Linearna algebra 2 - teorija za vježbe

1 Linearni operatori

DEFINICIJA 1.1. Neka su U, V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : U \to V$ zovemo **linearni operator** ako vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \quad \forall x, y \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{F}. \quad \text{(svojstvo linearnosti)}$$

Svojstvu linearnosti ekvivalentno je

$$\begin{aligned} A(x+y) &= A(x) + A(y), \quad \forall x, y \in U \quad \text{(aditivnost)} \\ A(\alpha x) &= \alpha A(x), \quad \forall x \in U, \alpha \in \mathbb{F} \quad \text{(homogenost).} \end{aligned}$$

ČINJENICE 1.2. Neka je $A : V \to W$ linearan operator.

1. $\operatorname{Im} A = A(V) = \{Av : v \in V\} \leq W$ je **slika** operatora A.

2. $\operatorname{Ker} A = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : Ax = 0\} \leq V$ je **jezgra** operatora A.

3. Ako su V, W KDVP, onda su i $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} A$ KDVP i uvodimo oznake

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(A) &:= \dim \operatorname{Im} A \quad \text{je } \textbf{rang operatora } A, \\ \mathrm{d}(A) &:= \dim \operatorname{Ker} A \quad \text{je } \textbf{defekt operatora } A. \end{aligned}$$

4. Vrijedi

$$\begin{aligned} A \text{ je injekcija} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} A = \{0\}, \\ A \text{ je surjekcija} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} A = W. \end{aligned}$$

5. Linearan operator koji je injekcija zovemo **monomorfizam**, linearan operator koji je surjekcija zovemo **epimorfizam**, a linearan operator koji je bijekcija zovemo **izomorfizam**.

6. (zadavanje linearnog operatora na bazi i proširenje po linearnosti). Neka su V, W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, $\dim V = n < \infty$, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ baza za V, $(w_1, \ldots, w_n)$ bilo koja uređena n–torka vektora iz W. Tada postoji jedinstveni linearni operator $A : V \to W$ takav da je

$$Ab_i = w_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Teorem 1.3 (o rangu i defektu)**.** *Neka je $A : V \to W$ linearni operator,* $\dim V < \infty$. *Tada je*

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = \dim V.$$

NAPOMENA 1.4. Ako je $A : V \to W$ linearni operator i $\dim V = \dim W < \infty$, tada je ekvivalentno:

(1) A je monomorfizam,

(2) A je epimorfizam,

(3) A je izomorfizam.

Kažemo da su prostori V i W **izomorfni** ako postoji izomorfizam $A : V \to W$. Oznaka: $V \simeq W$.
ČINJENICE 1.5.

1. Neka su V, W KDVP nad $\mathbb{F}$. Tada su V i W izomorfni akko je $\dim V = \dim W$.

2. $\simeq$ je relacija ekvivalencije.

Posljedica činjenice 1. je da nijedan pravi potprostor KDVP ne može biti izomorfan svojem potprostoru. To ne vrijedi kod beskonačnodimenzionalnih prostora.
DEFINICIJA 1.6. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, $P : V \to V$ linearni operator takav da je $P^2 = P$ (takav se linearan operator zove projektor).
Vrijedi:

(a) $a \in \operatorname{Im} P \Longleftrightarrow Pa = a$.

(b) Ako je $P \neq I$, onda P nije izomorfizam.

(c) $V = \operatorname{Ker} P \dotplus \operatorname{Im} P$.

NAPOMENA 1.7. Neka je $\dim V = n$, $M \leq V$, $M \neq \{0\}, V$ i neka je $\{a_1, \ldots, a_k\}$ baza za M. Nadopunimo je do baze za V, tj. neka je $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ baza za V. Vektori $a_{k+1}, \ldots, a_n$ čine bazu za direktni komplement L od V.
Definirajmo preslikavanje $P : V \to V$ kao

$$P(a_i) = a_i, \quad i = 1, \ldots, k$$
$$P(a_i) = 0, \quad i = k+1, \ldots, n$$

te ga proširimo po linearnosti. Očito je $P^2(a_i) = P(a_i)$, za sve i pa je P projektor. Kažemo da je P **projektor prostora V na potprostor M u smjeru potprostora L.**
ČINJENICE 1.8. Neka su V i W vektorski prostori. Skup $L(V, W) = \{A : V \to W \mid A \text{ je linearan operator}\}$ uz operacije

$$(A + B)x = Ax + Bx$$
$$(\alpha A)x = \alpha Ax, \quad \alpha \in \mathbb{F}$$

je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Ako su V i W KDVP onda je $\dim L(V, W) = \dim V \cdot \dim W$.
ČINJENICE 1.9. 1. Ako je $V = W$, onda umjesto $L(V, V)$ pišemo $L(V)$.

2. $L(V)$ je vektorski prostor. Ako je $\dim V < \infty$, onda je $\dim L(V) = (\dim V)^2$.

3. $L(V)$ ima i bogatiju strukturu: operatore iz $L(V)$ možemo komponirati. Definiramo

$$A \circ B = AB : V \to V, \quad (AB)(x) = A(B(x)).$$

4. Komponiranje operatora je

   1) asocijativno: $A(BC) = (AB)C$,
   2) kvaziasocijativno: $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$,
   3) distributivno prema zbrajanju: $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$,
   4) postoji neutralni element: $IA = AI = A$, gdje je $I(x) = x$ jedinični operator,

   pa kažemo da je $L(V)$ **asocijativna algebra s jedinicom**. Naglasimo da komutativnost kompozicije ne vrijedi.

