MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2024.

Zadatak 1. (10 bodova) Neka je dana funkcija $f : \langle -\frac{1}{2}, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ sa

$$f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{x^{10}+1}.$$

Odredite $f^{(11)}(0)$.

Rješenje. Za $n \geq 10$ imamo

$$(x^{10}+1)f(x) = \ln(2x+1) \quad / \ ^{(n)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^{10})^{(k)} f^{(n-k)}(x) + f^{(n)}(x) = 2((2x+1)^{-1})^{(n-1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(2x+1)^{-n}2^n \qquad /x=0$$

$$\binom{n}{10} 10! f^{(n-10)}(0) + f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!2^n$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!2^n - \binom{n}{10} 10! f^{(n-10)}(0) \quad /n=11$$

$$f^{(11)}(0) = 10!2^{11} - 11! f'(0) = 10!2^{11} - 11! \cdot 2$$

$$f^{(11)}(0) = 10!(2^{11} - 22).$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2024.

Zadatak 2.

a) (10 bodova) Za $\alpha \in \mathbb{R}$, dana je funkcija $g : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathbb{R}$ sa

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\log_3(1+\sin x)}{x}, & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \setminus \{0\}, \\ \alpha, & x = 0. \end{cases}$$

Postoji li $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je g derivabilna u 0?

b) (5 bodova) Neka je $b \in \mathbb{R}$ i $h : \langle b, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna, $h''(x) > 0$ za svaki $x \in \langle b, +\infty \rangle$, te je $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Dokažite da h nema nultočku.

Rješenje.

a) Neprekidnost je nužna:

$$\alpha = \lim_{x \to 0} \frac{\log_3(1+\sin x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(1+\sin x)\ln 3} \cos x = \frac{1}{\ln 3}.$$

Provjerimo dervabilnost:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\log_3(1+\sin x)}{x} - \frac{1}{\ln 3}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\log_3(1+\sin x)}{x}\right)' \\
=&\lim_{x \to 0} \frac{(\frac{1}{(1+\sin x)\ln 3} \cos x)x - \log_3(1+\sin x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \\
=&\lim_{x \to 0} \frac{(\frac{\cos x}{(1+\sin x)\ln 3})'x + (\frac{\cos x}{(1+\sin x)\ln 3}) - (\frac{\cos x}{(1+\sin x)\ln 3})}{2x} \\
=&\lim_{x \to 0} \frac{1}{2\ln 3} \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x \cos x}{(1+\sin x)^2} \\
=&\frac{-1}{2\ln 3}.
\end{aligned}$$

b) Funkcija h' je strogo rastuća i neprekidna.

i) Ako $0 \notin h'(\langle b, +\infty \rangle)$, onda je $h' > 0$ ili $h' < 0$, pa je h strogo monotona. Pretpostavimo da h ima nultočku x_0. Neka je $x > x_1 > x_0$. Sada je $|h(x)| > |h(x_1)| > 0$. Dakle ne vrijedi $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Kontradikcija.

ii) Neka je $h'(x_0) = 0$. Tada je h strogo rastuća na $\langle x_0, +\infty \rangle$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $x_n = x_0 + n$. Iz stroge konveksnosti imamo $h(x_n) < (h(x_{n-1}) + h(x_{n+1}))/2$. Slijedi

$$h(x_{n+1}) - h(x_n) > h(x_n) - h(x_{n-1}) > \ldots > h(x_2) - h(x_1) > 0,$$

$$h(x_{n+1}) - h(x_1) = \sum_{i=1}^{n} [h(x_{i+1}) - h(x_i)] > n(h(x_2) - h(x_1)).$$

Slijedi $\lim_n h(x_{n+1}) = +\infty$, pa ne vrijedi $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Kontradikcija.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2024.

Zadatak 3. (10+5 bodova)

(a) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}$$

te skicirajte njen graf.

(b) U kojim točkama njene prirodne domene ne postoje prva i druga derivacija? Geometrijski interpretirajte tu činjenicu.

Rješenje.

(a) Domena funkcije je $\mathbf{R}\backslash\{-1\}$, a nultočka točka $x_0 = 0$.

Kandidat za vertikalnu asimptotu je $x = -1$. Provjerimo:

$$\lim_{x\to -1+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -1-} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty,$$

pa je pravac $x = -1$ zaista vertikalna asimptota (obostrana).

Provjerimo ima li funkcija kosu asimptotu:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x(x+1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{-2}{3}}} = \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

Dakle, pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota, nema kosih asimptota.

