Studentska natjecanja 2023.

Numerička matematika na natjecanjima

31. 3. 2023.
Matko Ljulj
mljulj[at]math.hr

Uvod

Neki od vas nisu slušali Numeričku matematiku u 4. semestru, neki od vas slušaju sada, neki od vas je već jesu slušali. Neovisno o emocijama koje gajite prema tom kolegiju, postoje zadatci na natjecanjima koji, uz ne jako široko znanje teorije numeričke matematike, olakšavaju rješavanje zadataka. Ti zadatci često su na natjecanjima okarakterizirani teškima. Vjerojatno zato što naš fakultet ima natprosječan pristup numeričkoj matematici, pa su naše "osnove" drugima "za one koji žele znati više".

1 Interpolacijski polinom

Znamo da je skup svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n (uz standardne operacije zbrajanja i množenja skalarom) vektorski prostor $\mathcal{P}_n$ dimenzije $n+1$. Stoga je za očekivati da možemo naći polinom upravo takvog stupnja koji zadovoljava $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, za neke različite realne $x_0, \dots, x_n$ i realne $y_0, \dots, y_n$ jer smo zadali točno $n+1$ uvjeta na taj polinom p. Taj problem zovemo *problem interpolacije*. Takav polinom uistinu postoji.

Jedan način za dokazati da postoji takav (jedinstveni) polinom je korištenjem činjenice da je skup $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ baza za $\mathcal{P}_n$. Koeficijente $a_0, \dots, a_n$ u polinomu

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

nalazimo rješavanjem sustava

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Sustav ima rješenje jer je matrica sustava regularna za različite x_i-jeve, njena determinanta je tzv. Vandermondeova determinanta.

Drugi način da vidimo da postoji interpolacijski je da odaberemo bolju bazu. Za vektorski prostor $\mathcal{P}$ postoji mnogo odabira baza, pa možemo odabrati onu bazu polinoma $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ za koju vrijedi $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Ta baza dana je s

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Baza nema lijep zapis, no nepoznati skalari koji množe elemente baze u problemu interpolacije su trivijalni: naime polinom

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i$$

zaista zadovoljava $p(x_i) = y_i$ za sve $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Zadnja formula formula je za Lagrangeov interpolacijski polinom.

Napomena 1. *Iako ime sugerira drugačije, Lagrangeov (pa kasnije i Newtonov) interpolacijski polinom nisu polinom koji se razlikuje od interpolacijskog polinoma danog u standardnoj bazi. To je uvijek jedan jedinstveni interpolacijski polinom, dan u drugačijoj bazi. Zato bi ispravnije bilo reći Lagrangeov zapis interpolacijskog polinoma.*

Dakle, sad smo obradili dva slučaja: rješenje interpolacijskog problema možemo tražiti u kanonskoj bazi ili Lagrangeovoj bazi. S jedne strane imamo vrlo jednostavnu bazu, ali kompliciran način traženja skalara, dok s druge strane imamo kompliciranu bazu, polinome s kojima je teško baratati u zadatcima, ali s druge strane koeficijenti su vrlo lijepi. Zato ćemo ponuditi i treću mogućnost, koji bi trebao biti kompromis ove dvije baze.

Ponovno fiksirajmo različite $x_0, \dots, x_n$. Biramo bazu

$$\{1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})\},$$

te je formula za interpolacijski polinom dana s

$$p(x) = [y_0] + [y_0, y_1](x-x_0) + [y_0, y_1, y_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + [y_0, y_1, \dots, y_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1}).$$

Izrazi oblika $[y_i, y_{i+1}, \dots, y_{j-1}, y_j]$ zovu se *podijeljene razlike*, te se nalaze rekurzivno po broju članova:

$$[y_i] := y_i, \ [y_i, \dots, y_j] := \frac{[y_{i+1}, \dots, y_j] - [y_i, \dots, y_{j-1}]}{x_j - x_i}.$$

Ovakav polinom nazivamo *Newtonovim interpolacijskim polinomom.* Primjer izgradnje podijeljenih razlika vidjet ćemo u primjeru.