5. $GL(V) = \{A \in L(V) : A \text{ je bijekcija}\}$ je skup svih regularnih operatora (izomorfizama) na V.

2 Linearni funkcionali. Dualni prostor.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. I $\mathbb{F}$ možemo shvatiti kao vektorski prostor nad samim sobom, $\dim \mathbb{F} = 1$. Linearni operator $f : V \to \mathbb{F}$ naziva se **linearni funkcional**.
Za linearne funkcionale vrijedi da je $r(f) \in \{0, 1\}$ jer je $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{F}$. Prema teoremu o rangu i defektu je onda $d(f) \in \{\dim V, \dim V - 1\}$. Preciznije:

1) $r(f) = 0$ akko je $f = 0$ nul-funkcional. Tada je $d(f) = \dim V$.

2) $r(f) = 1$ akko je f surjekcija. Tada je $d(f) = \dim V - 1$.

Činjenice 2.1. 1. $V^* := L(V, \mathbb{F})$ dualni prostor of V.

2. Ako je $\dim V < \infty$, onda je $\dim V^* = \dim V$ pa su V i V^* izomorfni.

3. Konstrukcija izomorfizma između V i V^*:
   Neka je $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza za V. Tada je baza za V^* dana funkcionalima $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, gdje su

$$e_j^*(e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

   Tu bazu označavamo s B^* i zovemo **dualna baza** bazi B. Baza B^* je jednoznačno određena bazom B i ovisi o njoj! Izomorfizam između V i V^* je sada dan s $A : V \to V^*$, $A(e_i) = e_i^*$, $i = 1, \dots, n$.

4. Ako je $\dim V < \infty$, onda je $\dim V^{**} = \dim V$. Izomorfizam između V i V^{**} konstruiramo prirodno, bez poziva na bazu: $\Phi : V \to V^{**}$, $\Phi(x) = \hat{x}$, gdje je $\hat{x} : V^* \to \mathbb{F}$, $\hat{x}(f) = f(x)$.

Napomena 2.2. Neka je $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, i neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^n$. Tražimo opći oblik linearnog funkcionala na $\mathbb{R}^n$. Neka je $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Tada je

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i,$$

za neke $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Prema tome, linearni funkcionali na $\mathbb{R}^n$ su polinomi prvog stupnja u n varijabli bez slobodnog člana.

3 Matrični prikaz (zapis) linearnog operatora

Neka su V, W vektorski prostori nad $\mathbb{F}$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Neka su $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$, $(f) = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze za V odnosno W.

(1) Svaki vektor $v \in V$ ima jedinstveni prikaz oblika $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ koji zapisujemo u jednostupčanoj matrici

$$v(e) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Ovaj zapis zovemo **matrični prikaz vektora v u bazi** (e), i on ovisi o bazi.

Preslikavanje $\varphi : V \to \mathbb{F}^n$, $\varphi(v) = v(e)$ je izomorfizam.

(2) Neka je $A \in L(V, W)$. Operator A je potpuno određen svojim djelovanjem na bazi. Vektori $Ae_1, \dots, Ae_n$ su u W pa ih možemo prikazati u bazi (f) kao

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tako dobivene koeficijente pišemo u matricu

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{F}).$$

Ovaj zapis zovemo **matrični zapis operatora A u paru baza** (e)**,** (f). Po stupcima imamo matrične zapise vektora Ae_j, $j = 1, \dots, n$.

Preslikavanje $\Psi : L(V, W) \to M_{mn}(\mathbb{F})$, $\Psi(A) = A(f, e)$ je izomorfizam.

Činjenice 3.1. 1. Neka su $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$, $(f) = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze za V, W, $x \in V$, $A \in L(V, W)$. Tada je

$$Ax(f) = A(f, e)x(e). \tag{1}$$

2. Neka su $(e), (f), (g)$ baze za V, W, X i neka su $A \in L(V, W)$, $B \in L(W, X)$. Tada je $BA \in L(V, X)$ i

$$BA(g, e) = B(g, f)A(f, e). \tag{2}$$

4 Promjena baze

Činjenice 4.1. Neka je $A \in L(V, W)$, $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$, $(e') = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ dvije baze za V, a $(f) = \{f_1, \dots, f_m\}$, $(f') = \{f'_1, \dots, f'_m\}$ dvije baze za W.

1. Operator A i matrični prikaz operatora $A(f, e)$ u bilo kojem paru baza $(e), (f)$ imaju isti rang, tj.

$$r(A) = r(A(f, e)). \tag{3}$$

Posebno je A regularan operator ako i samo ako je matrica $A(e)$ regularna.

2. Vrijedi
$$A\left(f', e'\right) = I_W\left(f', f\right) A(f, e) I_V\left(e, e'\right) = I_W\left(f, f'\right)^{-1} A(f, e) I_V\left(e, e'\right) \tag{4}$$
Matricu $I_V(e, e')$ zovemo **matrica prijelaza iz baze** (e) **u bazu** (e').

   NAPOMENA 4.2. Matricu prijelaza $I(e, e')$ možemo zapisati i kao $S(e)$, gdje je $S \in L(V)$ operator zadan na bazi s $Se_i = e'_i$, $i = 1, \ldots, n$.

3. Specijalno ako je $V = W$, imamo
$$A\left(e'\right) = I_V\left(e', e\right) A(e) I_V\left(e, e'\right) = I_V\left(e, e'\right)^{-1} A(e) I_V\left(e, e'\right). \tag{5}$$

   DEFINICIJA 4.3. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Kažemo da je matrica B **slična** matrici A ako postoji regularna matrica $S \in GL(n, \mathbb{F})$ takva da je $B = S^{-1}AS$.

