Tema br. 9:

Elementarni operatori na M_n

Mateo Tomašević, 26. svibnja 2023.

Za polje $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ označimo s $M_n := M_n(\mathbb{F})$ algebru $n \times n$ matrica s koeficijentima iz $\mathbb{F}$ te označimo s $M_n^\times$ skup svih regularnih matrica iz M_n. Nadalje, $\operatorname{End}(M_n)$ označava prostor svih linearnih preslikavanja (endomorfizama) $M_n \to M_n$.

Za preslikavanje $\phi : M_n \to M_n$ oblika

$$\phi(X) = \sum_{i=1}^{m} A_i X B_i, \quad m \in \mathbb{N},\ A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \in M_n$$

kažemo da je **elementarni operator duljine** $\leq m$. Za elementarni operator kažemo da je **duljine** d ako je

$$d = \min\{m \in \mathbb{N} : \phi \text{ je duljine } \leq m\}.$$

Evidentno je tada $\phi \in \operatorname{End}(M_n)$.

Propozicija 1. *Svako linearno preslikavanje $\phi : M_n \to M_n$ je elementarni operator duljine $\leq n^2$.*

Dokaz. Proizvoljan $X \in M_n$ možemo zapisati u bazi matričnih jedinica

$$\phi(X) = \phi\left(\sum_{1\leq i,j\leq n} X_{ij} E_{ij}\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} X_{ij}\phi(E_{ij})$$

te zatim zapišimo svaki $\phi(E_{ij}) = \sum_{1\leq k,l\leq n} \phi(E_{ij})_{kl} E_{kl}$ pa imamo

$$\begin{aligned}
\phi(X) &= \sum_{1\leq i,j\leq n} X_{ij} \sum_{1\leq k,l\leq n} \phi(E_{ij})_{kl} E_{kl} \\
&= \sum_{1\leq i,j,k,l\leq n} \phi(E_{ij})_{kl} X_{ij} E_{kl} \\
&= \sum_{1\leq i,j,k,l\leq n} \phi(E_{ij})_{kl} E_{ki} X E_{jl} \\
&= \sum_{1\leq i,k\leq n} \underbrace{E_{ki}}_{A_{i,k}:=} X \underbrace{\left(\sum_{1\leq j,l\leq n} \phi(E_{ij})_{kl} E_{jl}\right)}_{B_{i,k}:=} \\
&= \sum_{1\leq i,k\leq n} A_{i,k} X B_{i,k}
\end{aligned}$$

Matrice $A_{i,k}, B_{i,k}, 1 \leq i,k \leq n$ ne ovise o X nego samo o ϕ, što pokazuje traženu tvrdnju. □

U nastavku diskutiramo kako prepoznati da je elementaran operator duljine d.

Za potprostor $\mathcal{I} \leq M_n$ kažemo da je **ideal** u M_n ako za sve $A \in \mathcal{I}$ i $X \in M_n$ vrijedi $AX \in \mathcal{I}$ i $XA \in \mathcal{I}$.

Očito su $\{0\}$ i M_n ideali u M_n. Pokazuje se da su to ustvari jedini ideali u M_n – kažemo da je algebra M_n prosta (simple).

Propozicija 2. *Neka je $\mathcal{I}$ ideal u M_n. Tada je $\mathcal{I} = \{0\}$ ili $\mathcal{I} = M_n$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{I} \neq \{0\}$. Tada postoji $A \in \mathcal{I}$ s nenul elementom $A_{ij} \neq 0$.

Vrijedi

$$A_{ij}E_{ij} = E_{ii}AE_{jj} \in \mathcal{I}$$

pa množenjem s $\frac{1}{A_{ij}}$ dobivamo $E_{ij} \in \mathcal{I}$. Sada za sve $1 \leq k, l \leq n$ imamo

$$E_{kl} = E_{ki}E_{ij}E_{jl} \in \mathcal{I}$$

pa je i $M_n = \operatorname{span}\{E_{kl} : 1 \leq k, l \leq n\} \subseteq \mathcal{I}$. Zaključujemo $\mathcal{I} = M_n$. $\square$

Napomena. Ako je $A \in M_n$ proizvoljna matrica, tada se lako pokaže da je

$$\operatorname{Id}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} X_i A Y_i : m \in \mathbb{N}, X_i, Y_i \in M_n, 1 \leq i \leq m \right\}$$

ideal u M_n. Dakle, imamo

$$\operatorname{Id}(A) = \begin{cases} \{0\}, & \text{ako je } A = 0, \\ M_n, & \text{ako je } A \neq 0. \end{cases}$$

Lema 1. *Pretpostavimo da su $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m \in M_n$ takve da*

$$\sum_{i=1}^{m} A_i X B_i = 0, \qquad \textit{za sve } X \in M_n. \tag{1}$$

(a) Ako je skup $\{A_1, \ldots, A_m\}$ linearno nezavisan, tada je $B_1 = \cdots = B_m = 0$.

