

# LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi ispitni rok - 14. veljače 2024.

## ZADATAK 1

(23 boda) Neka je  $S \subseteq M_2(\mathbb{R})$  dan s

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t^2 \\ t & 0 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (a) Dokažite da  $S$  nije vektorski potprostor od  $M_2(\mathbb{R})$  te odredite jednu bazu za  $[S]$ .  
 (b) Dokažite da je

$$M = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = XA, \forall A \in [S]\}$$

vektorski potprostor od  $M_2(\mathbb{R})$  te mu odredite jednu bazu.

### Rješenje:

- (a)  $S$  nije potprostor od  $M_2(\mathbb{R})$  jer ne sadrži nulmatricu. Nadalje, vidimo kako je

$$S \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \leq M_2(\mathbb{R}).$$

Kako je

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq S,$$

te se lako vidi da su navedene matrice linearno nezavisne, slijedi da je  $\dim[S] \geq 3$ , pa zbog prethodnog konačno dobivamo

$$[S] = [\{E_{11}, E_{12}, E_{21}\}].$$

- (b) Neka su  $X, Y \in M$  te  $A \in [S]$  proizvoljni. Tada je zbog svojstava množenja matrica

$$(\alpha X + \beta Y)A = \alpha(XA) + \beta(YA) = \alpha(AX) + \beta(AY) = A(\alpha X + \beta Y),$$

pa zaključujemo da je  $M \leq M_2(\mathbb{R})$ . Primijetimo nadalje kako je ponovno zbog distributivnosti množenja matrica

$$X \in M \iff X \text{ komutira s } E_{11}, E_{12}, E_{21}.$$

Nužnost uvjeta je očita. S druge strane, svaka  $A \in [S]$  se može prikazati u obliku  $A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21}$ , pa imamo

$$AX = (aE_{11} + bE_{12} + cE_{21})X = aE_{11}X + bE_{12}X + cE_{21}X = aXE_{11} + bXE_{12} + cXE_{21} = XA.$$

Testiranjem uvjeta komutiranja na prve dvije matrice,  $E_{11}$  i  $E_{12}$  već dobijemo

$$X \in M \implies X \in [\{I\}],$$

pa kako skalarne matrice komutiraju s cijelim  $M_2(\mathbb{R})$  slijedi

$$M = [\{I\}].$$

# LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi ispitni rok - 14. veljače 2024.

## ZADATAK 2

(a) (15 bodova) Zadani su potprostori  $M$  i  $N$  vektorskog prostora  $\mathbb{C}^3$  nad poljem  $\mathbb{R}$ :

$$M = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \bar{z}_1 + iz_2 - z_3 = 0\},$$

$$N = [\{(2i, i, -2), (1 + i, 0, 1 - i), (-2i, 1, 1 + i)\}].$$

Odredite po jednu bazu za  $M + N$  i  $M \cap N$ .

(b) (5 bodova) Ako je  $M$  potprostor od  $\mathbb{C}^n$  nad poljem  $\mathbb{C}$  dimenzije  $k$ , dokažite da je  $M$  potprostor od  $\mathbb{C}^n$  nad poljem  $\mathbb{R}$  dimenzije  $2k$ .

### Rješenje:

(a) Odredimo prvo neku bazu za  $M$ . Ako označimo s  $z_k = x_k + iy_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , imamo

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3) \in M &\iff \bar{z}_1 + iz_2 - z_3 = 0 \\ &\iff \begin{cases} x_1 - y_2 - x_3 = 0, \\ -y_1 + x_2 - y_3 = 0, \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = y_2 + x_3 \\ x_2 = y_1 + y_3 \end{cases} \\ &\iff (z_1, z_2, z_3) = x_3(1, 0, 1) + y_1(i, 1, 0) + y_2(1, i, 0) + y_3(0, 1, i). \end{aligned}$$