   Dakle, formula (5) kaže da su matrični prikazi operatora $A \in L(V)$ u različitim bazama slične matrice.

4. Vrijedi i da je za $x \in V$
$$x\left(e'\right) = I_V\left(e', e\right) x(e) = I_V\left(e, e'\right)^{-1} x(e). \tag{6}$$

5. Ako su (e), (e') i (e'') tri baze za V, imamo sljedeću vezu između njih:
$$I_V\left(e', e''\right) = I_V\left(e', e, \right) I_V\left(e, e''\right) = I_V\left(e, e'\right)^{-1} I_V\left(e, e''\right). \tag{7}$$

5 Spektar

DEFINICIJA 5.1. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ naziva se svojstveni (karakteristični) polinom matrice A.

DEFINICIJA 5.2. Neka je $A \in L(V)$, pri čemu je V konačnodimenzionalni vektorski prostor. Svojstveni (karakteristični) polinom operatora A je polinom $k_A(\lambda) = k_{A(e)}(\lambda)$, gdje je matrični prikaz operatora A u bazi (e).

NAPOMENA 5.3. Gornja definicija ima smisla jer su za svake dvije baze (e) i $(e^{'})$ vektorskog prostora V matrice $A(e)$ i $A(e')$ slične.

DEFINICIJA 5.4. Neka je V K.D.V.P i $A \in L(V)$. Trag linearnog operatora A je definiran sa $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\, A(e)$, a determinanta linearnog operatora A sa $\det(A(e))$, pri čemu je (e) proizvoljna baza vektorskog prostora V.

NAPOMENA 5.5. Gornja definicija je dobra jer slične matrice imaju isti trag i determinantu.

NAPOMENA 5.6. Svojstveni polinom matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ je oblika
$$k_A(\lambda) = k_n\lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + k_1\lambda + k_0, k_i \in \mathbb{F}.$$
Vrijedi
$$\begin{aligned} k_n &= (-1)^n, \\ k_{n-1} &= (-1)^{n-1}\, \mathrm{tr}\, A, \\ k_0 &= \det A. \end{aligned}$$

DEFINICIJA 5.7. Neka je $p(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ proizvoljni polinom u jednoj varijabli λ s koeficijentima iz $\mathbb{F}$ i neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Tada pod matričnim polinomom podrazumijevamo
$$p(A) = a_mA^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1A + a_0I.$$

Napomena 5.8. Uočimo da potencije kvadratne matrice međusobno komutiraju pa s matričnim polinomima možemo postupati kao s polinomima u varijabli koja je element polja $\mathbb{F}$. Npr. vrijedi

$$A^2 - I = (A - I)(A + I) \text{ i } (A + I)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k.$$

Naravno, ovo ne vrijedi za matrične polinome u više varijabli, npr.

$$A^2 - B^2 \neq (A - B)(A + B).$$

Teorem 5.9. *(Hamilton-Cayley) Svaka kvadratna matrica poništava svoj svojstveni polinom, tj. vrijedi $k_A(A) = 0$.*

Napomena 5.10. Kako je $k_A(0) = \det A$, to je A je regularna matrica ako i samo ako je $k_A(0) \neq 0$.

Napomena 5.11. Koristeći prethodnu napomenu i Hamilton-Cayleyev teorem, dobivamo još jednu metodu invertiranja regularnih matrica. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ regularna matrica, $k_A(\lambda) = k_n\lambda^n + \cdots + k_1\lambda + k_0$ njen karakteristični polinom. Prema Hamilton-Cayleyevom teoremu je $k_A(A) = 0$, tj.

$$k_nA^n + k_{n-1}A^{n-1} + \cdots + k_1A + k_0I = 0$$

i kako je A regularna matrica, vrijedi $k_0 \neq 0$. Stoga je

$$\begin{aligned} k_0I &= -k_nA^n - k_{n-1}A^{n-1} - \cdots - k_1A \\ I &= -\frac{k_n}{k_0}A^n - \frac{k_{n-1}}{k_0}A^{n-1} - \cdots - \frac{k_1}{k_0}A \quad /A^{-1} \\ A^{-1} &= -\frac{k_n}{k_0}A^{n-1} - \frac{k_{n-1}}{k_0}A^{n-2} - \cdots - \frac{k_1}{k_0}I. \end{aligned}$$

Inverz od A smo prikazali kao matrični polinom u A.

Definicija 5.12. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, $A \in L(V)$. Za skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ kažemo da je **svojstvena vrijednost** operatora A ako postoji vektor $x \in V$, $x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda x$. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se **spektar** od A, oznaka je $\sigma(A)$. Vektor x se naziva **svojstveni vektor** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

Činjenice 5.13. 1. Svojstveni vektor nije jedinstven. Ako za svojstvenu vrijednost λ definiramo skup

$$V_A(\lambda) = \{x \in V : Ax = \lambda x\},$$

tada je $V_A(\lambda)$ potprostor od V. Zovemo ga **svojstveni potprostor**. (Vrijedi da je $V_A(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$)

2. Vrijedi da je A regularan ako i samo ako $0 \notin \sigma(A)$.

3. Broj $g(\lambda) := \dim V_A(\lambda)$ zovemo **geometrijska kratnost** svojstvene vrijednosti λ. Vrijedi da je $g(\lambda) \geq 1$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$.

4. Neka je V KDVP nad $\mathbb{F}$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost od A ako i samo ako je $k_A(\lambda_0) = 0$.

