Fakultativni kolegij *Studentska natjecanja iz matematike*, ak. god. 2021./2022.
`http://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/snim_a`

Tema br. 9:

Problem Kaplanskog na matricama

Mateo Tomašević, 27.5.2022.

Neka su A i B algebre (u cijelom predavanju podrazumijevamo da su nad poljem $\mathbb{C}$). Za linearno preslikavanje $\phi : A \to B$ kažemo da je **Jordanov homomorfizam** ako čuva kvadrate, tj. zadovoljava $\phi(a^2) = \phi(a)^2$ za sve $a \in A$. U slučaju $A = B = M_n(\mathbb{C})$, može se pokazati da za svaki Jordanov homomorfizam $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ postoji matrica $T \in M_n(\mathbb{C})^\times$ takva da je

$$\phi(X) = TXT^{-1}, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C})$$

ili

$$\phi(X) = TX^tT^{-1}, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C}).$$

Za algebru A kažemo da je **unitalna** ako posjeduje jedinicu 1_A. Za element $a \in A$ kažemo da je **invertibilan** ako postoji element $b \in A$ takav da $ab = ba = 1_A$. Skup svih invertibilnih elemenata u A označavamo s $A^\times$.

Za proizvoljno preslikavanje $\phi : A \to B$ između unitalnih algebri A i B kažemo da je **unitalno** ako preslikava jedinicu u jedinicu, tj. $\phi(1_A) = 1_B$.

Irving Kaplansky je 1970. u [4] formulirao sljedeći problem:

Problem 1. Neka je $\phi : A \to B$ linearno unitalno preslikavanje između unitalnih algebri A i B koje čuva invertibilnost, tj. zadovoljava $\phi(A^\times) \subseteq B^\times$. Je li ϕ nužno Jordanov homomorfizam?

Već je Kaplansky uočio da je odgovor na ovo pitanje općenito negativan pa je ustvari pitanje koje dodatne uvjete moramo nametnuti na algebre A i B te na preslikavanje ϕ da bismo garantirali pozitivan odgovor. To pitanje i mnoge njegove varijante jednim imenom zovemo **problem Kaplanskog**. U punoj općenitosti je još uvijek riječ o otvorenom problemu.

Po analogiji s matricama, u unitalnoj algebri A definiramo **spektar** elementa $a \in A$ kao

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1_A - a \notin A^\times\}.$$

Za linearno unitalno preslikavanje $\phi : A \to B$ uvjet čuvanja invertibilnosti možemo također iskazati u formi $\phi(\sigma(a)) \subseteq \sigma(a)$ za sve $a \in A$ (kažemo da ϕ "smanjuje spektar"). Zaista, ako ϕ čuva invertibilnost, tada za svaki $a \in A$ imamo

$$\lambda \in \sigma(\phi(a)) \implies \lambda 1_B - \phi(a) \notin B^\times \implies \phi(\lambda 1_A - a) \notin B^\times \implies \lambda 1_A - a \notin A^\times \implies \lambda \in \sigma(a).$$

Obratno (tu nam ne treba unitalnost od ϕ), ako ϕ smanjuje spektar, tada imamo

$$a \in A^\times \implies 0 \notin \sigma(a) \implies 0 \notin \sigma(\phi(a)) \implies \phi(a) \in B^\times.$$

Cilj ovog predavanja je dokazati da Problem 1 ima pozitivan odgovor u slučaju $A = B = M_n(\mathbb{C})$. Štoviše, dokazat ćemo da su i linearna preslikavanja $M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ koja smanjuju spektar (bez pretpostavke unitalnosti) nužno Jordanovi homomorfizmi.

Teorem 1. *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ linearno preslikavanje koje čuva rang. Tada postoje $A, B \in M_n(\mathbb{C})^\times$ takve da je*

$$\phi(X) = AXB, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C})$$

ili

$$\phi(X) = AX^tB, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dokaz. 1. $\phi(I)$ je matrica ranga n i stoga invertibilna matrica. Ako ϕ zamijenimo s preslikavanjem $\phi(\cdot)\phi(I)^{-1}$ koje je također linearno i čuva rang, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $\phi(I) = I$.