(b) Ako je skup $\{B_1, \ldots, B_m\}$ linearno nezavisan, tada je $A_1 = \cdots = A_m = 0$.

Dokaz. (a) Pokazat ćemo tvrdnju indukcijom po duljini prikaza m. Pretpostavimo da je $m = 1$ i da su $A, B \in M_n, A \neq 0$ matrice takva da $AXB = 0$. Tada je $\operatorname{Id}(A) = M_n$ pa postoji $k \in \mathbb{N}$ i matrice $C_1, \ldots, C_k, D_1, \ldots, D_k \in M_n$ takve da je

$$\sum_{i=1}^{k} C_i A D_i = I.$$

Specijalno imamo

$$B = IB = \left(\sum_{i=1}^{k} C_i A D_i \right) B = \sum_{i=1}^{k} C_i \underbrace{(AD_iB)}_{=0} = 0.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve prikaze duljine $\leq m - 1$. Pokažimo da vrijedi za m. Neka su $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m \in M_n$ takve da

$$\sum_{i=1}^{m} A_i X B_i = 0, \qquad \text{za sve } X \in M_n.$$

Ako je $B_m = 0$, tada tražena tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije.

Pretpostavimo da je $B_m \neq 0$. Tada je $\operatorname{Id}(B_m) = M_n$ pa specijalno postoje matrice $C_1, \ldots, C_k, D_1, \ldots, D_k \in M_n$ takve da je

$$\sum_{j=1}^{k} C_j B_m D_j = I.$$

Označimo

$$F_i := \sum_{j=1}^{k} C_j B_i D_j, \qquad 1 \leq i \leq m.$$

Tada je $F_m = I$. Za svaki $X \in M_n$ imamo

$$\sum_{i=1}^{m} A_i X F_i = \sum_{i=1}^{m} A_i X \left(\sum_{j=1}^{k} C_j B_i D_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} A_i (X C_j) B_i \right)}_{=0} D_j = 0$$

pa specijalno

$$\sum_{i=1}^{m-1} A_i X F_i = -A_m X F_m = -A_m X.$$

Stoga za sve $X, Y \in M_n$ imamo

$$\sum_{i=1}^{m-1} A_i X (Y F_i - F_i Y) = \sum_{i=1}^{m-1} A_i (XY) F_i - \left(\sum_{i=1}^{m-1} A_i X F_i \right) Y = -A_m (XY) + (A_m X) Y = 0$$

pa budući da je skup $\{A_1, \ldots, A_{m-1}\}$ linearno nezavisan za sve $1 \leq i \leq m-1$ prema pretpostavci indukcije imamo

$$Y F_i - F_i Y = 0, \forall Y \in M_n \implies F_i = \alpha_i I \text{ za neki } \alpha_i \in \mathbb{F}.$$

Također je $F_m = \alpha_m I$ uz $\alpha_m = 1$. Tada imamo

$$0 = \sum_{i=1}^{m} A_i I F_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i$$

što je kontradikcija s linearnom nezavisnošću skupa $\{A_1, \ldots, A_m\}$. Time je korak indukcije proveden.

(b) Transponiranjem relacije (1) slijedi

$$\sum_{i=1}^{m} B_i^t X A_i^t = 0, \qquad \text{za sve } X \in M_n.$$

Budući da je skup $\{B_1^t, \ldots, B_m^t\}$ linearno nezavisan, iz tvrdnje (a) slijedi $A_1^t = \cdots = A_m^t = 0$ čime je tvrdnja dokazana.

□

Lema 2. *Pretpostavimo da vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{m} A_i X B_i = \sum_{i=1}^{r} C_i X D_i, \qquad \text{za sve } X \in M_n$$

za neke $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m, C_1, \ldots, C_r, D_1, \ldots, D_r \in M_n$.

