Studentska natjecanja 2024.

Funkcijske i obične diferencijalne jednadžbe

19. 4. 2024.
Matko Ljulj
mljulj[at]math.hr

Uvod

U ovom predavanju proći ćemo neke tipove zadataka u kojima se treba pokazati neko svojstvo funkcija, ili treba naći sve funkcije koje zadovoljavaju neko svojstvo. Takvi zadatci pojavljivali su se i na srednjoškolskim natjecanjima (funkcijske jednadžbe). Na studentskim natjecanjima ti zadatci mogu uključivati i neke uvjete s derivacijama funkcije. Najjednostavniji takvi tipovi zadataka su obične diferencijalne jednadžbe – jednadžbe u kojima se pojavljuje funkcija i njene derivacije, a traži se funkcija koja zadovoljava te uvjete. Kažemo da su ti tipovi zadatak najjednostavniji jer se obične diferencijalne jednadžbe obrađuju na većini fakulteta na prvim godinama. To je i kod nas slučaj, imamo istoimeni kolegij u petom semestru.

Funkcijske jednadžbe

Funkcijske jednadžbe su jednadžbe u kojima je rješenje funkcija, za razliku od nekih drugih jednadžbi u kojima je rješenje jedan ili više realnih brojeva. Ukoliko nikada niste vidjeli takve zadatke, teško da ih možete rješavati u nekoliko minuta. Predlažemo da pogledate neke od materijala:

- `https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2015/07/A-Funkcijske-jednadzbe-Marin-Petkovic.pdf`, (autor Marin Petković, naše pripreme za međunarodna natjecanja);
- `https://web.math.pmf.unizg.hr/~mbasic/fun_jed_mr.pdf`, (autor Marko Radovanović, srpska skripta, jedna od najpoznatijih iz funkcijskih jednadžbi na našim prostorima).

Ipak, s obzirom da ste odradili već neke kolegije s analize (skoro dva, četiri ili više, ovisno o tome koja ste godina), poznavanje pojma funkcije vam je bolje nego učenicima srednje škole, među kojima se neki već i u prvom razredu sretnu s ovakvim tipom zadataka.

Neke tehnike koje se se koriste i stvari na koje treba obratiti u funkcijskim jednadžbama:

- Jednadžbe su dane u obliku "relacija vrijedi za sve realne x ili x, y", pa stoga možemo uvrštavati i neke konkretne vrijednosti tih realnih brojeva. Neki primjeri su neke konstante tipa $0, -1, 1$, ili nešto tipa $-x$ (kako bi se provjeravala (ne)parnost funkcije), ili izbori za x kojima se neki izrazi u jednadžbi pokrate.
- Korisno je, ako je moguće i ako vrijedi, pokazati da je funkcija surjektivna ili injektivna. Primjerice, uz surjektivnost, lagano možemo zaključiti koja su rješenja jednadžbe $f(f(x)+3) = 2f(x)+1$, a uz injektivnost možemo lagano zaključiti koja su rješenja jednadžbe $f(x-3) = f(f(x)+2)$. Također, korisno je tražiti i nultočke i fiksne točke, ili istražiti je li funkcija parna ili neparna.
- Funkcijske jednadžbe kriju dvije mine. Kao prvo, tehnikama u kojima uvrštavamo neke konkretne vrijednosti za varijable koje se pojavljuju u jednadžbi daju samo implikacije: ako vrijedi jednadžba, onda vrijede i naši zaključci. Na taj način ne možemo *a priori* dobiti i drugi smjer, a to je da su funkcije koje smo na kraju pronašli zaista i rješenja jednadžbe. Zato se nužno u funkcijskim jednadžbama na kraju rješavanja **mora napraviti provjera**, makar samo u kutu papira.
- Druga mina koja se javlja je još jedna rupa u logičkom razmišljanju. Ako zadatak svedete na to da tražena funkcija zadovoljava $(f(x)-x)(f(x)-1) = 0$, ne možete odmah zaključiti da postoje samo dva rješenja (identiteta i konstanta 1). Gledajući dobivenu jednadžbu, moguće je da postoji funkcija koja na nekim realnim brojevima se ponaša kao identiteta, a na preostalim kao konstanta 1. To najčešće nije slučaj, i takav slučaj se razriješi uvrštavanjem dviju takvih fiktivnih točaka domene s drugačijim ponašanjem i svođenjem do kontradikcije, ali to treba provjeriti.

Pogledajmo nekoliko primjera.