2. Pokažimo da ϕ preslikava idempotente u idempotente.

   Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna matrica. Prema Zadatku 1 vrijedi ekvivalencija

   $$A \text{ idempotentna } \iff r(I - A) = n - r(A).$$

   Odavde slijedi da ϕ preslikava idempotente u idempotente. Zaista, ako je P idempotent, vrijedi $r(I-P) = n - r(P)$ pa imamo

   $$r(I - \phi(P)) = r(\phi(I - P)) = r(I - P) = n - r(P) = n - r(\phi(P))$$

   odakle slijedi da je i $\phi(P)$ idempotent.

   Specijalno, ϕ preslikava idempotente ranga 1 u idempotente ranga 1.

3. Označimo s $X \perp Y$ tvrdnju $XY = YX = 0$. Uočimo da ϕ čuva ortogonalnost idempotenata. Zaista, sjetimo se (Zadatak 2) da za idempotente $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi ekvivalencija

   $$P \perp Q \iff P + Q \text{ idempotent.}$$

   Stoga ako je $P \perp Q$, tada su $\phi(P)$ i $\phi(Q)$ idempotenti za koje vrijedi

   $$P + Q \text{ idempotent } \implies \phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q) \text{ idempotent } \implies \phi(P) \perp \phi(Q).$$

   Idempotenti $E_{ii}, 1 \le i \le n$ su međusobno ortogonalni pa isto vrijedi i za $\phi(E_{ii})$. Označimo $\phi(E_{ii}) = x_i y_i^*$ za neke $x_i, y_i \in \mathbb{C}^n$ uz $y_i^* x_i = 1$ (Zadatak 3). Tada je $\{x_1, \dots, x_n\}$ baza za $\mathbb{C}^n$. Zaista, za sve $1 \le i \ne j \le n$ imamo

   $$0 = \phi(E_{jj})\phi(E_{ii}) = (x_j y_j^*)(x_i y_i^*) = x_j \underbrace{(y_j^* x_i)}_{\in \mathbb{C}} y_i^* = (y_j^* x_i)(x_j y_i^*).$$

   Množenjem ove relacije slijeva s y_j^* i zdesna s x_i daje

   $$0 = y_j^* \underbrace{(y_j^* x_i)}_{\in \mathbb{C}}(x_j y_i^*) x_i = (y_j^* x_i) y_j^* (x_j y_i^*) x_i = (y_j^* x_i)(y_j^* x_j)(y_i^* x_i) = y_j^* x_i.$$

   Sada pretpostavimo da su $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ skalari takvi da $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Tada za svaki $1 \le j \le n$ specijalno imamo

   $$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_j^* x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ji} = \alpha_j$$

   pa slijedi linearna nezavisnost skupa $\{x_1, \dots, x_n\}$.

   Definirajmo stoga regularan operator $T \in M_n(\mathbb{C})$ na toj bazi kao $Tx_i = e_i, 1 \le i \le n$. Tada imamo

   $$T\phi(E_{ii})T^{-1} e_k = T x_i y_i^* x_k = \delta_{ik} T x_i = \delta_{ik} e_i$$

   pa je $T\phi(E_{ii})T^{-1} = E_{ii}$. Ako preslikavanje ϕ zamijenimo s $T\phi(\cdot)T^{-1}$ koje opet čuva rang, tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\phi(E_{ii}) = E_{ii}$ za sve $1 \le i \le n$, odnosno da je ϕ identiteta na dijagonalnim matricama.