Izračunajmo derivaciju:

$$f'(x) = \frac{2-x}{3\sqrt[3]{x}(x+1)^2}, \quad x \neq 0, -1,$$

pa funkcija raste na intervalu $[0, 2]$, a pada na $\langle -\infty, -1\rangle$, $\langle -1, 0]$ i $[2, +\infty\rangle$. Funkcija ima lokalni minimum u točki $x = 0$ i iznosi $f(0) = 0$, a lokalni maksimum u točki $x = 2$ i iznosi $f(2) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

Uočimo da ne postoji prva derivacija u točki $x = 0$, no to neće smetati za određivanje intervala rasta i pada.

Druga derivacija:

$$f''(x) = \frac{2}{9} \cdot \frac{2x^2 - 8x - 1}{\sqrt[3]{x^4}(x+1)^3}.$$

Označimo njene nultočke s $x_1 = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ i $x_1 = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Tada je funkcija konveksna na intervalu $\langle -1, x_1]$ i na $[x_2, +\infty\rangle$, a konkavna na $\langle -\infty, -1\rangle$, $[x_1, 0]$ i na $[0, x_2]$ te ima dvije točke infleksije x_1 i x_2.

(b) U točki $x = 0$, jer u toj točki funkcija nema jedinstvenu tangentu.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2024.

Zadatak 4. (3+3 boda) Na krivulju

$$2x^2 + 3y^2 = 8$$

je povučena tangenta u točki koja se nalazi u prvom kvadrantu (njene x i y koordinate su pozitivne). Odredite duljinu najkraće dužine koja se dobije uzimajući sjecišta te tangente s koordinatnim osima.

Rješenje. Označimo točku na elipsi u kojoj je povučena tangenta s $T(x_0, y_0)$. Implicitnim deriviranjem dobijemo

$$4x + 6yy' = 0 \quad \Rightarrow y'(x) = \frac{-2}{3}\frac{x}{y}.$$

pa je jednadžba tangente kroz T jednaka

$$y - y_0 = \frac{-2}{3}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Neka su $A(x_A, 0)$ i $B(0, y_B)$ točke na x i $y-$osi u kojima tangenta siječe te osi, redom. Tada točke A i B zadovoljavaju jednadžbu tangente pa je

$$x_A = \frac{x_0 y'(x_0) - y_0}{y'(x_0)} = \frac{4}{x_0}$$
$$y_B = -x_0 y'(x_0) + y_0 = \frac{8}{3y_0}$$

Tražena duljina $|AB| = d(A, B) = \sqrt{x_A^2 + y_B^2} = 16\left(\frac{1}{x_0^2} + \frac{4}{9y_0^2}\right)$. Koristeći $y_0 = \sqrt{\frac{8-2x_0^2}{3}}$, napisat ćemo funkciju d kao funkciju po varijabli x_0 pa je to funkcija $d : \langle 0, 2\rangle \longrightarrow \mathbf{R}^+$, a budući da se minimum funkcije $d(x)$ postiže u istoj točki kao i funkcije $\tilde{d}(x) = \frac{d(x)^2}{16}$, dovoljno je pronaći točku u kojoj funkcija $\tilde{d}$ postiže minimalnu vrijednost na intervali $\langle 0, 2\rangle$. Imamo da je

$$\tilde{d}(x_0) = \frac{1}{x_0^2} + \frac{4}{9y_0^2} = \frac{12 - x_0^2}{3x_0^2(4 - x_0^2)}.$$

Uočimo da to znači da je ovaj problem ekvivalentan traženju minimuma funkcije

$$d_2(t) = \frac{12 - t}{3t(4 - t)}, \quad t = x^2.$$

Funkcija d_2 je derivabilna na $\langle 0, 4\rangle$ pa je kandidat za točku u kojoj postiže minimum stacionarna točka. Računamo:

$$d_2'(t) = \frac{-(t^2 - 24t + 48)}{3t^2(4 - t)^2}$$

čija stacionarne točke su $t_{1,2} = 12 \pm 4\sqrt{6}$, a stacionarna točka koja upada u interval $\langle 0, 4\rangle$ je $12 - 4\sqrt{6}$. Kako je točka $x_0 > 0$, slijedi da je točka u kojoj zadana funkcija postiže minimum jednaka $\sqrt{12 - 4\sqrt{6}} = 2\sqrt{3 - \sqrt{6}}$.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2024.

Zadatak 1. (10 bodova) Neka je dana funkcija $u : \langle -\frac{1}{5}, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ sa

$$u(x) = \frac{\ln(5x+1)}{x^{11}+1}.$$

Odredite $u^{(12)}(0)$.