5. Ako je $\dim V = n$, onda A ima najviše n svojstvenih vrijednosti.

6. Jako se razlikuju slučajevi $V_{\mathbb{R}}$ i $V_{\mathbb{C}}$! Npr. u $\mathbb{R}^2$ operator rotacije nema (realnih) svojstvenih vrijednosti. Ako je $\dim V_{\mathbb{R}} = 3$, onda uvijek postoji barem jedna svojstvena vrijednost.

DEFINICIJA 5.14. Kratnost svojstvene vrijednosti λ kao nultočke karakterističnog polinoma naziva se **algebarska kratnost** svojstvene vrijednosti i označava s $a(\lambda)$.

Teorem 5.15. *Geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti je uvijek manja ili jednaka od njene algebarske kratnosti, tj.*

$$g(\lambda) \leq a(\lambda), \quad \forall \lambda \in \sigma(A).$$

NAPOMENA 5.16. Svojstvene vrijednosti možemo definirati i za kvadratne matrice. Naime, matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ možemo shvatiti kao linearni operator $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$,

$$A(x) = A(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \right).$$

Matrica tog operatora u paru kanonskih baza je upravo A.

ČINJENICE 5.17.

1. Neka je $A \in L(V)$, $\dim V < \infty$, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ te neka je $\left(e^{(i)}\right)$ baza za svojstveni potprostor $V_A(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Tada je unija svih skupova $\left(e^{(i)}\right)$, $i = 1, \ldots, k$, linearno nezavisan skup.

2. Posebno: različitim svojstvenim vrijednostima pripadaju linearno nezavisni svojstveni vektori.

3. Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor, $A \in L(V)$, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Operator A se može dijagonalizirati (tj. postoji baza od V u kojoj je matrični prokaz za A dijagonalna matrica) ako i samo ako su za svaku svojstvenu vrijednost od A njene algebarske i geometrijske kratnosti jednake.

4. Jednostavna posljedica: ako $A \in L(V)$, $\dim V = n$, ima n različitih svojstvenih vrijednosti, tada se on može dijagonalizirati.

5. Vrijedi napomenuti da se ne mogu svi operatori dijagonalizirati (čak ni na kompleksnim prostorima). Najopćenitiji oblik je tzv. Jordanova forma (na $V_{\mathbb{C}}$):

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_r \end{pmatrix}, \quad J_k = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & B_l \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

   Ovdje je J blok-dijagonalna matrica, svaki blok J_k zove se *Jordanova klijetka*, pripada različitoj svojstvenoj vrijednosti od A, i sam je blok-dijagonalna matrica koja se sastoji od osnovnih Jordanovih blokova ili *elementarnih Jordanovih klijetki* B_i.

DEFINICIJA 5.18. Neka je $A \in L(V)$, $M \leq V$. Kažemo da je M **invarijantan potprostor** za A ako je $A(M) \subseteq M$, tj. $Ax \in M$, $\forall x \in M$.

ČINJENICE 5.19.

1. Svaki operator ima invarijantne potprostore $\{0\}$ i V. Singularan operator A ima i prave invarijantne potprostore $\operatorname{Im} A \neq V$, $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$.

2. Ako je $M = [\{e_1, \dots, e_k\}] \leq V$ pravi invarijantni potprostor za A, $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ baza za V, tada je matrični prikaz od A u toj bazi
$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$
blok-gornjetrokutasta matrica, gdje je $A_1 \in M_k(\mathbb{F})$.
3. Primijetimo da ako je uz oznake kao u prethodnoj točki $k_A(\lambda) = k_{A_1}(\lambda) k_{A_3}(\lambda)$.
4. Svaki svojstveni potprostor je invarijantan za A. Obrat ne vrijedi.

6 Unitarni prostori

Definicija 6.1. Neka je U (konačnodimenzionalan) vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Neka je $\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U \to \mathbb{F}$ preslikavanje sa svojstvima:

(1) $\langle a, a \rangle \geq 0$

(2) $\langle a, a \rangle = 0$ ako i samo ako je $a = 0$,

(3) $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$,

(4) $\langle \alpha a, b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle$,

(5) $\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$

za sve $a, b, c \in U$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zovemo **skalarno množenje** na prostoru U, a skalar $\langle a, b \rangle$ **skalarni produkt** vektora a i b. Uređeni par $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zovemo **unitarni prostor** nad poljem $\mathbb{F}$.

Napomena 6.2. Dimenzija unitarnog prostora $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ po definiciji je dimenzija vektorskog prostora U. Skalarni produkt se umjesto $\langle a, b \rangle$ piše i kao $(a, b) = (a|b)$. Vrijedi:

(1') $\langle a, \beta b \rangle = \overline{\beta} \langle a, b \rangle$,

(2') $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$,

za sve $a, b, c \in U$, $\beta \in \mathbb{F}$. Također vrijedi

(3') $\langle a, 0 \rangle = \langle 0, a \rangle = 0$, za sve $a \in U$.

Napomena 6.3. Po uzoru na $V^3(O)$ i u proizvoljnom unitarnom prostoru U možemo definirati **kut vektora** x i y, uz $x, y \neq 0$ sa
$$\cos \angle(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}}.$$
Na unitarnom prostoru U vrijedi **nejednakost Cauchy -Schwarz-Bunjakovskog**:

Teorem 6.4. *Neka je U unitarni prostor i $a, b \in U$ bilo koji njegovi vektori. Tada vrijedi:*
$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \cdot \langle b, b \rangle.$$
Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako su vektori a i b linearno zavisni.