4. Za $1 \le i \le n$ definiramo $\mathcal{S}_i$ kao skup svih matrica iz $M_n(\mathbb{C})$ koje žive samo u i-tom retku ili i-tom stupcu, tj.

   $$\mathcal{S}_i = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A_{jk} = 0, \forall 1 \le j,k \le n, j \ne i\} \cup \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A_{jk} = 0, \forall 1 \le j,k \le n, k \ne i\}.$$

   Lako se vidi (Zadatak 4) da za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi ekvivalencija

   $$A \in \mathcal{S}_i \iff r(A + \lambda E_{ii}) = 1, \text{ za sve } \lambda \in \mathbb{C}.$$

   Uočimo da odavde slijedi $\phi(\mathcal{S}_i) \subseteq \mathcal{S}_i$ za svaki $1 \le i \le n$. Zaista, ako je $A \in \mathcal{S}_i$, tada imamo

   $$r(\phi(A) + \lambda E_{ii}) = r(\phi(A + \lambda E_{ii})) = r(A + \lambda E_{ii}) = 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

   pa je i $\phi(A) \in \mathcal{S}_i$.

   Za $1 \le i \ne j \le n$ imamo $E_{ij} \in \mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j$ pa je i $\phi(E_{ij}) \in \mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j$. Ako $\phi(E_{ij})$ živi u i-tom retku, tada živi u j-tom stupcu pa mora biti $\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij} E_{ij}$ za neki $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}^\times$ (ne može biti $\alpha_{ij} = 0$ jer ϕ čuva rang). Ako pak $\phi(E_{ij})$ živi u i-tom stupcu, tada živi u j-tom retku pa mora biti $\phi(E_{ij}) = \beta_{ij} E_{ji}$ za neki $\beta_{ij} \in \mathbb{C}^\times$.

5. Sada tvrdimo da se ϕ jednako ponaša na svim E_{ij}: ili čuva indekse ili okreće indekse. Prvo uočimo da ta tvrdnja vrijedi u svakom pojedinom retku. Zaista, pretpostavimo da su i, j, k različiti indeksi takvi da je $\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij} E_{ij}$ te $\phi(E_{ik}) = \beta_{ik} E_{ki}$. Tada imamo

$$\phi(\underbrace{E_{ij} + E_{ik}}_{\text{ranga 1}}) = \phi(E_{ij}) + \phi(E_{ik}) = \underbrace{\alpha_{ij} E_{ij} + \beta_{ik} E_{ki}}_{\text{ranga 2}}$$

što je kontradikcija jer ϕ čuva rang. Analogno se pokazuje da se ϕ jednako ponaša na svim E_{ij} koji žive u svakom pojedinom stupcu. Slijedi da je

$$\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij} E_{ij}, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{C}^\times, \quad 1 \le i, j \le n$$

ili

$$\phi(E_{ij}) = \beta_{ij} E_{ji}, \quad \beta_{ij} \in \mathbb{C}^\times, \quad 1 \le i, j \le n.$$

Po potrebi možemo ϕ zamijeniti preslikavanjem $\phi(\cdot)^t$ koje opet čuva rang pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da smo u prvom slučaju. Tada je

$$\phi\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ranga 1}}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{ranga 1}}$$

te na dijagonali imamo $\alpha_{ii} = 1$ za sve $1 \le i \le n$. Za sve indekse i, j, k stoga imamo

$$\frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{jk}} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{jj}} = \alpha_{ij} \implies \alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}.$$

Sada uočimo da je

$$\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_{11}}, \dots, \frac{1}{\alpha_{1n}}\right) E_{ij} \operatorname{diag}(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}) = \alpha_{ij} E_{ij}$$

pa po linearnosti slijedi da za svaki $X \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi

$$\phi(X) = \operatorname{diag}(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})^{-1} X \operatorname{diag}(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})$$

čime je tražena tvrdnja dokazana.

$\square$

Teorem 2 (Frobenius, [2])**.** *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ linearno preslikavanje koje čuva determinantu. Tada postoje $A, B \in M_n(\mathbb{C})^\times$ sa svojstvom $\det(AB) = 1$ takve da je*

$$\phi(X) = AXB, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C})$$

ili

$$\phi(X) = AX^tB, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dokaz. 1. Pokažimo prvo da je ϕ bijekcija. U suprotnom, zbog linearnosti ϕ nije ni injekcija pa postoji $A \in M_n(\mathbb{C}), A \ne 0$ takav da $\phi(A) = 0$. Specijalno, tada za rang vrijedi $r = r(A) > 0$ pa postoje regularne matrice $S, T \in M_n(\mathbb{C})^\times$ takve da je $A = SD_rT$ gdje je $D_r = I_r \oplus 0_{n-r}$ kanonska matrica ranga r.