Rješenje. Za $n \geq 11$ imamo

$$(x^{11}+1)u(x) = \ln(5x+1) \quad / \ ^{(n)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^{11})^{(k)} u^{(n-k)}(x) + u^{(n)}(x) = 5((5x+1)^{-1})^{(n-1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(5x+1)^{-n}5^n \qquad /x=0$$

$$\binom{n}{11} 11! u^{(n-11)}(0) + u^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!5^n$$

$$u^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!5^n - \binom{n}{11} 11! u^{(n-11)}(0) \quad /n=12$$

$$u^{(12)}(0) = -11!5^{12} - 12!u^{'}(0) = -11!5^{12} - 12! \cdot 5$$

$$u^{(12)}(0) = -11!(5^{12}+60).$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2024.

Zadatak 2.

a) (10 bodova) Za $\beta \in \mathbb{R}$, dana je funkcija $v : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R}$ sa

$$v(x) = \begin{cases} \frac{\log_7(1+\operatorname{tg} x)}{x}, & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \setminus \{0\}, \\ \beta, & x = 0. \end{cases}$$

Postoji li $\beta \in \mathbb{R}$ takav da je v derivabilna u 0?

b) (5 bodova) Neka je $c \in \mathbb{R}$ i $r : \langle c, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna, $r''(x) < 0$ za svaki $x \in \langle c, +\infty\rangle$, te je $\lim_{x\to+\infty} r(x) = 0$. Dokažite da r nema nultočku.

Rješenje.

a) Neprekidnost je nužna:

$$\beta = \lim_{x\to 0} \frac{\log_7(1+\operatorname{tg} x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+\operatorname{tg} x)\ln 7} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\ln 7}.$$

Provjerimo dervabilnost:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\log_7(1+\operatorname{tg} x)}{x} - \frac{1}{\ln 7}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\log_7(1+\operatorname{tg} x)}{x}\right)' \\ =& \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{(1+\operatorname{tg} x)\ln 7}\frac{1}{\cos^2 x}\right)x - \log_7(1+\operatorname{tg} x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \\ =& \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{(1+\operatorname{tg} x)\ln 7}\frac{1}{\cos^2 x}\right)' x + \frac{1}{(1+\operatorname{tg} x)\ln 7}\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{(1+\operatorname{tg} x)\ln 7}\frac{1}{\cos^2 x}}{2x} \\ =& \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2\ln 7} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cos^2 x + (1+\operatorname{tg} x)2\cos x(-\sin x)}{(1+\operatorname{tg} x)^2\cos^4 x} \\ =& \frac{-1}{2\ln 7}. \end{aligned}$$

b) Funkcija r' je strogo padajuća i neprekidna.

i) Ako $0 \notin r'(\langle c, +\infty\rangle)$, onda je $r' > 0$ ili $r' < 0$, pa je r strogo monotona. Pretpostavimo da r ima nultočku x_0. Neka je $x > x_1 > x_0$. Sada je $|r(x)| > |r(x_1)| > 0$. Dakle, ne vrijedi $\lim_{x\to+\infty} r(x) = 0$. Kontradikcija.

ii) Neka je $r'(x_0) = 0$. Tada je r strogo padajuća na $\langle x_0, +\infty\rangle$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $x_n = x_0 + n$. Iz stroge konkavnosti imamo $r(x_n) > (r(x_{n-1}) + r(x_{n+1}))/2$. Slijedi

$$r(x_{n+1}) - r(x_n) < r(x_n) - r(x_{n-1}) < \ldots < r(x_2) - r(x_1) < 0,$$

$$r(x_{n+1}) - r(x_1) = \sum_{i=1}^{n} [r(x_{i+1}) - r(x_i)] < n(r(x_2) - r(x_1)).$$

Slijedi $\lim_n r(x_{n+1}) = -\infty$, pa ne vrijedi $\lim_{x\to+\infty} r(x) = 0$. Kontradikcija.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2024.

Zadatak 3. (10+5 bodova)

(a) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x-1}$$

te skicirajte njen graf.

(b) U kojim točkama njene prirodne domene ne postoje prva i druga derivacija? Geometrijski interpretirajte tu činjenicu.

Rješenje.

(a) Domena funkcije je $\mathbf{R}\backslash\{1\}$, a nultočka točka $x_0 = 2$.

Kandidat za vertikalnu asimptotu je $x = 1$. Provjerimo:

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x-1} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x-1} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty,$$

pa je pravac $x = 1$ zaista vertikalna asimptota (obostrana).