Primjer 1.1 . *Nađimo Newtonov interpolacijski polinom koji prolazi točkama* $(1,2)$, $(3,4)$, $(8,-1)$, $(10,0)$. *Baza polinoma je* $\{1, (x-1), (x-1)(x-3), (x-1)(x-3)(x-8)\}$. *Koeficijente nalazimo iz tablice i algoritmu nalik na punjenju Pascalovog trokuta. Popunjavamo razinu po razinu prema formuli, samo što je konvencija da se trokut postavlja s bazom položenom vertikalno, te popunjavamo slijeva nadesno. Prvo pišemo x_i-jeve, desno u odgovarajućim retcima njihove vrijednosti (y_i-jeve), a onda radimo trokut.*

$$\begin{array}{llllll}
x_0 = 1 & y_0 = 2 & & & \\
& & [y_0, y_1] = \frac{4-2}{3-1} = 1 & & \\
x_0 = 3 & y_1 = 4 & & [y_0, y_1, y_2] = \frac{-1-1}{8-1} = \frac{-2}{7} & \\
& & [y_1, y_2] = \frac{-1-4}{8-3} = -1 & & [y_0, y_1, y_2, y_3] = \frac{\frac{3}{14} - \frac{-2}{7}}{10-1} = \frac{-1}{18} \\
x_2 = 8 & y_2 = -1 & & [y_1, y_2, y_3] = \frac{\frac{1}{2} - (-1)}{10-3} = \frac{3}{14} & \\
& & [y_2, y_3] = \frac{0-(-1)}{10-8} = \frac{1}{2} & & \\
x_3 = 10 & y_3 = 0 & & &
\end{array}$$

Rješenje čitamo iz najgornjeg reda:

$$p(x) = 2 + 1(x-1) - \frac{2}{7}(x-1)(x-3) - \frac{1}{18}(x-1)(x-3)(x-8).$$

Dakle, prednost Newtonovog algoritma je što nudi neki kompromis između komplicirane formule za bazu polinoma i formula za koeficijente. S druge strane, postoji još jedna prednost: pomoću tog algoritma lako možemo zadati vrijednosti polinoma u točkama x_i, ali i vrijednosti nekih derivacija proizvoljnog reda. Općenito vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 1 (Hermite)**.** *Neka su $x_0, \dots, x_k$ različiti realni brojevi, $r_0, \dots, r_n$ neki nenegativni cijeli brojevi, te $y_i^{(j)}$ ukupno $n := r_0 + \cdots + r_k + k + 1$ realnih brojeva, gdje indeksi idu $0 \leqslant j \leqslant r_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Tada postoji jedinstveni polinom p stupnja manjeg ili jednakog $n-1$ takav da je $p^{(j)}(x_i) = y_j^{(j)}$, za sve $0 \leqslant j \leqslant r_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$.*

Algoritam za pronalaženje takvog polinoma analogan je onom za traženje Newtonovog interpolacijskog polinoma, uz napomenu da svaku točku x_i u tablicu stavljamo r_i+1 puta, te podijeljena razlika u kojoj se m puta pojavljuje isti broj $[y_i, \dots, y_i]$ mijenja se s $\dfrac{f^{(m-1)}(x_i)}{(m-1)!}$.

Primjer 1.2 . *Nađimo polinom najnižeg stupnja za koji vrijedi* $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -2$, $f(1) = 2$. *Baza u kojoj tražimo rješenje je* $\{1, (x-0), (x-0)^2, (x-0)^3\}$, *a podijeljene razlike tražimo rekurzivno*

$$\begin{array}{lllll}
0 \ \ [y_0] = 0 & & & \\
& [y_0, y_1] = f'(0) = 1 & & \\
0 \ \ [y_0] = 0 & & [y_0, y_1, y_2] = \frac{f''(0)}{2} = -1 & \\
& [y_1, y_2] = f'(0) = 1 & & [y_0, y_1, y_2, y_3] = \frac{1-(-1)}{1-0} = 2 \\
0 \ \ [y_0] = 0 & & [y_1, y_2, y_3] = \frac{2-1}{1-0} = 1 & \\
& [y_2, y_3] = \frac{2-0}{1-0} = 2 & & \\
1 \ \ [y_1] = 2 & & &
\end{array}$$

Rješenje ponovno čitamo iz prvog reda:

$$f(x) = 0 + x + (-1)x^2 + 2x^3.$$

Primjenu navedenog pokažimo na zadatku s natjecanja (Vojtech Jarnik, 2014, I kategorija, 4. zadatak).