Označimo $B = S(I - D_r)T$. Tada je $A + B = ST$ pa je

$$\det B = \det \phi(B) = \det(\underbrace{\phi(A)}_{=0} + \phi(B)) = \det \phi(A + B) = \det(A + B) = \det(ST) \ne 0$$

što je kontradikcija jer je $r \ge 1$. Dakle, ϕ je zaista bijekcija.

2. Pokažimo da ϕ čuva rang. Fiksirajmo $1 \leq r \leq n$ te neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna matrica ranga r. Označimo $l := r(\phi(A))$. Zbog $A \neq 0$ imamo i $\phi(A) \neq 0$ pa specijalno $l \geq 1$. Odaberimo regularne matrice $S, T, U, V \in M_n(\mathbb{C})^\times$ takve da $A = SD_rT$ i $\phi(A) = UD_lV$. Zbog surjektivnosti postoji matrica $B \in M_n(\mathbb{C})$ takva da je $\phi(B) = UV$.

   Tada vrijedi sljedeća jednakost polinoma u varijabli x:

$$\begin{aligned}\det(ST)\underbrace{\det(S^{-1}BT^{-1} + xD_r)}_{\text{polinom stupnja } \leq r} &= \det(B + xSD_rT) = \det(B + xA) \\ &= \det(\phi(B) + x\phi(A)) = \det(UV + xUD_lV) = \det(UV)\det(I + xD_l) \\ &= \det(UV)(1 + x)^l\end{aligned}$$

   odakle slijedi $l \leq r$. Dakle, preslikavanje ϕ smanjuje rang, tj. za svaki $X \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi $r(\phi(X)) \leq r(X)$. Primjenog dobivenog rezultata na preslikavanje ϕ^{-1} koje je također linearno i čuva determinantu, slijedi da ϕ čuva rang.

3. Sada Teorem 1 daje rezultat.

$\square$

Teorem 3 (Marcus, Moyls, [5, Lemma 10])**.** *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ linearno preslikavanje koje čuva karakteristični polinom. Tada postoji $A \in M_n(\mathbb{C})^\times$ takva da je*

$$\phi(X) = AXA^{-1}, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C})$$

ili

$$\phi(X) = AX^tA^{-1}, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dokaz. Očito ϕ čuva determinantu pa možemo primijeniti Teorem 2. Preostaje pokazati da za dobivene matrice $A, B \in M_n(\mathbb{C})^\times$ vrijedi $AB = I$, tj. da $\phi(I) = I$.

Evidentno je $\sigma(\phi(I)) = \sigma(I) = \{1\}$ te označimo $C := \phi(I)^{-1}$. Za svaku $X \in M_n(\mathbb{C})$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ imamo

$$\begin{aligned}k_{\phi(X)}(\lambda) &= k_X(\lambda) \\ &= \det(\lambda I - X) \\ &= \det\phi(\lambda I - X) \\ &= \det(\lambda\phi(I) - \phi(X)) \\ &= \det\phi(I)\det(\lambda I - \phi(I)^{-1}\phi(X)) \\ &= \det(\lambda I - C\phi(X)) \\ &= k_{C\phi(X)}(\lambda).\end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$k_{\phi(X)} = k_{C\phi(X)}, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C}).$$

Budući da je ϕ surjekcija, možemo pisati

$$k_X = k_{CX}, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C}).$$

Neka je sada $C = PU$ polarna dekompozicija, gdje su $P > 0$, $U \in U_n$. Tada imamo

$$k_{U^*} = k_{CU^*} = k_P$$

odakle slijedi da je $\sigma(U^*) \subseteq \langle 0, +\infty\rangle \cap \mathbb{S}^1 = \{1\}$ pa je $U^* = I$ i stoga $C = P > 0$. Iz činjenice $\sigma(C) = \{1\}$, slijedi $C = I$ i stoga $\phi(I) = I$, čime je teorem dokazan. $\square$