Zadatak 1.
Nađite sve funkcije $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{Q}$ vrijedi $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Što se mijenja kada $\mathbb{Q}$ zamijenimo s $\mathbb{R}$?

Rješenje.
Funkcijska jednadžba iz ovog primjera zove se *Cauchyjeva funkcijska jednadžba* te, ako vam se pojavi u rješavanju zadatka, možete se pozvati na nju i na zaključke koje ćemo sada pokazati.

Prvo primjerite da induktivno možete pokazati da vrijedi i

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ i realne $x_1, \ldots, x_n$. Time onda prvo možemo pokazati da je $f(n) = nf(1)$ za sve prirodne n, a onda i $f(1/n) = f(1)/n$. Nakon toga i $f(m/n) = m/nf(1)$, za sve prirodne m i n. Dakle, na racionalnim brojevima vrijedi da ako odredimo vrijednost $f(1)$, odredili smo i ponašanje cijele funkcije. S druge strane, primijetite da sigurno nećemo odrediti koju jednu vrijednost $f(1)$ može postići kada može postići više njih – jednostavno, ako je $f(x)$ rješenje jednadžbe, to je i $cf(x)$, za svaku konstantu c. Zato, zaključujemo da smo gotovi: funkcija mora biti oblika $f(x) = ax$, (a je racionalan) i svaka takva funkcija zadovoljava funkcijsku jednadžbu (što vidimo provjerom).

Kada je funkcijska zadana na realnim brojevima, ne vrijedi analogan zaključak. Naime, može se pokazati da ako nemamo dodatnih pretpostavki, da analogno rješenje ($f(x) = ax$) nije jedino rješenje Cauchyjeve jednadžbe, te dapače, da ih ima beskonačno mnogo, i možemo ih zadati pomoću Hamelove baze. Ta druga rješenja imaju mnogo "čudnih" svojstava (npr. imaju prekid u svakoj točki). Tek ako imamo neku dodatnu pretpostavku (a to su npr. neprekidnost ili monotonost), onda tek možemo pokazati da je funkcija nužno linearna.

Zadatak 2.
Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava $f(f(x)) = x$ nužno bijekcija.

Rješenje.
Ovo je dosta lagan primjer, ali pokazuje ideju kako se i inače pokazuje injektivnost i surjektivnost.

Za injektivnost, pretpostavimo suprotno: postoje dva različita realna broja x, y takva da je $f(x) = f(y)$. Posebno, vrijedi i $f(f(x)) = f(f(y))$, ali onda iz jednadžbe vrijedi $x = y$, čime dobivamo kontradikciju.

Za surjektivnost treba pokazati da za svaki $y \in \mathbb{R}$ postoji x takav da $f(x) = y$. Pa, iz jednadžbe je to dosta jasno: za fiksan y, taj x je $x := f(y)$.

Ovih nekoliko primjera i smjernica nisu ni blizu dovoljne da bismo u potpunosti znali rješavati funkcijske jednadžbe, ali dovoljne da možemo nastaviti s predavanjem.

Obične diferencijalne jednadžbe

Formalno, obična diferencijalna jednadžba je jednadžba oblika

$$F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

Manje precizno, to je jednadžba u kojoj se pojavljuju konstante te izrazi (ili poznate funkcije primijenjene na izraze) oblika x, $f(x)$, …, $f^{(n)}(x)$, za neki prirodan broj n. Primjer jedne (ružne) ODJ je

$$f(x)f'(x) = \cos(f''(x) + 2x) - \operatorname{tg}(x+2).$$

Prirodan broj n zovemo redom jednadžbe. Najlakši su zadatci dakako kada je $n = 1$.

Primijetite da derivacije i funkcije moraju imati usklađene argumente. Posebno, jednadžbu oblika $f'(x+2) = f(2x) + 3$ nećemo smatrati diferencijalnom.

Ovdje nećemo ulaziti duboko u teoriju ODJ-ova, jer time se bavi kolegij Obične diferencijalne jednadžbe u petom semestru (a i ta teorija ne ode preduboko), nego ćemo pokazati dvije metode rješavanja jednadžbi.

Zadatak 3.
Nađite rješenja jednadžbi $f'(x) = f(x)$ i $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$.