Zadatak 1.
Dani su P_1, P_2, P_3, P_4 grafovi 4 kvadratne funkcije u koordinatnoj ravnini. Pretpostavimo da P_1 dodiruje P_2 u točki q_2, P_2 dodiruje P_3 u točki q_3, P_3 dodiruje P_4 u točki q_4, te P_4 dodiruje P_1 u točki q_1. Pretpostavimo da sve točke q_1, q_2, q_3, q_4 imaju različite apscise. Dokažite da tada točke q_1, q_2, q_3, q_4 leže na grafu najviše kvadratnog polinoma.

Rješenje.
Neka točke q_i imaju koordinate (x_i, y_i) te polinom P_i u toj točki ima koeficijent smjera tangente z_i.
Budući da graf P_1 dodiruje P_2 u q_2 te P_4 u q_1, imamo sljedeća 4 uvjeta na kvadratni polinom p_1 (čiji je graf P_1):

$$p_1(x_1) = y_1,\ p_1(x_2) = y_2,\ p_1'(x_1) = z_1,\ p_1'(x_2) = z_2.$$

Polinom p_1 je kvadratni polinom kojem smo zadali 4 uvjeta. Zato njegovom zapisu u Newtonovoj bazi koeficijent uz bazni polinom sa stupnjem jednakim 3 mora biti jednak nuli:

$$
\begin{array}{ccccc}
x_1 & y_1 & & & \\
 & & z_1 & & \\
x_1 & y_1 & & \frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-z_1}{x_2-x_1} & \\
 & & \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} & & \frac{z_1+z_2-2\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{(x_2-x_1)^2)} \\
x_2 & y_2 & & \frac{z_2-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_2-x_1} & \\
 & & z_2 & & \\
x_2 & y_2 & & &
\end{array} \tag{1.1}
$$

Dakle, vrijedi

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Primijenimo to i na ostale grafove P_2, P_3 i P_4.
Pogledajmo što je tvrdnja zadatka. Potrebno je dokazati na točke q_1, q_2, q_3 i q_4 leže na grafu najviše kvadratnog polinoma. Ekivalentno, potrebno je pokazati da interpolacijski polinom kroz te 4 točke nije stupnja 3, odnosno da je nužno da je posljednji koeficijent u odgovarajućoj Newtonovoj bazi jednak nuli.

$$
\begin{array}{ccccc}
x_1 & y_1 & & & \\
 & & \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} & & \\
x_2 & y_2 & & \frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1} & \\
 & & \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} & & \frac{1}{x_4-x_1}\left(\frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2}-\frac{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}\right) \\
x_3 & y_3 & & \frac{\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}}{x_4-x_2} & \\
 & & \frac{y_4-y_3}{x_4-x_3} & & \\
x_4 & y_4 & & &
\end{array}
$$

Dakle, potrebno je dokazati da je najdesniji član jednak nuli. Koristeći (1.1) i analogne tvrdnje za grafove P_2, P_3 i P_4, tvrdnja se može pojednostaviti:

$$\frac{z_3 - z_1}{x_3 - x_1} = \frac{z_4 - z_2}{x_4 - x_2},$$

odnosno treba pokazati

$$(z_3 - z_1)(x_4 - x_2) = (z_4 - z_2)(x_3 - x_1).$$

No, ponovno iz (1.1) imamo

$$0 = 2\sum_{\text{cyc}}(y_2 - y_1) = \sum_{\text{cyc}}(x_2 - x_1)(z_1 + z_2) = \sum_{\text{cyc}}(x_2z_1 - x_1z_1 + x_2z_2 - x_1z_2) = \sum_{\text{cyc}}(x_2z_1 - x_1z_2) =$$

$$\sum_{\text{cyc}}(x_2z_1 - x_2z_3) = x_2(z_1 - z_3) + x_3(z_2 - z_4) + x_4(z_3 - z_1) + x_1(z_4 - z_2) = (z_1 - z_3)(x_4 - x_2) + (z_2 - z_4)(x_3 - x_1),$$

što je zapravo i trebalo dokazati.

Zadatka koji nije lagano postaviti matematički sveli na lagani algebarski zadatak preko interpolacijskih polinoma. Taj zadatak bio je zadnji u I. kategoriji na natjecanju Vojtech Jarnik. Te godine zadatak je u potpunosti riješilo 3 natjecatelja, još dva natjecatelja imalo je više od nula bodova.