(a) Ako je skup $\{A_1, \ldots, A_m\}$ *linearno nezavisan, tada je* $B_1, \ldots, B_m \in \operatorname{span}\{D_1, \ldots, D_r\}$.

(b) Ako je skup $\{B_1, \ldots, B_m\}$ *linearno nezavisan, tada je* $A_1, \ldots, A_m \in \operatorname{span}\{C_1, \ldots, C_r\}$.

Dokaz. (a) Nadopunimo linearno nezavisan skup $\{A_1, \ldots, A_m\}$ do baze $\{A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_{m+s}\}$ za potprostor $\operatorname{span}\{A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_r\} \leq M_n$. Zapišimo

$$C_k = \sum_{j=1}^{m+s} \alpha_j^{(k)} A_j, \qquad 1 \leq k \leq r$$

te imamo

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{m} A_i X B_i - \sum_{k=1}^{r} C_k X D_k \\
&= \sum_{i=1}^{m} A_i X B_i - \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{m+s} \alpha_j^{(k)} A_j \right) X D_k \\
&= \sum_{i=1}^{m} A_i X B_i - \sum_{j=1}^{m+s} A_j X \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_j^{(k)} D_k \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} A_i X \left(B_i - \sum_{k=1}^{r} \alpha_i^{(k)} D_k \right) + \sum_{i=m+1}^{m+s} A_i X \left(- \sum_{k=1}^{r} \alpha_i^{(k)} D_k \right).
\end{aligned}
$$

Iz Leme 1 slijedi da je

$$
B_i = \sum_{k=1}^{r} \alpha_i^{(k)} D_k, \qquad 1 \leq i \leq m
$$

što smo i trebali pokazati.

(b) Slijedi iz (a) transponiranjem.

□

Propozicija 3. *Elementarni operator $\phi : M_n \to M_n$ je duljine d ako i samo ako posjeduje prikaz $\phi(X) = \sum_{i=1}^{d} A_i X B_i$ gdje su $\{A_1, \ldots, A_d\}$ i $\{B_1, \ldots, B_d\}$ linearno nezavisni skupovi u M_n.*

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Pretpostavimo da je ϕ duljine d. Tada postoji prikaz $\phi(X) = \sum_{i=1}^{d} A_i X B_i$ za neke $A_1, \ldots, A_d, B_1, \ldots, B_d \in M_n$. Pretpostavimo da je $\{A_1, \ldots, A_d\}$ linearno zavisan. Tada BSO eventualnom promjenom poretka možemo pretpostaviti da je $A_d = \sum_{j=1}^{d-1} \alpha_j A_j$ za neke skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{F}$. Tada imamo

$$
\phi(X) = \sum_{i=1}^{d} A_i X B_i = \sum_{i=1}^{d-1} A_i X B_i + \left(\sum_{j=1}^{d-1} \alpha_j A_j \right) X B_d = \sum_{i=1}^{d-1} A_i X (B_i + \alpha_i B_d)
$$

pa je ϕ duljine $\leq d-1$, što je kontradikcija. Dakle, $\{A_1, \ldots, A_d\}$ je linearno nezavisan. Analogno se pokaže da je $\{B_1, \ldots, B_d\}$ linearno nezavisan.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Pretpostavimo da ϕ posjeduje takav prikaz. Tada je ϕ očito duljine $\leq d$. Pretpostavimo da je duljine $\leq d-1$. Tada bi postojale matrice $C_1, \ldots, C_{d-1}, D_1, \ldots, D_{d-1} \in M_n$ takve da

$$
\phi(X) = \sum_{i=1}^{d} A_i X B_i = \sum_{i=1}^{d-1} C_i X D_i.
$$

Iz Leme 2 (a) slijedi

$$
\underbrace{B_1, \ldots, B_d}_{\text{linearno nezavisni}} \in \operatorname{span}\{D_1, \ldots, D_{d-1}\}
$$

što je kontradikcija. □

Ako je $\phi : M_n \to M_n$ elementaran operator duljine d, tada za bilo koji prikaz oblika $\phi(X) = \sum_{i=1}^{d} A_i X B_i, \forall X \in M_n$ za neke $A_1, \ldots, A_d, B_1, \ldots, B_d \in M_n$ kažemo da je **minimalan**. Iz dokaza prethodne propozicije slijedi da su tada skupovi $\{A_1, \ldots, A_d\}$ i $\{B_1, \ldots, B_d\}$ nužno linearno nezavisni.