Rješenje.
Metoda koju ćemo pokazati zove se **metoda separacija varijabli**. Na prvi tren izgleda smiješno, ali zaista je metoda točna. Pogledajmo na prvoj jednadžbi. Prvo, umjesto f pisat ćemo y: $y' = y$. Zatim, možemo ju zapisati kao $\frac{dy}{dx} = y$. Sada "pomnožimo obje strane" s dx:

$$dy = y\ dx.$$

Ovo još nema nikakvog smisla, ali imat će kada dx i dy postanu članovi koji se pojavljuju kod integrala. Zato, prebacimo sve s y na jednu stranu, a sve s x na drugu, pa integrirajmo:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= dx, \\ \int \frac{dy}{y} &= \int dx, \\ \ln|y| + C_1 &= x + C_2. \end{aligned}$$

Primijetimo da nam ne trebaju dvije konstante C_1 i C_2. Sjetimo se da tražimo $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} \ln|y| &= x + C \\ |y| &= e^{x+C} = ae^x, \end{aligned}$$

gdje je a pozitivna konstanta. Kada se riješimo apsolutnih vrijednosti, te uzimajući u obzir da smo nekad i dijelili s y koji može teoretski biti i nula, dobivamo da su sva rješenja $f(x) = ae^x$, za $a \in \mathbb{R}$.
Riješimo i drugi primjer na isti način:

$$\begin{aligned} y' &= y(1-y) \\ \frac{dy}{dx} &= y(1-y) \\ \int \frac{dy}{y(1-y)} &= \int dx \\ -\ln\left(\left|\frac{y-1}{y}\right|\right) &= x + C, \\ y = \frac{e^x}{e^x + D}, &\quad D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Gore smo pokazali neki primjer kako se separacijom varijabli rješavaju neke ODJ, a isti način možete generalizirati i u drugim zadatcima. Jasno, ovom metodom možete rješavati samo jednadžbe prvog reda.

Konstante iz gornjih jednadžbi ili su proizvoljne (sve takve funkcije zadovoljavaju jednadžbu) ili određujemo iz takozvanih početnih uvjeta (recimo vrijednosti funkcije ili neke njene derivacije u jednoj točki). Općenito, za jedinstvenost rješenja trebamo imati jednako uvjeta kao što je red jednadžbe, te će i broj konstanti koje se pojavljuju u rješenju bez početnih uvjeta biti jednak redu jednadžbe.

Prije nastavka, promotrimo još malo prvu jednadžbu: $f'(x) = f(x)$. Kao prvo, iako je za jednadžbu nužno samo da je f diferencijabilna, možemo induktivno dokazati da je zapravo $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Naime, prvo imamo da je f diferencijabilna. Posebno, neprekidna je, pa je desna strana jednadžbe neprekidna, pa mora i desna – dakle, $f \in C^1$. Induktivno, ako znamo da je $f \in C^k$, onda je i desna strana jednadžbe u C^k, pa to mora biti i lijeva, odakle je $f \in C^{k+1}$.

Drugo, pokažimo još jedan način kako smo mogli riješiti ovu jednadžbu, ideja koja korisna u nekim zadatcima. Recimo da smo pogodili da rješenje mora biti oblika ae^x. Dakle, omjer funkcija $f(x)$ i e^x mora biti konstanta. To iskoristimo tako da dokažemo da je funkcija $f(x)e^{-x}$ konstanta, odnosno da je njena derivacija jednaka nuli. Zaista, kad pomnožimo jednadžbu s e^{-x}, imamo

$$0 = (f'(x) - f(x))e^{-x} = (f(x)e^{-x})',$$

što smo i htjeli pokazati. Ova metoda sugerira da, ako znate koje je rješenje neke ODJ (do na neku slobodnu konstantu), pokušajte manipulirati jednadžbom tako da dobijete da je izraz koji je jednak toj slobodnoj konstanti deriviran jednak nuli. Ovo je korisno kod zadataka u kojima ne možete primijeniti separaciju varijabli, ili možete generalizirati ovaj postupak kod nejednakosti.