2 Čebiševljevi polinomi

Sljedeća tema predavanja su najpoznatije familije rekurzivno zadanih polinoma.

Definicija 1. *Čebiševljevi polinomi prve vrste zadani su rekurzivnom relacijom*

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n \in \mathbb{N},$$

dok su Čebiševljevi polinomi druge vrste zadani sa

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,\ U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), n \in \mathbb{N}.$$

Popis nekoliko prvih Čebiševljevih polinoma:

$T_0(x) = 1$	$U_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$	$U_1(x) = 2x$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$	$U_2(x) = 4x^2 - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$	$U_3(x) = 8x^3 - 4x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

Najbitnija njihova svojstva proizlaze iz sljedeće leme.

Lema 1. *Za sve $\varphi \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi,\ U_{n-1}(\cos\varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}.$$

Dokaz. Uvedimo pokratu $y := \cos\varphi$. Dokaz se temelji na indukciji i jednostavnim trigonometrijskim identitetima. Primjerice, za T_n imamo (za $U_n(x)$ ide slično)

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos n\varphi \cdot \cos\varphi,$$

odakle je

$$\cos(n+1)\varphi = 2\cos n\varphi\cos\varphi - \cos(n-1)\varphi = 2yT_n(y) - T_{n-1}(y) = T_{n+1}(y).$$

Iz te leme dobivamo zatvorene formule za nultočke:

$$x_k(T_n) = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \qquad x_k(U_n) = \cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right)\ \ k = 1, \ldots, n.$$

Također, vrlo lako se vidi i da su točke u kojima jedni Čebiševljevi polinomi postižu lokalne ekstreme upravo nultočke onog drugog polinoma (s odgovarajućim pomakom na indeksima).

Dodatno, za Čebiševljeve polinome prve vrste vrijedi i sljedeće:

$$t \neq 0: \quad T_n\left(\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(t^n + \frac{1}{t^n}\right).$$

Drugo svojstvo koje se također koristi na natjecanjima:

Teorem 2. *Za sve normirane polinome stupnja najviše n vrijedi nejednakost*

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}},$$

gdje se jednakost postiže samo za $T_n(x)/2^{n-1}$.

Generalizacija gornje tvrdnje:

Teorem 3 (Markov brother's inequality)**.** *Neka je $p(x)$ polinom s realnim koeficijentima stupnja n. Tada je*

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p^{(k)}(x)| \leqslant \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p(x)|.$$

Jednakost se postiže za polinom $T_n(x)$.

Korist tih polinoma vidjela se na izbornom za IMC iz 2018.

Zadatak 2.
U ovisnosti o prirodnom broju n odredi sve parametre $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje sljedeći sustav ima rješenje u realnim brojevima:

$$a_0 = a_n = \lambda;\ a_k = 2\lambda - \frac{1}{a_{k-1}},\ k \in \{1, \dots, n\}.$$

Rješenje.
Raspisujući prvih nekoliko članova izraženih preko λ (u daljem tekstu x), uočavamo pravilnost koju nije teško dokazati indukcijom. Naime:

$$a_k = \frac{P_{k+1}(x)}{P_k(x)},\ \text{gdje je } P_k \text{ rekurzivno zadan niz polinoma: } P_{k+1}(x) = 2xP_k(x) - P_{k-1}(x).$$

Ako za početne uvjete stavimo $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$, dobivamo Čebiševljeve polinome prve vrste. Jedina preostala jednadžba za provjeriti je $a_n = a_0$, što je ekvivalentno s:

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x).$$

Pronađimo prvo sva rješenja jednadžbe $x \in [-1, 1]$. Izrazimo li jednadžbu preko trigonometrijskih formula ($P_k(x) = \cos(k \arccos \varphi)$, uz $\varphi = \arccos x$), dobivamo:

$$\cos(n+1)\varphi = \cos\varphi\cos n\varphi = \frac{1}{2}\left(\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi\right)$$

$$\iff \cos(n+1)\varphi = \cos(n-1)\varphi \iff \sin n\varphi \sin\varphi = 0.$$

Odavde vidimo da su sva rješenja dana s

$$\varphi = \frac{k\pi}{n} \iff \lambda = x = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Da bismo vidjeli da su to uistinu i sva rješenja, možemo iskoristiti neki argument brojanja nultočaka polinoma $P_{n+1}(x) - xP_n(x)$, ili možemo iskoristiti formulu za Čebiševljeve polinome za $x \notin [-1, 1]$: $P_n\left(\frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})\right) = \frac{1}{2}\left(t^n + \frac{1}{t^n}\right)$.