Sada je jasno da u $\operatorname{End}(M_n)$ postoje elementarni operatori proizvoljne duljine $1 \leq d \leq n^2$.

Primjer 1. (a) Imamo

$$
\phi(X) = X^t = \sum_{1 \leq i,j \leq n} X_{ji} E_{ij} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} E_{ij} X E_{ij}
$$

pa je transponiranje elementarni operator duljine n^2.

(b) Za $\phi(X) = (\operatorname{Tr} X)I$ imamo

$$\phi(X) = (\operatorname{Tr} X)I = \sum_{1\le i,j\le n} X_{jj}E_{ii} = \sum_{1\le i,j\le n} E_{ij}XE_{ji}$$

pa je ϕ elementarni operator duljine n^2.

Napomena. Da bismo odredili duljinu elementarnog operatora $\phi : M_n \to M_n$, krenimo od proizvoljnog prikaza $\phi(X) = \sum_{i=1}^m A_iXB_i, \forall X \in M_n$ za neke $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \in M_n$. Ako su skupovi $\{A_1, \dots, A_m\}$ i $\{B_1, \dots, B_m\}$ linearno nezavisni, tada je prikaz minimalan i ϕ je duljine m. Ako nisu, tada bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je

$$A_n = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j A_j$$

za neke skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{F}$. Tada za sve $X \in M_n$ imamo

$$\begin{aligned}
\phi(X) &= \sum_{i=1}^{m-1} A_iXB_i + A_mXB_m \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} A_iXB_i + \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_iA_i\right)XB_m \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} A_iXB_i + \sum_{i=1}^{m-1} A_iX(\alpha_iB_m) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} A_iX(B_i + \alpha_iB_m).
\end{aligned}$$

Ako su skupovi $\{A_1, \dots, A_{m-1}\}$ i $\{B_1 + \alpha_1B_m, \dots, B_{m-1} + \alpha_{m-1}B_m\}$ linearno nezavisni, tada je prikaz minimalan i ϕ je duljine $m-1$. Ako nisu, tada ponavljamo postupak. U najviše m koraka dolazimo do prikaza minimalne duljine.

U sljedećoj propoziciji diskutira se svojevrsna jedinstvenost prikaza minimalne duljine.

Propozicija 4. *Neka je $\phi : M_n \to M_n$ elementaran operator duljine d zadan s*

$$\phi(X) = \sum_{i=1}^{d} A_iXB_i = \sum_{i=1}^{d} C_iXD_i, \qquad \text{za sve } X \in M_n$$

za neke $A_1, \dots, A_d, B_1, \dots, B_d, C_1, \dots, C_d, D_1, \dots, D_d \in M_n$. Tada postoji invertibilna matrica $S \in M_d^\times$ takva da je

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_d \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_d \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_d \end{bmatrix} = S^{-t} \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_d \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Iz Leme 2 (a) slijedi

$$C_1, \dots, C_d \in \operatorname{span}\{A_1, \dots, A_d\}$$

pa za svaki $1 \le i \le d$ postoje skalari $S_{i1}, \dots S_{id} \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$C_i = \sum_{j=1}^{d} S_{ij}A_j$$

pa ako označimo $S = (S_{ij})_{ij} \in M_d$, tada imamo

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_d \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_d \end{bmatrix}.$$

Analogno, postoji $T \in M_d$ takva da

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_d \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_d \end{bmatrix}.$$

Tada za svaki $X \in M_n$ imamo

$$\sum_{i=1}^{d} A_i X B_i = \sum_{i=1}^{d} C_i X D_i = \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} S_{ij} A_j \right) X \left(\sum_{k=1}^{d} S_{ik} B_k \right) = \sum_{j=1}^{d} A_j X \left(\sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} S_{ij} T_{ik} \right) B_k \right).$$

Iz Leme 1 slijedi da za svaki $1 \le i \le d$ imamo

$$B_i = \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} S_{ji} T_{jk} \right) B_k$$

pa budući da je skup $\{B_1, \ldots, B_d\}$ linearno nezavisan, ustvari imamo

$$(S^t T)_{ik} = \sum_{j=1}^{d} (S^t)_{ij} T_{jk} = \sum_{j=1}^{d} S_{ji} T_{jk} = \delta_{ik}$$

odnosno $S^t T = I$. Odavde tvrdnja slijedi. $\square$

Teorem 1 (Skolem–Noether)**.** *Neka je $\phi : M_n \to M_n$ homomorfizam algebri, tj. linearno preslikavanje koje zadovoljava $\phi(XY) = \phi(X)\phi(Y)$ za sve $X, Y \in M_n$. Ako je $\phi \neq 0$, tada postoji $A \in M_n^\times$ takva da je $\phi(X) = AXA^{-1}$.*