Promotrimo još i jednadžbe iz primjera sa strane modeliranja. Ako označimo s $f(x)$ broj ljudi u populaciji u vremenskom trenutku x, možemo reći da je u nekom vremenskom trenutku promjena broja ljudi u populaciji proporcionalna broju ljudi koji živi u tom trenutku (što više ljudi živi, proporcionalno toliko više ljudi umire ili se rađa). Zato vrijedi $f'(x) = cf(x)$ (gdje je c razlika nataliteta i mortaliteta). Do na konstantu, dobili smo prvu jednadžbu. Za drugu pogledajmo nešto relativno popularno u zadnje vrijeme: neka $f(x) \in [0, 1]$ označava udio osoba u populaciji koji imaju neku zaraznu bolest. Promjena udjela zaraženih proporcionalna je susretima zaraženih i nezaraženih. Možemo reći da je vjerojatnost takvog susreta jednaka $f(x)(1-f(x))$. Dopisivanjem multiplikativne konstante (vjerojatnosti da pri takvom susretu dođe do transmisije) u funkciju iz našeg primjera dobivamo istu ODJ. Nadalje, rješenje pokazuje da ako je početni uvjet $f(0)$ u intervalu $\langle 0,1\rangle$, rješenje tamo i ostaje, i raste do vrijednosti 1. Dakle, koliko god (pozitivno mnogo) zaraženih imali, ako nemamo nikakvog drugog utjecaja, s vremenom će biti (skoro) svi zaraženi.

Obećali smo još jednu metodu za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Ona se odnosi na jednostavne jednadžbe višeg reda.

Zadatak 4.
Nađite funkcije koje zadovoljavaju jednadžbe $f'''(x)+f''(x)+f'(x)+f(x)=0$ i $f'''(x)+f''(x)-f'(x)-f(x)=x+e^{2x}$.

Rješenje.
Jednadžbe oblika

$$a_n f^{(n)}(x)+\cdots+a_1 f'(x)+a_0 f(x)=G(x),$$

za realne konstante $a_0,\ldots,a_n$ i poznatu funkciju $G(x)$ nazivamo **linearnom običnom diferencijalnom jednadžbom višeg reda**. Slično kao na linearnoj algebri, ako je $G(x)$=0 jednadžba je homogena i skup rješenja je dimenzije n. Ako pak sadrži i neku fiksnu funkciju po x (kao druga iz primjera), ona je nehomogena, te joj je skup rješenja jednak skupu homogenih + jedno (bilo koje) partikularno rješenje.

One se rješavaju na također malo blesav način. Riješimo prvu. Pogledajmo polinom koji dobijemo tako da umjesto derivacija napišemo analogni koeficijent. Dobivamo jednadžbu $x^3+x^2+x+1=0$. Nultočke te jednadžbe su -1, te $\pm i$. Vrijedi: ako je λ nultočka pridruženog polinoma, tada je jedno rješenje homogene ODJ oblika $f(x)=ae^{\lambda x}$. Da iskoristimo do kraja linearnost, zaključujemo da su sva rješenja oblika

$$f(x)=ae^{x}+be^{ix}+c^{e}-ix.$$

Uzimajući u obzir da je $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, ovo možemo pristojnije zapisati kao

$$f(x)=Ae^{x}+B\cos x+C\sin x,$$

za neke konstante A, B i C. Uvjerite se da su to zaista rješenja za našu jednadžbu. Dakle, budući da smo imali linearnu jednadžbu trećeg reda, rješenje se može napisati kao linearna kombinacija tri funkcije oblika $e^{\lambda x}$, gdje je λ nultočka pridruženog polinoma.

Postavljaju se dva pitanja – kako ovo generalizirati kada nemamo homogenu jednadžbu, te što raditi ako imamo višestruku nultočku. Na prvo pitanje smo već odgovorili prije: pronaći ćemo jedno partikularno rješenje. To možemo i pogoditi.

U slučaju iz drugog primjera, zbog linearnosti, možemo odvojeno tražiti partikularno rješenje prvo kada se s desne strane nalazi samo x, a zatim kada se nalazi e^{2x}. Prirodno je to partikularno gađati upravo iz skupova funkcija odakle te desne strane dolaze: za x ćemo pokušati s nekim polinomom (zašto 4. stupnja?), a za eksponencijalnu ćemo gađati funkcijom oblika ae^{2x}, za neki $a\in\mathbb{R}$. Zbroj tih rješenja daje nam partikularno rješenje $f_P(x)$ – pronađite koje je to.

Za ostatak je dovoljno rješavati samo homogenu jednadžbu. Pridružen polinom je $x^3+x^2-x-1=0$, kojem je 1 jednostruka, a -1 dvostruka nultočka. Kako imamo višestruke nultočke, pored funkcije $e^{\lambda x}$ pridodajemo i funkcije oblika $xe^{\lambda x}$, $x^2e^{\lambda x}$, $x^3e^{\lambda x}$ itd. ovisno kolika je kratnost nultočke. Zato je rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe oblika

$$f_H(x)=Ae^{x}+Be^{-x}+Cxe^{-x},$$

pa je rješenje cjelokupne jednadžbe zbroj skupa rješenja za homogenu i jedne partikularne.