Teorem 4. *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ linearno preslikavanje koje čuva spektar. Tada postoji $A \in M_n(\mathbb{C})^\times$ takva da je*

$$\phi(X) = AXA^{-1}, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C})$$

ili

$$\phi(X) = AX^tA^{-1}, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dokaz. Zbog linearnosti je ϕ neprekidno preslikavanje. Stoga, (Zadatak 5) ϕ čuva karakteristični polinom pa prema Teoremu 3 dobivamo da je ϕ traženog oblika. $\square$

Teorem 5 (Marcus, Purves, [6, Theorem 2.1])**.** *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ linearno preslikavanje koje čuva invertibilnost. Tada postoje $A, B \in M_n(\mathbb{C})^\times$ takve da je*

$$\phi(X) = AXB, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C})$$

ili

$$\phi(X) = AX^tB, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dokaz.

1. $\phi(I)$ je invertibilna matrica pa ϕ zamijenimo s preslikavanjem $\phi(\cdot)\phi(I)^{-1}$ koje je također linearno i čuva invertibilnost. Možemo stoga bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je ϕ unitalno preslikavanje.

2. Kao u uvodu zaključujemo da ϕ smanjuje spektar. Zaista, za svaku $A \in M_n(\mathbb{C})$ imamo

   $$\lambda \in \sigma(\phi(A)) \implies \lambda I - \phi(A) \notin M_n(\mathbb{C})^\times \implies \phi(\lambda I - A) \notin M_n(\mathbb{C})^\times \implies \lambda I - A \notin M_n(\mathbb{C})^\times \implies \lambda \in \sigma(A).$$

3. Tvrdimo da je ϕ bijekcija. Zaista, u suprotnom ϕ nije injekcija pa postoji $A \in M_n(\mathbb{C}), A \neq 0$ takva da je $\phi(A) = 0$. Prema Zadatku 7 odaberimo matricu $Z \in M_n(\mathbb{C})$ takvu da $\sigma(A+Z) \cap \sigma(Z) = \emptyset$.

   Imamo

   $$\phi(A+Z) = \phi(A) + \phi(Z) = \phi(Z)$$

   pa je

   $$\sigma(\phi(Z)) = \sigma(\phi(A+Z)) \cap \sigma(\phi(Z)) \subseteq \sigma(A+Z) \cap \sigma(Z) = \emptyset$$

   što je kontradikcija. Dakle, ϕ je bijekcija.

4. Ako je $X \in M_n(\mathbb{C})$ matrica takva da $\phi(X)$ ima n različitih svojstvenih vrijednosti, tada vrijedi $k_{\phi(X)} = k_X$. Uočimo stoga da preslikavanje ϕ^{-1} čuva karakteristični polinom na gustom skupu matrica s n različitih svojstvenih vrijednosti (usp. Zadatak 5). Dakle, neprekidne funkcije $M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_{\leq n}[x]$ dane s $X \mapsto k_{\phi^{-1}(X)}$ i $X \mapsto k_X$ se podudaraju na gustom skupu pa su i jednake. Zaključujemo da ϕ^{-1} čuva karakteristični polinom pa ga čuva i ϕ.

5. Sada primijenimo Teorem 3.

$\square$

Teorem 6 (Dieudonné, [3])**.** *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ linearno preslikavanje koje smanjuje spektar. Tada postoji $A \in M_n(\mathbb{C})^\times$ takva da je*

$$\phi(X) = AXA^{-1}, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C})$$

ili

$$\phi(X) = AX^tA^{-1}, \quad \forall X \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dokaz. ϕ čuva invertibilnost pa prema Teoremu 5 možemo pretpostaviti da je $\phi(X) = AXB, \forall X \in M_n(\mathbb{C})$ za neke $A, B \in M_n(\mathbb{C})^\times$ (u suprotnom prijeđemo na $\phi(\cdot)^t$). Preostaje pokazati da je $AB = I$.