3 TST matrice

TST matrice kraći je naziv za Toeplitzove simetrične tridijagonalne matrice. Svi pojmovi osim Teoplitz su poznati: matrica je Toeplitzova ako duž glavne dijagonale i duž svih "dijagonala" koje su paralelne s glavnom matrica konstantna.

Definicija 2. *Matrica* **A** *je* Toeplitzovog *tipa ukoliko za svaka četiri indeksa i, j, k, l vrijedi*

$$i - j = k - l \implies a_{i,j} = a_{k,l}.$$

Ako je matrica TST, tada ovisi o točno dva parametra, tj. sve TST matrice su sljedećeg oblika

$$\mathbf{A}_n(a,b) = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a & b & & & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b & 0 \\ \vdots & & & b & a & b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

Nađimo svojstvene vrijednosti ove matrice. Primijetimo da zbog teorema o preslikavanju spektra dovoljno je pronaći svojstvene vrijednosti (za proizvoljne realne a, b potrebno je svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}_n := \mathbf{A}_n(0,1)$ pomnožiti s b i dodati im a. Promotrimo niz karakterističnih polinoma tih matrica. Razvijajući Laplaceovim razvojem matricu $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_n)$ po zadnjem retku, pa zadnjem stupcu, dobivamo rekurziju

$$k_{n+1}(\lambda) = \lambda k_n(\lambda) - k_{n-1}\lambda.$$

Do na faktor 2, ovo je rekurzija za Čebiševljeve polinome. Provjerom prvih nekoliko vrijednosti za k_n zaključujemo da vrijedi

$$k_n(\lambda) = U_n(x/2).$$

Koristeći formulu za nultočke Čebiševljevih polinoma druge vrste, dobivamo da su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}_n(0,1)$ dane s

$$2\cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n,$$

dok su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}_n(a,b)$ dane s

$$a + 2b\cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Zatvorenu formulu svojstvene vrijednosti takvih matrica moglo se direktno iskoristiti na 3. zadatku, Vojtech Jarnik 2016, II kategorija.

Zadatak 3.
Za $n \geqslant 3$ nađite svojstvene vrijednosti (s kratnostima) $n \times n$ matrice

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Rješenje.
Matrica iz zadatka kvadrat je matrice $\mathbf{A}_n(0,1)$, pa su njene svojstvene vrijednosti jednake

$$4\cos^2\left(\frac{k}{n+1}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Ovaj zadatak na natjecanju nije riješio nijedan natjecatelj, a prvoplasirani natjecatelj te je godine imao 29/40 bodova. Dakle, uz ovaj zadatak i prva dva zadatka, netko je mogao lagano biti prvi na natjecanju.

4 Cauchy interlacing theorem

Teorem 4 (Cauchy interlacing theorem). *Dana je hermitska matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^n$ i njene svojstvene vrijednosti $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$. Neka je dan indeks $i \in \{1, \dots, n\}$. Neka je $\mathbf{B} \in \mathbb{M}^{n-1}$ hermitska matrica dobivena brisanjem i-tog retka i i-tog stupca matrice $\mathbf{A}$, te neka su njene svojstvene vrijednosti $\mu_1 \leqslant \dots \leqslant \mu_{n-1}$. Tada se svojstvene vrijednosti "interlaceaju":*

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \dots \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n.$$

Brojne su primjeri korištenja ovog zanimljivog teorema, pokažimo kako bismo ga primijenili na 2. zadatak s natjecanja Vojtech Jarnik, 2012., II kategorija.

Zadatak 4.
Dana je tridijagonalna 10×10 matrica

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dokaži da $\mathbf{M}$ ima točno 9 pozitivnih svojstvenih vrijednosti, brojeći kratnosti.