NAPOMENA 6.5. Na nekim unitarnim prostorima $C-S-B$ nejednakost izgleda ovako:

(1) Na $\mathbb{F}^n$ je $|\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}|^2 \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)\cdot(\sum_{i=1}^n |y_i|^2)$, uz $x_i, y_i \in \mathbb{F}, i = 1, \cdots, n$.

(2) Na $C([a,b])$ je $(\int_a^b f(t)g(t)dt)^2 \leq (\int_a^b (f(t)^2)dt)(\int_a^b (g(t))^2 dt)$.

(3) Na $M_n(\mathbb{C})$ je $|\operatorname{tr}(AB^*)|^2 \leq \operatorname{tr}(AA^*)\operatorname{tr}(BB^*)$.

DEFINICIJA 6.6. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje sa svojstvima:

(1) $\|x\| \geq 0$, za svako $x \in V$,

(2) $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ za svako $x \in V$,

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, za svako $x, y \in V$.

Tada kažemo da je $\|\cdot\|$ **norma** na V, a uređeni par $(V, \|\cdot\|)$ zovemo **normirani prostor**.

NAPOMENA 6.7. (1) Neka je $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ neki unitarni prostor. Tada je sa

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, x \in U$$

definirano preslikavanje $\|\cdot\| : U \longrightarrow \mathbb{R}$ koje je norma na U pa je $(U, \|\cdot\|)$ normirani prostor. Prema tome, svaki unitarni prostor je ujedno i normirani prostor. No, obrat ne vrijedi. Klasa unitarnih prostora je šira od klase unitarnih prostora.

(2) U terminima norme inducirane skalarnim produktom na unitarnom prostoru U, nejednakost $C-S-B$ poprima oblik

$$|\langle a, b\rangle| \leq \|a\|\|b\|,$$

za svaki izbor $a, b \in U$. Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori a i b linearno zavisni. Kut između vektora možemo zapisati ovako:

$$\cos\angle(x, y) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Uočimo da je gornja definicija dobra upravo zbog $S-C-B$.

DEFINICIJA 6.8. Neka je U unitarni prostor. Za vektor $a \in U$ kažemo da je **jedinični** ili **normiran** ako je $\|a\| = 1$.

NAPOMENA 6.9. Svaki vektor $a \in U, a \neq 0$ možemo normirati, tj. pridružiti mu vektor $a_0 = \frac{a}{\|a\|}$.

Neka je U unitarni prostor i $\{a_1, \cdots, a_m\}$ proizvoljan skup vektora iz U. Taj skup će biti linearno zavisan ili nezavisan ovisno o tome je li relacija

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m = 0$$

ispunjena za netrivijalne ili samo za trivijalne $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$. Pomnožimo ovu relaciju skalarno redom s $a_1, \cdots, a_m$. Dobijemo:

$$\begin{aligned}
\lambda\langle a_1, a_1\rangle + \lambda_2\langle a_2, a_1\rangle + \cdots + \lambda_m\langle a_m, a_1\rangle &= 0\\
\lambda\langle a_1, a_2\rangle + \lambda_2\langle a_2, a_2\rangle + \cdots + \lambda_m\langle a_m, a_2\rangle &= 0\\
&\vdots\\
\lambda\langle a_1, a_m\rangle + \lambda_2\langle a_2, a_m\rangle + \cdots + \lambda_m\langle a_m, a_m\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Dobili smo homogen sustav s m linearnih jednadžbi s m nepoznanica i to homogen. Matrica sustava je:

$$G(a_1, \cdots, a_m) = \begin{bmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_2, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_m, a_1 \rangle \\ \langle a_1, a_2 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_m, a_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_1, a_m \rangle & \langle a_2, a_m \rangle & \cdots & \langle a_m, a_m \rangle \end{bmatrix}$$

i to je **Gramova matrica** skupa vektora $\{a_1, \cdots, a_m\}$. Gornji sustav će imati i netrivijalnih rješenja, tj. $a_1, \cdots, a_m$ će biti linearno zavisni vektori ako i samo ako je determinanta sustava $\Gamma(a_1, \cdots, a_m) = \det G(a_1, \cdots, a_m) = 0$.

Napomena 6.10. Geometrijska interpretacija Grammove determinante u ravnini je sljedeća:

$$\Gamma(a, b) = |a|^2|b|^2 - |a|^2|b|^2(\cos\angle(a, b))^2 = |a|^2|b|^2(\sin\angle(a, b))^2 = |a \times b|^2 = P^2,$$

pri čemu je P površina paralelograma razapetog vektorima a i b.

7 Ortonormirani sustavi vektora

Definicija 7.1. Neka je U unitarni prostor i $a, b \in U$. Kažemo da je vektor a **ortogonalan (okomit)** na vektor b i pišemo $a \perp b$ ako je $\langle a, b \rangle = 0$.

Napomena 7.2. (1) Ako je vektor a okomit na vektor b, onda je i b okomit na a.

(2) Nul-vektor je okomit na sve vektore i to je jedini vektor s tim svojstvom.

Definicija 7.3. Neka je $S = \{a_1, \cdots, a_m\}$ skup vektora iz unitarnog prostora U sa svojstvom da je $a_i \neq 0$ za $i = 1, \cdots, m$. Kažemo da je skup S

1. **ortogonalan sustav vektora** ako je $a_i \perp a_k$ za sve $i, k \in \{1, \cdots, m\}, i \neq k$.
2. **ortonormiran sustav vektora** ako je S ortogonalan sustav vektora i vrijedi $\|a_i\| = 1$ za sve $i = 1, \cdots, m$.