Dokaz. Neka je $\phi(X) = \sum_{i=1}^{d} A_i X B_i, \forall X \in M_n$ minimalan prikaz za ϕ uz $1 \le d \le n^2$. Za sve $X, Y \in M_n$ imamo

$$\sum_{i=1}^{d} A(XY)B_i = \phi(XY) = \phi(X)\phi(Y) = \sum_{i=1}^{d} (AXB_i)\phi(Y).$$

Stoga za fiksan $Y \in M_n$ imamo

$$\sum_{i=1}^{d} A_i X (Y B_i - B_i \phi(Y)) = 0, \qquad \text{za sve } X \in M_n$$

pa prema Lemi 1 slijedi

$$Y B_i - B_i \phi(Y) = 0, \qquad \text{za sve } 1 \le i \le d.$$

Zbog linearne nezavisnosti skupa $\{B_1, \ldots, B_d\}$ i $d \geq 1$ specijalno imamo $B_1 \neq 0$ pa je $\mathrm{Id}(B_1) = M_n$ i stoga postoje $C_1, \ldots, C_m, D_1, \ldots, D_m \in M_n$ takve da je $\sum_{j=1}^{m} C_j B_1 D_j = I$. Tada specijalno imamo

$$I = \sum_{j=1}^{m} (C_j B_1) D_j = \sum_{j=1}^{m} (B_1 \phi(C_j)) D_j = B_1 \left(\sum_{j=1}^{m} \phi(C_j) D_j \right)$$

pa je B_1 invertibilna matrica. Stoga imamo

$$\phi(Y) = B_1^{-1} Y B_1, \qquad \text{za sve } Y \in M_n$$

čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Označimo s H_n skup svih $n \times n$ kompleksnih hermitskih matrica.

Teorem 2. *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ elementarni operator duljine d koji preslikava hermitske matrice u hermitske matrice. Tada postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}^\times$ i linearno nezavisne matrice $C_1, \ldots, C_d \in M_n(\mathbb{C})$ takve da je*

$$\phi(X) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i C_i X C_i^*, \qquad \textit{za sve } X \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dokaz. Neka je $\phi(X) = \sum_{i=1}^{d} A_i X B_i, \forall X \in M_n(\mathbb{C})$ neki minimalni prikaz za ϕ. Tada za svaku hermitsku matricu $X \in H_n$ imamo da je i $\phi(X) \in H_n$ i stoga

$$\sum_{i=1}^{d} A_i X B_i = \phi(X) = \phi(X)^* = \sum_{i=1}^{d} B_i^* X^* A_i^* = \sum_{i=1}^{d} B_i^* X A_i^*.$$

Budući da $\operatorname{span} H_n = M_n(\mathbb{C})$, zaključujemo da je

$$\sum_{i=1}^{d} A_i X B_i = \sum_{i=1}^{d} B_i^* X A_i^*, \qquad \text{za sve } X \in M_n(\mathbb{C})$$

pa prema Propoziciji 4 postoji $S \in M_d(\mathbb{C})^\times$ takva da je

$$\begin{bmatrix} B_1^* \\ \vdots \\ B_d^* \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_d \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A_1^* \\ \vdots \\ A_d^* \end{bmatrix} = S^{-t} \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_d \end{bmatrix}.$$

Transponiranjem prve jednakosti slijedi

$$\begin{bmatrix} B_1^* & \cdots & B_d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_d \end{bmatrix} S^t,$$

a adjungiranjem druge

$$\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^* & \cdots & B_d^* \end{bmatrix} \overline{S}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_d \end{bmatrix} S^t \overline{S}^{-1}.$$

Zbog linearne nezavisnosti skupa $\{A_1, \dots, A_d\}$ slijedi

$$S^t \overline{S}^{-1} = I \implies S^t = \overline{S} \implies S = S^*$$

odnosno $S \in H_d$. Stoga možemo odabrati unitarnu matricu $U \in U_d$ takvu da je

$$U^* S U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$$

gdje su $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}^\times$ svojstvene vrijednosti matrice S.