DZ 1. *Pronađite jedno partikularno rješenje druge jednadžbe iz gornjeg primjera.*

Zadatci

Slijede zadatci koji su većinom sa studentskih natjecanja. Iako možda gornje gradivo nema direktne veze s njima, u nekim zadatcima primijenit ćemo njihovo znanje. Treba naglasiti da pored gornjeg znanja trebamo imati i dovoljno znanja s Matematičke analize 1 i 2.

Zadatak 5.
Nađite sve dvaput diferencijabilne funkcije $f:\mathbb{R}\to\langle 0,+\infty\rangle$ takve da za sve $x\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$f''(x)f(x)\geqslant 2(f'(x))^2.$$

Rješenje.
Izrazi u nejednakosti podsjećaju na izraze koji se pojavljuju u formuli za derivaciju umnoška ili kvocijenta. Kada se dovoljno poigramo, primijetimo da je nejednakost ekvivalentna s

$$\left(-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)' \leqslant 0,$$

a onda i da je ovaj izraz s lijeve strane zapravo derivacije funkcije $1/f(x)$. Dakle, ako definiramo $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, uvjet kaže da je funkcija $g(x)$ konkavna. Dakle, moramo naći sve konkavne funkcije $g : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$. Uvjet na kodomeni je ključan: teško je zamisliti neku (strogo) konkavnu funkciju koja je ograničena odozdo s nulom. I zaista, takva ne postoji. Kada dokažemo da je jedina konkavna funkcija omeđena odozdo nužno konstanta (a svaka pozitivna očito zadovoljava uvjet zadatka), riješili smo zadatak.

DZ 2. *Dokažite da pozitivna konkavna funkcija mora biti konstantna.*

Zadatak 6.
Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvaput diferencijabilna funkcija takva da je $f(0) = 0$. Dokaži da postoji $\xi \in \langle -\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}\rangle$ takva da je

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2\operatorname{tg}^2 \xi).$$

Ovaj zadatak ima službeno rješenje, koje ne znam motivirati, ali ću ga prezentirati. Ono što me mučilo je zašto u izrazu stoji konstanta 2. Ona je sigurno zato da se može izvesti rješenje koje su autori zamislili. No, s neke analitičke strane, doima se da ovo svojstvo mora biti zadovoljeno i u slučaju da umjesto izraza $1+2\operatorname{tg}^2 \xi$ piše bilo koja druga funkcija koja ima slična svojstva (recimo,strogo pozitivna i ima singularitete u $\pm\frac{\pi}{2}$), pa vjerojatno postoji i još neko takvo rješenje. To pokazujem u nastavku. Ironično, taj zadatak je bio na natjecanju autora ovog predavanja, i na natjecanju ga nije riješio.

Prvo rješenje.
Prvo definirajmo funkciju $g(x) = f(x)\cos x$. Kako g ima nultočke u $\pm\frac{\pi}{2}$ i 0, po Rolleovom teoremu zaključujemo da postoje $\xi_1 \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle$ i $\xi_2 \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ takvi da je $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$.
Sada promotrimo funkciju

$$h(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2 x} = \frac{f'(x)\cos x - f(x)\sin x}{\cos^2 x}.$$

Kako je $h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$, po Rolleovom teoremu postoji $\xi \in \langle \xi_1, \xi_2\rangle$ takva da je $h'(\xi) = 0$. No, nakon računa, dobivamo da to znači i da je

$$0 = h'(\xi) = \frac{1}{\cos\xi}(f''(\xi) - f(\xi)(1 + 2\operatorname{tg}^2 \xi)),$$

što je i trebalo pokazati.

Drugo rješenje.
Pretpostavimo da takav ξ ne postoji. Očito onda i $f''(\xi) \neq 0$, pa BSO $f''(0) > 0$ (inače možemo gledati $-f(x)$).
Činjenica da je f samo dvaput diferencijabilna, a ne i da joj je druga derivacija neprekidna, dosta nam veže ruke i treba smisliti strategiju kojom ćemo riješiti zadatak. Najlakše bi bilo nekim teoremom srednje vrijednosti – za derivacije možemo primijeniti samo Darbouxov teorem (derivacija funkcije na intervalu $\langle a, b\rangle$ poprima sve vrijednosti između $f'(a)$ i $f'(b)$). To i možemo primijeniti ovdje, iako nije toliko trivijalno za vidjeti. Naime, derivacija funkcije