Specijalno, ako je S ortonormiran skup i baza, kažemo da je S **ortonormirana baza** za U.

Napomena 7.4. Svaki ortogonalni skup vektora $\{a_1, \cdots, a_m\}$ takvih da je $a_i \neq 0$ za sve $i \in \{1, \cdots, m\}$ je linearno nezavisan. Zaista,

$$\Gamma(a_1, \cdots, a_m) = \begin{vmatrix} \|a_1\|^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \|a_2\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \|a_3\|^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|a_m\|^2 \end{vmatrix} = \|a_1\|^2 \cdots \|a_m\|^2 \neq 0.$$

Nadalje, ako je dimenzija unitarnog prostora U jednaka n i $\{a_1, \cdots, a_m\}$ ortogonalni sustav u prostoru U pri čemu su svi $a_i \neq 0$, onda je $m \leq n$.

Teorem 7.5. ***Pitagorin teorem***. *Neka je $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ ortogonalni sustav vektora u U. Vrijedi:*

$$\|a_1 + \cdots + a_m\|^2 = \|a_1\|^2 + \cdots + \|a_m\|^2.$$

Teorem 7.6. *(Gram - Schmidt) Neka je $S = \{a_1, \cdots, a_m\}$ linearno nezavisan sustav vektora iz unitarnog prostora U. Tada postoji sustav vektora $T = \{e_1, \cdots, e_m\}$ u U sa svojstvima:*

(1) T je ortonormirani sustav

(2) $[\{a_1, \cdots, a_k\}] = [\{e_1, \cdots, e_k\}]$ za sve $k = 1, \cdots, m$.

Napomena 7.7. (1) Vektore $\{e_1, \cdots, e_m\}$ definiramo induktivno s:

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle a_k, e_i \rangle e_i, \quad e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}, \quad k = 2, \cdots, m.$$

(2) Svaki konačnodimenzionalni unitarni prostor ima ortonormiranu bazu.

(3) Svaki ortogonalni sustav u konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru može se nadopuniti do ortogonalne baze tog prostora.

Napomena 7.8. Općenito, vektori $\{a_1, \cdots, a_m\}$ su linearno zavisni ako i samo ako se postupak ortogonalizacije ne može provesti.

Napomena 7.9. Koeficijenti $\alpha_i = \langle a, e_i \rangle$ iz prethodnog zadatka se zovu **Fourierovi koeficijenti** koeficijenti a.

8 QR faktorizacija

Prisjetimo se LU faktorizacije kvadratne matrice A: $A = LU$, gdje je L donjetrokutasta, a U gornjetrokutasta. Ideja je bila da je lakše rješavati dva trokutasta sustava $Ux = y$, $Ly = b$ nego $Ax = b$.
Ovdje je ideja da A napišemo u obliku $A = QR$, gdje je Q ortogonalna, a R gornjetrokutasta.

Algoritam. Neka je $A = [S_1 \ S_2 \ \ldots \ S_n]$, pri čemu su $\{S_1, \ldots, S_n\}$ stupci matrice A. Pomoću Gram–Schmidtovog postupka ortonormiramo stupce $\{S_1, \ldots, S_n\}$ i dobijemo skup $\{E_1, \ldots, E_r\}$, gdje je $r = r(A)$. Pritom smo izbacili one stupce S_i koji se mogu zapisati kao linearna kombinacija svojih prethodnika. Stavimo

$$Q := [E_1 \ E_2 \ \ldots \ E_r], \quad R := \begin{bmatrix} \langle S_1, E_1 \rangle & \langle S_2, E_1 \rangle & \langle S_3, E_1 \rangle & \ldots & \langle S_n, E_1 \rangle \\ 0 & \langle S_2, E_2 \rangle & \langle S_3, E_2 \rangle & \ldots & \langle S_n, E_2 \rangle \\ 0 & 0 & \langle S_3, E_3 \rangle & \ldots & \langle S_n, E_3 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \langle S_n, E_r \rangle \end{bmatrix}.$$

9 Ortogonalni komplement

Definicija 9.1. Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i M, N neki njegovi podskupovi. Kažemo da su skupovi M i N ortogonalni, i pišemo $M \perp N$, ako je $\langle a, b \rangle = 0$, za sve $a \in N$, $b \in N$.

Definicija 9.2. Neka su L i M potprostori unitarnog prostora U. Suma potprostora L i M, $L + M$, je ortogonalna ako je $L \perp M$. Pišemo $L \oplus M$.

Definicija 9.3. Neka je U unitaran prostor i $\emptyset \neq S \subseteq U$. **Ortogonalni komplement** skupa S je skup

$$S^\perp = \{x \in U : \langle x, y \rangle = 0, \text{ za svako } y \in S\}.$$

Činjenice 9.4.

1. Sigurno je $\langle 0, x\rangle = 0$, za sve $x \in S$, pa je $0 \in S^\perp$. Specijalno je $S^\perp \neq \emptyset$.
2. $U^\perp = \{0\}$.
3. $\{0\}^\perp = U$.
4. $S^\perp \leq U$, za svaki $S \subseteq U$.
5. $S^\perp = [S]^\perp$.
6. $\dim S^\perp = \dim U - \dim[S]$.
7. Neka je L bilo koji potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora U. Tada je $U = L \dotplus L^\perp$, tj. U se može prikazati kao direktna suma potprostora L i njegovog ortogonalnog komplementa.
8. Za razliku od direktnog komplementa, ortogonalni komplement je jedinstven.
9. Za svaki $x \in U$ postoje jedinstveni $a \in L$ i $b \in L^\perp$ takvi da je $x = a + b$ (još vrijedi da je $\langle a, b\rangle = 0$).
10. Neka je M potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora U. Tada vrijedi $\left(M^\perp\right)^\perp = M$.