Rješenje.
Prekrižimo prvi redak i prvi stupac matrice $\mathbf{M}$. Dobili smo TST matricu $\mathbf{A}_n(2,-1)$ kojoj iz formule vidimo da su joj sve svojstvene vrijednosti pozitivne. Prema Cauchy interlacing theoremu, matrica $\mathbf{M}$ ima barem 9 pozitivnih svojstvenih vrijednosti (njih 9 je u parovima veće od 9 svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}_n(2,-1)$). Da preostala svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{M}$ nije pozitivna možemo dokazati tako da provjerimo determinantu matrice $\mathbf{M}$ ili brže na sljedeći način: križajući svih 9 stupaca i redaka osim prvog, dobivamo matricu $[-1]$, kojoj je svojstvena vrijednost -1. Uzastopnom primjenom Cauchy interlacing theorema zaključujemo da postoji jedna svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{M}$ koja je manja od -1, posebno, negativna je. Time je tvrdnja dokazana.

Na natjecanju je ovaj zadatak bio lošije riješen od 3. zadatka. Također, primijetite da Cauchy interlacinh theorem kao korolar daje sljedeću tvrdnju (dokaz analogan kraju rješenja gornjeg zadatka):

Korolar 1. *Simetrična matrica kojoj je jedna dijagonalna vrijednost nepozitivna ne može biti pozitivno definitna.*

Domaća zadaća

Da bi se zadaća smatrala riješenom, treba riješiti barem četiri od navedenih sedam zadataka. Predajete ju putem maila (slikanu ili skeniranu), rok je 2 tjedna od predavanja.

DZ 1. *Neka je f polinom s cjelobrojnim koeficijentima, te p prost broj takav da $f(0) = 0, f(1) = 1$ te $f(k) \equiv 0$ ili $1 \pmod p$ za sve prirodne brojeve. Dokaži da je tada $\deg f \geqslant p-1$.*

DZ 2. *Dokaži da postoji samo konačno mnogo polinoma $f \in \mathbb{Z}[x]$ takvih da je za sve $n \in \mathbb{N}_0$ zadovoljena nejednakost $|f(n)| \leqslant 2^n$.*

DZ 3. *Neka je P polinom stupnja najviše n s realnim koeficijentima koji je na $[0,1]$ po apsolutnoj vrijednosti manji od 1. Dokaži da je $P(-1/n) \leqslant 2^{n+1} - 1$.*

DZ 4. *Neka su $x_0, \dots, x_n$ proizvoljni različiti cijeli brojevi. Dokaži da za svaki normirani algebarski polinom stupnja n zadovoljava nejednakost*

$$\max_{0 \le i \le n} |f(x_i)| \geqslant \frac{n!}{2^n}.$$

DZ 5. *Dan je $n \geqslant 2$ prirodan broj. Promotrimo sustav*

$$x_1 + \frac{2}{x_2} = x_2 + \frac{2}{x_3} = \dots = x_n + \frac{2}{x_1} = a.$$

- *Dokažite da taj sustav ima beskonačno rješenja za koja su svi brojevi $x_1, \dots, x_n$ različiti.*
- *Dokažite da svako rješenje sustava u kojem su ti brojevi različiti zadovoljava $|x_1 \dots x_n| = 2^{n/2}$.*

Zadatak riješite Čebiševljevim polinomima (nađite transformaciju tako da rješenje bude slično kao za Zadatak 2). U ovisnosti o n nađite sve vrijednosti broja a za koji sustav ima rješenje.

DZ 6. *Neka su* $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, x_n$ *međusobno različiti realni brojevi. Dana je matrica* $n \times n$ *kojoj je na mjestu* (i, j) *upisana vrijednost*

$$(y_j - x_i)p_{x_i}(y_j)p_{y_j}(x_i),$$

gdje su $p_x(x)$ *i* $p_y(x)$ *bazni interpolacijski polinomi za nizove* $(x_i), (y_j)$*:*

$$p_{x_j}(x) := \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \qquad p_{y_i}(x) := \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{x - y_j}{y_j - y_j}.$$

Odredi inverz te matrice.

DZ 7. *Dana je matrica* $\mathbf{A}$ *reda* n *takva da je element na mjestu* (i, j) *jednak*

$$\frac{1}{\min(i, j)}.$$

Odredite broj pozitivnih svojstvenih vrijednosti matrice A_n*.*