$$F(x) = f(x) - \int_0^x \int_0^y f(z)(1 + 2\operatorname{tg}^2 z)dzdy$$

zadovoljava Darbouxov teorem. Stoga je u našem slučaju dovoljno naći neku točku x u kojoj vrijedi

$$f''(x) \leqslant f(x)(1 + 2\operatorname{tg}^2 x).$$

Pretpostavimo suprotno, vrijedi suprotna nejednakost na cijelom intervalu $\langle -\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}\rangle$.
Kako je $f''(0) > 0$, slutimo da je funkcija u blizini ishodišta konveksna. No, to je jedna klopka, za to nam treba neprekidnost druge derivacije. Pogledajmo zato po definiciji što možemo zaključiti, a da ima sličan učinak. Kako je

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = f''(0) > 0,$$

po definiciji limesa, postoji neki mali $\varepsilon > 0$ takav da za sve $x \in \langle 0, \varepsilon\rangle$ imamo $f'(x) > f'(0)$, te za sve $\langle -\varepsilon, 0\rangle$ imamo $f'(x) < f'(0)$. Posebno, sve vrijednosti derivacije na $\langle 0, \varepsilon\rangle$ veće su od svih vrijednosti derivacija na $\langle -\varepsilon, 0\rangle$. Da je f'' neprekidna, imali bismo da je f' rastuća, ali i ovo će nam biti dovoljno.
Simulirajući pokušaj dokaza konveksnosti oko nule, pretpostavimo da postoje $-\varepsilon < x_1 < 0 < x_2 < \varepsilon$ za koje vrijedi da su obje vrijednosti $f(x_1)$ i $f(x_2)$ negativne. Tada po Lagrangeovom teoremu za f i parove točaka $(x_1, 0)$ te $(0, x_2)$

zaključujemo da postoje $x_1 < \xi_1 < 0 < \xi_2 < x_2$ takvi da je $f'(\xi_1) > 0 > f'(\xi_2)$, no to je u suprotnosti sa zaključkom iz gornjeg paragrafa. Dakle, na barem jednom od intervala $\langle 0, \varepsilon\rangle$ ili $\langle -\varepsilon, 0\rangle$ funkcija je nenegativna. BSO je to interval desno od ishodište (inače promotrimo funkciju $f(-x)$).

Sada dokažimo da funkcija ima nultočku na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pretpostavimo suprotno, funkcija je tamo pozitivna. Sada nam se čini da ćemo imati problema kad $x \to \frac{\pi}{2}$, zbog toga što tamo tangens ima singularitet. Opet, treba biti i oprezan, jer f'' nije neprekidna, pa primjerice ne možemo li primijeniti Newton-Leibniza na f''.

Funkcija f je neprekidna na intervalu $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$, pa poprima minimalnu vrijednost $m > 0$. Primjenom Lagrangeovog teorema na $\left(x, \frac{\pi}{2}\right)$, uz $1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, dobivamo

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - f'(x) = f''(x^*)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > \left(\frac{\pi}{2} - x\right) f(x^*)(1 + 2\operatorname{tg}^2 x^*) \geqslant \left(\frac{\pi}{2} - x\right) m(1 + 2\operatorname{tg}^2 x).$$

Kad pustimo $x \to \frac{\pi}{2}^+$, lijeva strana teži u nulu zbog neprekidnosti, a desna strana teži u $+\infty$ (provjerite), čime dobivamo kontradikciju. Dakle, f ima nultočku na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Nazovimo tu nultočku s y_1 i promotrimo funkciju na domeni $[0, y_1]$. Tamo je funkcija nenegativna. Ako je identički jednaka nuli, očito su u svim točkama tih intervala sve derivacije jednake nula, pa onda vrijedi i tvrdnja zadatka. Ako je funkcija u nekim točkama pozitivna, onda ima i globalni pozitivni maksimum u točki ξ. Ako dokažemo da je druga derivacija u toj točki nepozitivna, gotovi smo (našli smo drugu točku za Darbouxov teorem). No, to radimo slično kao i na početku kada smo simulirali zaključke o "konveksnosti" funkcije u nuli.

Zadatak 7.

Nađi sve diferencijabilne funkcije $f : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ takve da za sve $a, b > 0$ vrijedi

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\sqrt{ab}).$$

Ovaj zadatak ima mnoga rješenja, neka od njih uključuju i silovanje Taylorovog teorema, u kojem treba paziti da se ne izgubi i ne dođe do neke ODJ koje ne znamo svojim skromnih znanjem riješiti. Prikazujem dva rješenja – jedno nevjerojatno elegantno, a drugo gotovo srednjoškolsko.