10 Najbolja aproksimacija

Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor, $M \leq U$ i $x \in U$. Trebamo pronaći vektor $a \in M$ takav da je

$$\|x - a\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in M.$$

Broj $\min_{y \in M} \|x - y\|$ zovemo **udaljenost vektora x od potprostora** M, a vektor a zovemo **najbolja aproksimacija vektora** x vektorima iz M.
Rješenje problema: vektor a možemo dobiti kao $a = P_M x$, gdje je P_M ortogonalni projektor na potprostor M, tj. možemo pisati $x = a + b$, za $a \in M$, $b \in M^\perp$ i a je tražena najbolja aproksimacija vektora x.
Kako pronaći a? Nađemo ONB $\{e_1, \ldots, e_k\}$ za M. Tada je

$$a = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i. \tag{8}$$

Naime, ako tu ONB proširimo do ONB $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ za cijeli prostor U, onda x možemo zapisati kao

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i}_{\in M} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i}_{\in M^\perp} = a + b.$$

Zbog jedinstvenosti prikaza $x = a + b$ slijedi formula (8) za a.

11 Metoda najmanjih kvadrata

Dobiveno je n mjerenja i njima odgovara n točaka $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ u ravnini. Ideja: pronaći pravac koji „najbolje aproksimira" ta mjerenja. Neka taj pravac ima jednadžbu $y = kx + l$.
Imamo sustav

$$\begin{aligned} ka_1 + l &= b_1 \\ ka_2 + l &= b_2 \\ &\vdots \\ ka_n + l &= b_n, \end{aligned}$$

tj. sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

koji je najvjerojatnije nekonzistentan. No, mi svejedno želimo odrediti onaj $x_0 = (k_0, l_0)$ koji „najbolje aproksimira" taj sustav, tj. onaj $x_0 = (k_0, l_0)$ koji zadovoljava

$$||Ax_0 - b|| \leq ||Ax - b|| \quad \forall x \in M_{21}(\mathbb{R}).$$

Uvedemo li oznaku $M = \{Ax \,|\, x \in M_{21}(\mathbb{R})\}$, vidimo da je $M \leq M_{n1}(\mathbb{R})$. Označimo s $d(b, M)$ udaljenost vektora b od potprostora M. Tada vrijedi

$$d(b, M) = \min_{y \in M} ||b - y|| = \min_{y \in M} ||y - b||.$$

Označimo s $y_0 \in M$ vektor za kojeg je $d(b, M) = ||y_0 - b||$. Tada je y_0 ortogonalna projekcija vektora b na potprostor M. Pošto je $y_0 \in M$, postoji vektor $x_0 = (k_0, l_0)$, takav da je $Ax_0 = y_0$. Tada za taj $x_0 = (k_0, l_0)$ vrijedi

$$||Ax_0 - b|| \leq ||Ax - b|| \quad \forall x \in M_{21}(\mathbb{R}),$$

odnosno vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i k_0 + l_0 - b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i k + l - b_i)^2, \quad \forall k, l \in \mathbb{R}.$$

Zato kažemo da je x_0 rješenje sustava $Ax = b$ u smislu najmanjih kvadrata. Jasno, ako je x_0 rješenje u smislu najmanjih kvadrata, onda je Ax_0 zapravo ortogonalna projekcija vektora b na M.
Sad ćemo dati jednu elegantnu metodu rješavanja sustava $Ax = b$ u smislu najmanjih kvadrata.

Propozicija 11.1. *Neka je dan sustav $Ax = b$, gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix}, \quad b \in M_{n1}(\mathbb{R}),$$

takav da je $r(A) = 2$. Tada vrijedi:

a) Sustav $A^T Ax = A^T b$ ima jedinstveno rješenje.

b) Vektor x_0 je rješenje sustava $A^T Ax = A^T b$ ako i samo ako je x_0 rješenje sustava $Ax = b$ u smislu najmanjih kvadrata.

12 Operatori na unitarnim prostorima

Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor. Primijetimo na početku da je za svaki $a \in U$, $f_a : U \to \mathbb{F}$ definiran s $f_a(x) = \langle x, a \rangle$, linearni funkcional na U. Zapravo su to svi linearni funkcionali na U.

Teorem 12.1 (Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala)**.** *Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i f linearan funkcional na U. Tada postoji jedinstven vektor $a \in U$ takav da je*

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \quad x \in U.$$

Teorem 12.2. *Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(U)$. Postoji jedinstven operator $A^* \in L(U)$ takav da je*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \quad \forall x, y \in U.$$

Kažemo da je operator A^* ***hermitski adjungiran*** *operatoru A.*

Napomena 12.3. Matrica operatora A^* u ONB (e) je hermitski adjungirana matrici $A(e)$, tj.

$$A^*(e) = A(e)^*.$$

Definicija 12.4. Operator $A \in L(U)$ je **hermitski** (**antihermitski**) ako je $A^* = A$ $(A^* = -A)$.

Definicija 12.5. Neka je U unitaran prostor. Za $A \in L(U)$ kažemo da je **unitaran operator** ako vrijedi

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in U,$$

što je ekvivalentno $AA^* = A^*A = I$.

Napomena 12.6. Neka je U konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(U)$. Sljedeće tri tvrdnje su ekvivalentne:

1. A je unitaran operator.
2. Postoji ONB (e) takva da je $A(e)$ unitarna matrica.
3. Matrica $A(e)$ je unitarna u **svakoj** ONB (e).

