $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$?

RJEŠENJE Zadatak 5.7 kaže da je b linearna kombinacija vektora a_1, a_2, a_3 ako i samo ako je $r\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$. Odredimo najprije $r\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -6 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 15 & 25 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je $r(A) = 2$.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 15 & 25 & 0 & 40 \\ 3 & 5 & 0 & \lambda - 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 3 & 5 & 0 & \lambda - 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 15 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 15 \end{bmatrix}.$$

Očito je $r(\tilde{A}) = 2$ ako i samo ako je $\lambda = 15$.

DZ 5.3. Neka je $A \in M_{mp}(\mathbb{F})$ te $B \in M_{pn}(\mathbb{F})$. Tada je $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

RJEŠENJE Označimo s $S_1, \ldots, S_n$ stupce matrice B, te s r rang matrice B. U slučaju $r = 0$, tj. $B = 0$, tvrdnja zadatka trivijalno slijedi. Za $r \geq 1$, BSO pretpostavimo da je upravo prvih r stupaca matrice B, $\{S_1, \ldots, S_r\}$, linearno nezavisno. Pokažimo prvo da je $r(AB) \leq r(B)$. Stupčana reprezentacija matrice AB dana je skupom $\{AS_1, \ldots, AS_n\}$, pa koristeći pretpostavku za stupce matrice B slijedi da postoje odgovarajući skalari takvi da vrijedi

$$AS_k = A\Big(\sum_{j=1}^{r} \lambda_{kj} S_j\Big) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{kj}(AS_j), \quad k = r+1, \ldots, n,$$

odakle vidimo da se stupci $AS_{r+1}, \ldots, AS_n$ mogu prikazati preko prvih r, što daje željenu nejednakost. Druga nejednakost slijedi iz prethodno dokazane i činjenice da se transponiranjem rang ne mijenja:

$$r(AB) = r((AB)^T) = r(B^T A^T) \leq r(A^T) = r(A).$$

DZ 5.4. Neka je $A \in M_m(\mathbb{F})$ regularna matrica. Tada za svaku matricu $B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ vrijedi $r(AB) = r(B)$.

RJEŠENJE Iz prethodnog zadatka slijedi $r(AB) \leq r(B)$. S druge strane, kako je A regularna, postoji A^{-1}, pa još jednom koristeći prethodni zadatak slijedi

$$r(B) = r(IB) = r((A^{-1}A)B) = r(A^{-1}(AB)) \leq r(AB).$$

ZADATAK 5.12. Odredite rang matrice A ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Rješenje

Zadatak 5.13. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $A \neq 0$, proizvoljna fiksna matrica. Definiramo preslikavanje $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = r(tA)$. Dokažite da φ nije neprekidno preslikavanje.

Rješenje Za $t = 0$ je $\varphi(tA) = \varphi(0) = 0$.

Neka je $t \neq 0$. Tada je $tA \neq 0$ pa je $r(tA) \geq 1$ (zapravo je $r(tA) = r(A)$). Stoga φ ima prekid u $t = 0$. $\square$

DZ 5.5. Ispitajte linearnu nezavisnost vektora $b_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $b_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $b_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $b_4 = (2, -3, 4, 11, 1)$.

DZ 5.6. Za koje je skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vektor $b = (5, 9, \lambda)$ linearna kombinacija vektora $a_1 = (4, 4, 3)$, $a_2 = (7, 2, 1)$, $a_3 = (4, 1, 6)$? (rj: $\lambda \in \mathbb{R}$)

DZ 5.7. Za koje je skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vektor $b = (\lambda, 2, 5)$ linearna kombinacija vektora $a_1 = (3, 2, 6)$, $a_2 = (7, 3, 9)$, $a_3 = (5, 1, 3)$? (rj: takav λ ne postoji)

DZ 5.8. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, pri čemu je $m > n$. Dokažite: $A^T A$ je regularna akko $r(A) = n$.