Rastavimo A na stupce, a B na retke:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_1^t \\ \vdots \\ B_n^t \end{bmatrix}.$$

Tada za sve $1 \leq i, j \leq n$ imamo

$$\phi(E_{ij}) = AE_{ij}B = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0^t \\ \vdots \\ e_j^t \\ \vdots \\ 0^t \end{bmatrix}}_{\text{na } i\text{-tom mjestu}} B = (A_i e_j^t)B = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & A_i & \cdots 0 \end{bmatrix}}_{\text{na } j\text{-tom mjestu}} \begin{bmatrix} B_1^t \\ \vdots \\ B_n^t \end{bmatrix} = A_i B_j^t.$$

Za sve $1 \leq i \neq j \leq n$ matrica $\phi(E_{ij}) = AE_{ij}B$ ima rang 1 te spektar sadržan u $\{0\}$. Slijedi da je

$$0 = (AE_{ij}B)^2 = (AE_{ij}B)(AE_{ij}B) = (A_iB_j^t)(A_iB_j^t) = A_i \underbrace{(B_j^tA_i)}_{\in\mathbb{C}} B_j^t = (B_j^tA_i)A_iB_j^t$$

pa je $B_j^tA_i = 0$ ili $A_iB_j^t = 0$. U drugom slučaju je

$$0 = \mathrm{Tr}(A_iB_j^t) = \mathrm{Tr}(B_j^tA_i) = B_j^tA_i$$

pa $B_j^tA_i = 0$ vrijedi u svakom slučaju.

Sada imamo

$$BA = \begin{bmatrix} B_1^t \\ \vdots \\ B_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix} = [B_i^tA_j]_{1\leq i,j\leq n} = \mathrm{diag}(B_i^tA_i)_{1\leq i\leq n}$$

odakle slijedi $B_i^tA_i \neq 0$ za sve $1 \leq i \leq n$ jer je BA regularna matrica.

Za svaki $1 \leq i \leq n$ matrica $\phi(E_{ii}) = AE_{ii}B$ ima rang 1 te spektar sadržan u $\{0, 1\}$.

$$(AE_{ii}B)^2 = (AE_{ii}B)(AE_{ii}B) = (A_iB_i^t)(A_iB_i^t) = A_i \underbrace{(B_i^tA_i)}_{\in\mathbb{C}} B_i^t = (B_i^tA_i)A_iB_i^t.$$

Imamo $A_iB_i^t \neq 0$ jer u suprotnom bismo imali $B_i^tA_i = \mathrm{Tr}(A_iB_i^t) = 0$, što smo vidjeli da nije istina. Slijedi da je $AE_{ii}B$ idempotent ranga 1 pa je

$$A_iB_i^t = AE_{ii}B = (AE_{ii}B)^2 = (B_i^tA_i)A_iB_i^t$$

odakle slijedi $B_i^tA_i = 1$.

Dakle, imamo

$$BA = \mathrm{diag}(B_i^tA_i)_{1\leq i\leq n} = I$$

čime je dokaz završen. □

1 Zadaci

Za uspješno rješavanje zadaće potrebno je riješiti barem 5 zadataka:

Zadatak 1. Dokažite da za proizvoljnu matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi $A^2 = A$ ako i samo ako je $r(I - A) = n - r(A)$.

Zadatak 2. Neka su $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$ idempotenti. Dokažite da je i $P + Q$ idempotent ako i samo ako je $P \perp Q$.

Zadatak 3. Dokažite da je matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ ranga jedan ako i samo ako postoje nenul vektori $x, y \in \mathbb{C}^n$ takvi da je $A = xy^*$. Štoviše, dokažite da je A i idempotent ako i samo ako za neki (odnosno svaki) takav prikaz vrijedi $y^*x = 1$.

Zadatak 4. Uz oznake iz Teorema 1, pokažite da za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi

$$A \in \mathcal{S}_i \iff r(A + \lambda E_{ii}) = 1, \text{ za sve } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Zadatak 5. Pretpostavimo da je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ neprekidno preslikavanje koje čuva spektar. Dokažite da ϕ čuva karakteristični polinom.