Primjer 12.7. Ako je $B \in M_n(\mathbb{F})$ unitarna matrica i definiramo linearan operator $L_B : M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{n1}(\mathbb{F})$, $L_B x := B \cdot x$, onda je L_B unitaran operator.

13 Dijagonalizacija u ortonormiranoj bazi

Definicija 13.1. Neka je U unitaran prostor. Za operator $A \in L(U)$ kažemo da je **normalan operator** ako vrijedi $AA^* = A^*A$.

Primjer 13.2. Primjeri normalnih operatora:

- Hermitski operatori: Ako je $A^* = A$, tada je $AA^* = A^2 = A^*A$.
- Antihermitski operatori: Ako je $A^* = -A$, tada je $AA^* = -A^2 = A^*A$.
- Unitarni operatori: Ako je A unitaran operator, tada vrijedi $AA^* = I = A^*A$.

Teorem 13.3. *Neka je U kompleksan unitaran prostor i $A \in L(U)$. Postoji ONB (e) takva da operator A u njoj ima dijagonalan matrični prikaz $A(e)$ ako i samo ako je A normalan operator.*

Definicija 13.4. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **normalna matrica** ako vrijedi $AA^* = A^*A$.

Napomena 13.5. Neka je U konačnodimenzionalni kompleksni unitarni prostor i $A \in L(U)$. Sljedeće tri tvrdnje su ekvivalente:

1. A je normalan operator.
2. Postoji ONB (e) takva da je $A(e)$ normalna matrica.
3. Matrica $A(e)$ je normalna u **svakoj** ONB (e).

Teorem 13.6. *Za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ postoji unitarna matrica $U \in M_n(\mathbb{C})$ takva da je U^*AU dijagonalna matrica ako i samo ako je A normalna matrica.*

Propozicija 13.7. *Ako je $A \in L(U)$ normalan operator na konačnodimenzionalnom kompleksnom unitarnom prostoru U, te $\lambda, \mu \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \mu$, tada za $x \in V_A(\lambda)$, $y \in V_A(\mu)$, vrijedi $x \perp y$.*

Propozicija 13.8. *$A \in L(U)$ je normalan $\Leftrightarrow \forall x \in U \; ||Ax|| = ||A^*x||$.*

Propozicija 13.9. *Neka je $A \in L(U)$ normalan. Tada je $x \in V_A(\lambda) \Leftrightarrow x \in V_{A^*}(\overline{\lambda})$.*

14 Dijagonalizacija kvadratne forme

Definicija 14.1. **Simetrična kvadratna forma** je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadana sa

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle,$$

gdje je A simetrična realna matrica.

Definicija 14.2. Kažemo da je kvadratna forma

- **pozitivno definitna** ako je $\langle Ax, x \rangle > 0$ za $x \neq 0$;
- **pozitivno semidefinitna** ako je $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ za $x \in \mathbb{R}^n$;
- **negativno definitna** ako je $\langle Ax, x \rangle < 0$ za $x \neq 0$;
- **negativno semidefinitna** ako je $\langle Ax, x \rangle \leq 0$ za $x \in \mathbb{R}^n$;

Za sve ostale forme kažemo da su **indefinitne**.

Definicija 14.3. Kvadratna forma je **kanonska** ako je odgovarajuća matrica dijagonalna.

Simetričnu matricu A možemo zapisati u obliku $A = QDQ^T$, pri čemu je Q ortogonalna, a D dijagonalna matrica. Tada je

$$\langle Ax, x \rangle = \left\langle QDQ^T x, x \right\rangle = \left\langle DQ^T x, Q^T x \right\rangle.$$

Uvedemo li supstituciju $Q^T x = y$, dobivamo

$$\langle Ax, x \rangle = \langle Dy, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

pri čemu je $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Prema tome, svaka se kvadratna forma može svesti na kanonsku supstitucijom $y = Q^T x$.

Teorem 14.4. *Kvadratna forma je*

- *pozitivno definitna ako i samo ako je* $\lambda_i > 0$ *za sve* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$;
- *pozitivno semidefinitna ako i samo ako je* $\lambda_i \geq 0$ *za sve* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$;
- *negativno definitna ako i samo ako je* $\lambda_i < 0$ *za sve* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$;
- *negativno semidefinitna ako i samo akoje* $\lambda_i \leq 0$ *za sve* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.
- *indefinitna ako postoje* λ_i *i* λ_j *takvi da je* $\lambda_i > 0$ *i* $\lambda_j < 0$.

Brojeve $D_1 = |a_{11}|$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots, D_n = \det A$ zovemo **glavne minore** matrice A.

Teorem 14.5 (Sylvesterov kriterij)**.** *Kvadratna forma* q *je pozitivno definitna ako i samo ako je* $D_i > 0$ *za sve* $i = 1, \cdots, n$, *a negativno definitna ako i samo ako je* $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, D_4 > 0 \cdots$.

15 Krivulje i plohe drugog reda

Polinom drugog stupnja je funkcija oblika

$$p(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c,$$

gdje je A simetrična kvadratna matrica, b je stupac, a c je realni broj.
Krivulja (ploha) drugog reda je skup

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3) : p(x) = 0\}.$$

Gledamo nedegenerirani slučaj, tj. slučaj kad je $A \neq 0$. Vrstu krivulje (plohe) određujemo dijagonalizacijom kvadratne forme. Pri tom dijagonaliziramo pomoću ortogonalnih matrica kako bi i novi sustav bio Kartezijev (imao okomite osi).