Ako uvedemo matrice $C_1, \dots, C_d \in M_d(\mathbb{C})$ formulom

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_d \end{bmatrix} = U^* \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_d \end{bmatrix},$$

tada je skup $\{C_1, \dots, C_d\}$ linearno nezavisan. Nadalje, imamo

$$\begin{bmatrix} A_1^* & \cdots & A_d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^* & \cdots & C_d^* \end{bmatrix} U^* \implies A_i^* = \sum_{k=1}^{d} (U^*)_{ki} C_k^*, \quad 1 \le i \le d$$

te

$$\begin{bmatrix} B_1^* \\ \vdots \\ B_d^* \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_d \end{bmatrix} = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_d \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \lambda_1 C_1 \\ \vdots \\ \lambda_d C_d \end{bmatrix} \implies B_i^* = \sum_{j=1}^{d} U_{ij} (\lambda_j C_j), \quad 1 \le i \le d.$$

Stoga za sve $X \in M_n(\mathbb{C})$ imamo

$$
\begin{aligned}
\phi(X) &= \sum_{i=1}^{d} B_i^* X A_i^* \\
&= \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \lambda_j U_{ij} C_j \right) X \left(\sum_{k=1}^{d} (U^*)_{ki} C_k^* \right) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{d} (U^*)_{ki} U_{ij} \right)}_{=(U^*U)_{kj} = \delta_{kj}} \lambda_j C_j X C_k^* \\
&= \sum_{j=1}^{d} \lambda_j C_j X C_j^*.
\end{aligned}
$$

□

1 Zadaci

Za uspješno rješavanje zadaće potrebno je riješiti barem 5 zadataka. Rok za predaju zadaće je 12. lipnja 2023. Zadaću predajete mailom.

Zadatak 1. Neka su $A_1, \dots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$ matrice takve da je

$$\sum_{i=1}^{m} A_i X A_i = 0, \qquad \text{za sve } X \in M_n(\mathbb{R}).$$

Dokažite da je $A_1 = \cdots = A_m = 0$. Vrijedi li analogna tvrdnja za kompleksne matrice?

Zadatak 2. Zadano je linearno preslikavanje

$$\phi : M_3 \to M_3, \qquad \phi\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}.$$

Odredite duljinu od ϕ kao elementarnog operatora.

Zadatak 3. Odredite sve moguće duljine elementarnog operatora $\phi : M_n \to M_n$ sa svojstvom $\phi(I) = I$.

Zadatak 4. Za matrice $X, Y \in M_n$ uvedimo oznaku $[X, Y] := XY - YX$. Neka je $A \in M_n$ matrica. Dokažite da je $[A, [A, [A, X]]] = 0$ za sve $X \in M_n$ ako i samo ako postoji skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ takav da $(A - \lambda I)^2 = 0$.

Zadatak 5. Neka je $\phi : M_n \to M_n$ linearno preslikavanje koje zadovoljava $\phi(XY) = \phi(X)Y$ za sve $X, Y \in M_n$. Dokažite da postoji matrica $A \in M_n$ takva da $\phi(X) = AX$ za sve $X \in M_n$.

Zadatak 6. Neka je $\delta : M_n \to M_n$ derivacija, tj. linearno preslikavanje koje zadovoljava

$$\delta(XY) = \delta(X)Y + X\delta(Y), \quad X, Y \in M_n.$$

Dokažite da postoje matrica $A \in M_n$ takva da je $\delta(X) = AX - XA$ za sve $X \in M_n$. Štoviše, dokažite da je A jedinstvena do na dodavanje skalarne matrice.

Zadatak 7. Neka je $\phi : M_n \to M_n$ linearno preslikavanje takvo da postoji preslikavanje $\delta : M_n \to M_n$ takvo da za sve $X, Y \in M_n$ vrijedi

$$\phi(XY) = \phi(X)Y + X\delta(Y).$$

Dokažite da postoje matrice $A, B \in M_n$ takve da je $\phi(X) = AX + XB$ za sve $X \in M_n$.