Lako se vidi da su gore navedeni vektori u  $M$  i linearno nezavisni (nad  $\mathbb{R}$ !), pa imamo

$$M = [\{(1, 0, 1), (i, 1, 0), (1, i, 0), (0, 1, i)\}].$$

Direktnom provjerom se sada vidi da je skup

$$\{(1, 0, 1), (i, 1, 0), (1, i, 0), (0, 1, i), (2i, i, -2)\}$$

linearno nezavisan, te da vrijedi

$$\begin{aligned} (1 + i, 0, 1 - i) &= (1, 0, 1) + (i, 1, 0) - (0, 1, i), \\ (-2i, 1, 1 + i) &= (1, i, 0) - (1, 0, 1) + (0, 1, i) - (2i, i, -2). \end{aligned}$$

Stoga su baze za  $M + N$  i  $M \cap N$  dane s

$$\begin{aligned} B_{M+N} &= \{(1, 0, 1), (i, 1, 0), (1, i, 0), (0, 1, i), (2i, i, -2)\}, \\ B_{M \cap N} &= \{(1 + i, 0, 1 - i), (0, i + 1, i - 1)\}. \end{aligned}$$

# LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi ispitni rok - 14. veljače 2024.

## ZADATAK 3

(a) (10 bodova) Za  $n \geq 3$  izračunajte determinantu matrice reda  $n$

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2n & n & n & \dots & n & n & n+1 \\ 2n & n & n & \dots & n & n+2 & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2n & n & n & \dots & n+3 & n+2 & n+1 \\ 2n & n & 2n-2 & \dots & n+3 & n+2 & n+1 \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & \dots & n+3 & n+2 & n+1 \end{bmatrix}.$$

(b) (10 bodova) Koristeći elementarne transformacije nad retcima, odredite inverz matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

## Rješenje

a) Prvi redak množimo s  $-n$  i dodajemo ostalima, zatim radimo Laplaceov razvoj po prvom stupcu.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Od determinante ostaje jedino sumand pridružen permutaciji  $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$  koja ima  $I(p) = n-2 + \dots + 2 + 1 = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$  inverzija. Dakle

$$\det A = 2[(n-1)!](-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}.$$

b)

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Dakle

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

# LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi ispitni rok - 14. veljače 2024.

## ZADATAK 4

(a) (12 bodova) Riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 10 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

(b) (10 bodova) Koristeći Cramerovu metodu, odredite za koji  $\lambda \in \mathbb{R}$  sustav

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ima samo jedno rješenje, te vrijedi  $x_2 = 3$ .

*Rješenje*

(a)

$$A_p = \left[ \begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sada je skup rješenja

$$\{(4-2s-t, 3-s-t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \{(4, 3, 0, 0) + s(-2, -1, 1, 0) + t(-1, -1, 0, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Sustav ima jedinstveno rješenje ako je determinanta sustava različita od 0.

$$3 = x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4(\lambda - 1)} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \in \mathbb{R}.$$

**LINEARNA ALGEBRA 1**

Drugi ispitni rok - 14. veljače 2024.

**ZADATAK 5**

Neka su  $A, B \in M_n$ , te neka je  $A$  regularna matrica.

- (a) (10 bodova) Dokažite da retci matrice  $AB$  razapinju isti potprostor od  $M_{1n}$  kao i retci matrice  $B$ .
- (b) (5 bodova) Vrijedi li analogna tvrdnja za stupce, to jest, razapinju li stupci matrice  $AB$  isti potprostor od  $M_{n1}$  kao stupci matrice  $B$ ?

*Rješenje* (a) Neka je  $M$  potprostor od  $M_{1n}$  razapet retcima od  $AB$ , te  $L$  potprostor od  $M_{1n}$  razapet retcima od  $B$ . Retci matrice  $AB$  se mogu prikazati kao linearne kombinacije redaka od  $B$ , pa je  $M \leq L$ . Nadalje, kako je  $A$  regularna matrica,  $r(AB) = r(B)$ , pa je  $\dim M = \dim L$ . Kako je  $M \leq L$ , slijedi  $M = L$ , što je i trebalo dokazati.

(b) Ova tvrdnja ne vrijedi.

Na primjer, neka je  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Tada je  $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , odakle je očito da stupci od  $AB$  ne razapinju isti potprostor od  $M_{2,1}$  kao stupci od  $B$ .