Prvo rješenje.

Kao kod slučaja s prvom ODJ danas, možemo pokazati da je f zapravo $C^\infty(\langle 0, \infty\rangle)$. Koristimo isti trik, s desne strane uvijek imamo jednu derivaciju manje nego s lijeve.

Zato jednadžbu možemo derivirati. Koja je motivacija? Naime, imamo tri pojavljivanja funkcije ili njenih derivacija, te dvije varijable. Koja god uvrštavanja da radimo, neka dva izraza s f ili f' bit će vezani kroz svoje argumente. Ako deriviramo jednadžbu po recimo varijabli b, izraz $f(a)$ će nestati, čime dobivamo jednadžbu višeg reda, ali s manje izraza koji uključuju f i f', te možemo razdvojiti njihovo djelovanje.

Kao što smo najavili, deriviramo po b:

$$f'(b) = f'(\sqrt{ab}) + (b - a)f''(\sqrt{ab})\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}.$$

Sada se možemo riješiti ružnih korijena tako da stavimo recimo $a = 1/b$:

$$f'(b) = f'(1) + (b - \frac{1}{b})f''(1)\frac{1}{2b}.$$

Dobili smo (trivijalnu) ODJ oblika

$$f'(x) = C_1 + C_2\frac{1}{x^2}.$$

Čisto integriranje daje

$$f(x) = D_1 x + \frac{D_2}{x} + D_3,$$

a provjerom se uvjerimo da su te konstante proizvoljne.

Drugo rješenje.

Lagano se uvjerimo da su sve linearne funkcije rješenje zadatka, te da njihovim oduzimanjem od f ne mijenjamo jednadžbu. Najteži dio zadatka je naći da nisu samo linearne funkcije rješenje. Prošlo rješenje je mali spojler, ali i funkcije oblika c/x su također rješenje. Dakle, znamo da su sve funkcije oblika

$$D_1 x + \frac{D_2}{x} + D_3$$

rješenje, i slutimo da nema više rješenja. Od proizvoljne funkcije f možemo oduzeti funkciju gornjeg oblika. Pa, oduzmimo ju tako da za novu funkciju f (koristim istu oznaku) vrijedi $f(1) = f(2) = f(3) = 0$.

Za bilo koje dvije različite nultočke $f(x_1) = f(x_2) = 0$, uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo da je $f'(\sqrt{x_1 x_2}) = 0$, a onda i da za svake dvije različite vrijednosti a, b za koje je $ab = x_1 x_2$, vrijedi $f(a) = f(b)$. Ovo rezoniranje za $(x_1, x_2) = (1, 2)$ i $(x_1, x_2) = (1, 3)$ daje

$$f(x) = f(2/x) \text{ i } f(x) = f(3/x),$$

za sve pozitivne realne x. Posebno (uz supstituciju $t = 1/x$) imamo i da je $f(2t) = f(3t)$ za sve pozitivne realne t. Uvrštavanjem $2t$ i $3t$ u jednažbu dobivamo da je $f'(\sqrt{6}t) = 0$, to onda znači i da je derivacija od f nula, odnosno da je funkcija konstanta.

Time zaključujemo da pored skupa rješenja koje smo pronašli nema više rješenja.

Zadatak 8.
Dokaži da ne postoji funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takva da je za sve $x, y > 0$

$$f(x)^2 \geqslant f(x+y)(f(x)+f(y)).$$

Rješenje.
Prvo je lagano dokazati da je funkcija padajuća: zapišimo nejednakost kao $f(x)(f(x) - f(x+y)) \geqslant f(x+y)f(y)$, pa je zaključak jasan.

Za ponašanje kod nule zato imamo dvije mogućnosti: ili $\lim_{x\to 0^+} f(x) = M$, ili f teži u $+\infty$.

Pretpostavimo da je slučaj da je taj limes $M > 0$. Smislimo neki niz u domeni koji teži k nuli, čijim ćemo uvrštavanjem dobiti kontradikciju. Nije teško doći do niza $x_n = \frac{1}{2^n}$:

$$f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 \geqslant f\left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot 2f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right),$$

što nakon $n \to \infty$ daje $M^2 \geqslant 2M^2$, čime dobivamo kontradikciju.