Uputa: ϕ očito čuva karakteristični polinom na skupu svih matrica koje imaju n različith svojstvenih vrijednosti, a takav skup je gust u $M_n(\mathbb{C})$. Sada primijetite da je preslikavanje $k_\cdot : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_{\leq n}[x]$ koje matrici pridružuje njen karakteristični polinom neprekidno.

Zadatak 6. Pokažite da su za $n \geq 2$ dvije klase preslikavanja iz iskaza Teorema 1 disjunktne, tj. da za sljedeće podskupove od $\mathrm{End}(M_n(\mathbb{C}))$ vrijedi

$$\{X \mapsto AXB : A, B \in M_n(\mathbb{C})^\times\} \cap \{X \mapsto AX^tB : A, B \in M_n(\mathbb{C})^\times\} = \emptyset.$$

Zadatak 7. Dokažite da za svaku nenul matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ postoji matrica $Z \in M_n(\mathbb{C})$ takva da $\sigma(A+Z) \cap \sigma(Z) = \emptyset$.

Zadatak 8. Neka je $\phi : M_3(\mathbb{C}) \to M_3(\mathbb{C})$ linearno preslikavanje zadano formulom

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_{11}+x_{12}-x_{13}-x_{21}-x_{22}+x_{23} & x_{12}-x_{22} & x_{12}+x_{13}-x_{22}-x_{23} \\ x_{21}+x_{22}-x_{23}+x_{31}+x_{32}-x_{33} & x_{22}+x_{32} & x_{22}+x_{23}+x_{32}+x_{33} \\ -x_{11}-x_{12}+x_{13} & -x_{12} & -x_{12}-x_{13} \end{bmatrix}.$$

Ispitajte čuva li ϕ rang, determinantu i spektar.

Zadatak 9. Pokažite da tvrdnja Teorema 5 općenito ne vrijedi za preslikavanja $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$.

Zadatak 10. Pretpostavimo da za matrice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi $AX = XB$ za sve $X \in M_n(\mathbb{C})$. Dokažite da postoji skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da $A = B = \alpha I$.

Zadatak 11. Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ preslikavanje oblika $\phi(X) = AXB$ za neke $A, B \in M_n(\mathbb{C})^\times$. Pretpostavimo da ϕ preslikava hermitske matrice u hermitske matrice. Dokažite da je $A = \alpha B^*$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}^\times$.

Zadatak 12. Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ preslikavanje oblika $\phi(X) = AXB$ za neke $A, B \in M_n(\mathbb{C})^\times$. Pretpostavimo da ϕ čuva trag. Dokažite da je ϕ unitalno preslikavanje.

Zadatak 13. Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ preslikavanje oblika $\phi(X) = AXB$ za neke $A, B \in M_n(\mathbb{C})^\times$. Pretpostavimo da ϕ preslikava unitarne matrice u unitarne matrice. Dokažite da postoje unitarne matrice $U, V \in U_n$ takve da $\phi(X) = UXV$ za sve $X \in M_n(\mathbb{C})$.

Literatura

[1] B. Aupetit, *Spectrum-Preserving Linear Mappings between Banach Algebras or Jordan-Banach Algebras*, J. London Math. Soc. **62**(3) (2000), 917-–924.

[2] G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch Linear Substitutionen*, Sitzungsber, Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1897) 994–1015.

[3] J. Dieudonné, *Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables*, Arch. Math. (Basel) 1 (1949) 282–287.

[4] I. Kaplansky, *Algebraic and analytic aspects of operator algebras*, Amer. Math. Soc. (1970), Providence.

[5] M. Marcus, B. N. Moyls, *Linear Transformations on Algebras of Matrices*, Canad. J. Math. 11 (1959), 61-66

[6] M. Marcus, R. Purves, *Linear transformations on algebras of matrices: the invariance of the elementary symmetric functions*, Canad. J. Math. 11 (1959) 383–396.

[7] C. K. Li, S. Pierce, *Linear Preserver Problems*, Amer. Math. Monthly **108**(7), 2001.