Provjerimo ima li funkcija kosu asimptotu:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1-\frac{2}{x}))^{\frac{2}{3}}}{x-1} x^{\frac{-1}{3}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1-\frac{2}{x}))^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{-2}{3}}} = \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

Dakle, pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota, nema kosih asimptota.

Izračunajmo derivaciju:

$$f'(x) = \frac{4-x}{3\sqrt[3]{x-2}(x-1)^2}, \quad x \neq 1, 2,$$

pa funkcija raste na intervalu $[2, 4]$, a pada na $\langle -\infty, 1\rangle$, $\langle 1, 2]$ i $[4, +\infty\rangle$. Funkcija ima lokalni minimum u točki $x = 2$ i iznosi $f(2) = 0$, a lokalni maksimum u točki $x = 4$ i iznosi $f(4) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

Uočimo da ne postoji prva derivacija u točki $x = 2$, no to neće smetati za određivanje intervala rasta i pada.

Druga derivacija:

$$f''(x) = \frac{2}{9} \cdot \frac{2x^2 - 16x + 23}{\sqrt[3]{(x-2)^4}(x-1)^3}.$$

Označimo njene nultočke s $x_1 = 4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ i $x_1 = 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Tada je funkcija konveksna na intervalu $\langle 1, x_1]$ i na $[x_2, +\infty\rangle$, a konkavna na $\langle -\infty, 1\rangle$, $[x_1, 2]$ i na $[2, x_2]$ te ima dvije točke infleksije x_1 i x_2.

(b) U točki $x = 2$, jer u toj točki funkcija nema jedinstvenu tangentu.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 02. svibnja 2024.

Zadatak 4. (10 bodova) Na krivulju

$$2x^2 + y^2 = 6$$

je povučena tangenta u točki koja se nalazi u drugom kvadrantu (njena x koordinata je negativna, a y koordinata je pozitivna). Odredite duljinu najkraće dužine koja se dobije uzimajući sjecišta te tangente s koordinatnim osima.

Rješenje. Označimo točku na elipsi u kojoj je povučena tangenta s $T(x_0, y_0)$. Implicitnim deriviranjem dobijemo

$$4x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow y'(x) = -2\frac{x}{y}.$$

pa je jednadžba tangente kroz T jednaka

$$y - y_0 = -2\frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Neka su $A(x_A, 0)$ i $B(0, y_B)$ točke na x i $y-$osi u kojima tangenta siječe te osi, redom. Uočimo da je, zbog simetričnosti elipse, ekvivalentno promatrati točku A u prvom kvadrantu. Tada točke A i B zadovoljavaju jednadžbu tangente pa je

$$x_A = \frac{x_0 y'(x_0) - y_0}{y'(x_0)} = \frac{3}{x_0}$$
$$y_B = -x_0 y'(x_0) + y_0 = \frac{6}{y_0}$$

Tražena duljina $|AB| = d(A, B) = \sqrt{x_A^2 + y_B^2} = 9\left(\frac{1}{x_0^2} + \frac{4}{y_0^2}\right)$. Koristeći $y_0 = \sqrt{6 - 2x_0^2}$, napisat ćemo funkciju d kao funkciju po varijabli x_0 pa je to funkcija $d : \langle 0, \sqrt{3}\rangle \longrightarrow \mathbf{R}^+$, a budući da se minimum funkcije $d(x)$ postiže u istoj točki kao i funkcije $\tilde{d}(x) = \frac{d(x)^2}{9}$, dovoljno je pronaći točku u kojoj funkcija $\tilde{d}$ postiže minimalnu vrijednost na intervali $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$. Imamo da je

$$\tilde{d}(x_0) = \frac{1}{x_0^2} + \frac{4}{y_0^2} = \frac{3 + x_0^2}{x_0^2(3 - x_0^2)}.$$

Uočimo da to znači da je ovaj problem ekvivalentan traženju minimuma funkcije

$$d_2(t) = \frac{3 + t}{t(3 - t)}, \quad t = x^2.$$

Funkcija d_2 je derivabilna na $\langle 0, 3\rangle$ pa je kandidat za točku u kojoj postiže minimum stacionarna točka. Računamo:

$$d_2'(t) = \frac{t^2 + 6t - 9}{t^2(3 - t)^2}$$

čija stacionarne točke su $t_{1,2} = -3 \pm 3\sqrt{2}$, a stacionarna točka koja upada u interval $\langle 0, 3\rangle$ je $-3 + 3\sqrt{2}$. Kako je točka $x_0 > 0$, slijedi da je točka u kojoj zadana funkcija postiže minimum jednaka $\sqrt{-3 + 3\sqrt{2}}$.