Dakle, imamo $f(x) \to +\infty$ kad $x \to 0^+$. No, sada možemo dobiti kontradikciju tako da desnu stranu potjeramo u beskonačnost, držeći lijevu fiksnom. Fiksirajmo x, i uzmimo $y < x$. Tada je

$$f(x)^2 \geqslant f(x+y)(f(x)+f(y)) > f(2x)f(x) + f(2x)f(y).$$

Kad $y \to 0^+$, lijeva strana je fiksna, a desna teži u $+\infty$, čime dobivamo kontradikciju.

Zadatak 9.
Neka je $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ diferencijabilna funkcija i pretpostavimo da postoji $L > 0$ takav da

$$|f'(x) - f'(x)| \leqslant L|x - y|$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Dokaži da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(f'(x))^2 < 2Lf(x).$$

Rješenje.
Uvjet ćemo najbolje iskoristiti ako ga integriramo na nekom skupu. Teoretski, možemo ga integrirati po dvije slobodne varijable, no to neće biti potrebno. Prije integriranja, pogledajmo smijemo li, jer funkcija f' teoretski ne mora biti neprekidna. No, uvjet nam daje da je Lipschitz neprekidna, pa onda je zato i neprekidna.

Na proizvoljnom intervalu $[x_1, x_2]$ integrirat ćemo razliku $f'(y) - f'(x_1)$ (dy):

$$f(x_2) - f(x_1) - (x_2 - x_1)f'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(y) - f'(x_1) \leqslant L\int_{x_1}^{x_2} |y - x_1| = \frac{L}{2}|x_1 - x_2|^2.$$

Uzimajući u obzir da je $f(x_2) > 0$, sredimo dobivenu nejednadžbu tako da je sve što ovisi o x_2 na jednoj strani, a sve ostalo na drugoj:

$$(x_1 - x_2)f'(x_1) - \frac{L}{2}(x_1 - x_2)^2 < f(x_1).$$

Varijabla x_2 je proizvoljna, pa je biramo takvu da je lijeva strana najveća moguća (tjeme kvadratne funkcije). Takvim odabirom (uvjerite se) taman dobivamo uvjet zadatka.

Domaća zadaća

Da bi se zadaća smatrala riješenom, treba riješiti barem 6 od navedenih 10 zadataka (uključujući i one navedene ranije).

DZ 3. *Nađi sve diferencijabilne funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takve da je*

$$f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}$$

za sve $x \in \mathbb{R}$ *i* $n \in \mathbb{N}$.

DZ 4. *Pretpostavimo da je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dvaput diferencijabilna funkcija koja zadovoljava* $f(0) = 1$ *i* $f'(0) = 0$, *te za sve* $x \geqslant 0$ *vrijedi*

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geqslant 0.$$

Dokaži da za sve $x \geqslant 0$ *vrijedi*

$$f(x) \geqslant 3e^{2x} - 2e^{3x}.$$

DZ 5. *Pretpostavimo da je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *triput diferencijabilna funkcija. Dokaži da postoji* $w \in [-1, 1]$ *takav da je*

$$\frac{f'''(w)}{6} = \frac{f(1)}{2} - \frac{f(-1)}{2} - f'(0).$$

DZ 6. *Neka je* $f \in C^1(a,b)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$ *te* $f'(x) + f^2(x) \geqslant -1$ *za sve* $x \in \langle a, b \rangle$. *Dokaži da je* $b - a \geqslant \pi$ *i nađi primjer kada je* $b - a = \pi$.

DZ 7. *Nađi sve* $c \in \mathbb{R}$ *za koje postoji beskonačno diferencijabilna funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takva da za sve* $n \in \mathbb{N}$ *i* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$f^{(n+1)}(x) > f^{(n)}(x) + c.$$

DZ 8. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *beskonačno diferencijabilna funkcija koja zadovoljava* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ *i* $f(x) \geqslant 0$ *za sve* $x \in \mathbb{R}$. *Dokaži da postoji* $n \in \mathbb{N}$ *i* $x \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $f^{(n)}(x) < 0$.

DZ 9. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neprekidno diferencijabilna funkcija koja zadovoljava* $f'(x) > f(f(x))$ *za sve* $x \in \mathbb{R}$. *Dokaži da je* $f(f(f(x))) \leqslant 0$ *za sve* $x \geqslant 0$.

DZ 10. *Dokaži da ne postoji funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takva da je* $f(0) > 0$, *te za sve* $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) \geqslant f(x) + yf(f(x)).$$