Zadatak 8. Neka je $\phi : M_n \to M_n$ linearno preslikavanje koje čuva trag, tj. zadovoljava $\operatorname{Tr} \phi(X) = \operatorname{Tr} X$ za sve $X \in M_n$. Ako su $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \in M_n$ matrice takve da je $\phi(X) = \sum_{i=1}^{m} A_i X B_i$ za sve $X \in M_n$, dokažite da je $\sum_{i=1}^{m} B_i A_i = I$.

Zadatak 9. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrice koje zadovoljavaju $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$.

(a) Dokažite da je linearan operator $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ zadan s $\phi(X) = AX - XB$ regularan.

(b) Ako matrica $C \in M_n(\mathbb{C})$ komutira s $A + B$ i AB, dokažite da C komutira s A i B.

Zadatak 10. Označimo s M_n^* dualni prostor od M_n, tj. prostor svih linearnih funkcionala $M_n \to \mathbb{F}$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \in M_n$. Dokažite da je ekvivalentno:

(i) $\sum_{i=1}^m A_i X B_i = 0$ za sve $X \in M_n$,

(ii) $\sum_{i=1}^m f(A_i) B_i = 0$ za sve $f \in M_n^*$,

(iii) $\sum_{i=1}^m A_i g(B_i) = 0$ za sve $g \in M_n^*$,

(iv) $\sum_{i=1}^m f(A_i) g(B_i) = 0$ za sve $f, g \in M_n^*$.

Zadatak 11. Neka je $\|\cdot\|$ proizvoljna norma na prostoru M_n. Dokažite da je

$$\|\cdot\|_\pi : \operatorname{End}(M_n) \to \mathbb{R}, \qquad \|\phi\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m \|A_i\| \|B_i\| : \phi(X) = \sum_{i=1}^m A_i X B_i, \forall X \in M_n \right\}$$

norma na prostoru $\operatorname{End}(M_n)$. Dokažite da je preslikavanje $F : \operatorname{End}(M_n) \to \operatorname{End}(M_n)$ koje elementarnom operatoru $\phi(X) = \sum_{i=1}^m A_i X B_i \in \operatorname{End}(M_n)$ pridružuje elementarni operator $F(\phi)(X) = \sum_{i=1}^m B_i X A_i$ dobro definirano, linearno, bijektivno te izometrično s obzirom na gornju normu (tj. vrijedi $\|F(\phi)\|_\pi = \|\phi\|_\pi$ za sve $\phi \in \operatorname{End}(M_n)$).

Zadatak 12. Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \in M_n$. Dokažite da je ekvivalentno:

(i) $\sum_{i=1}^m A_i (XY - YX) B_i = 0$ za sve $X, Y \in M_n$,

(ii) $\sum_{i=1}^m B_i X A_i$ je skalarna matrica za sve $X \in M_n$.

Zadatak 13. Neka su $A, B \in M_n$ te promotrimo linearno preslikavanje $\phi : M_n \to M_n$ zadano s $\phi(X) = AXB$. Dokažite da je $\det \phi = (\det A)^n (\det B)^n$ i $\operatorname{rang} \phi = (\operatorname{rang} A)(\operatorname{rang} B)$.

Zadatak 14. Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \in M_n$ te promotrimo linearno preslikavanje $\phi : M_n \to M_n$ zadano s $\phi(X) = \sum_{i=1}^m A_i X B_i$.

(a) Dokažite da je $\operatorname{Tr} \phi = \sum_{i=1}^m (\operatorname{Tr} A_i)(\operatorname{Tr} B_i)$.

(b) Ako M_n promatramo kao unitarni prostor snabdjeven standardnim skalarnim produktom $\langle X, Y \rangle = \operatorname{Tr}(Y^* X)$, dokažite da je adjungirani operator od ϕ dan formulom

$$\phi^*(X) = \sum_{i=1}^m A_i^* X B_i^*, \qquad \text{za sve } X \in M_n.$$

Zadatak 15. Označimo s $M_n \otimes M_n$ tenzorski produkt algebre M_n same sa sobom. Dokažite da je preslikavanje

$$\phi : M_n \otimes M_n \to \operatorname{End}(M_n), \qquad \phi\left(\sum_{i=1}^m A_i \otimes B_i \right)(X) = \sum_{i=1}^m A_i X B_i^t, \qquad \text{za sve } X \in M_n$$

dobro definiran izomorfizam algebri.

Napomena. Relevantne definicije i alate za ovaj zadatak možete naći ovdje:

- `https://en.wikipedia.org/wiki/Tensor_product`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Tensor_product_of_algebras`