Studentska natjecanja 2021.

Parcijalne diferencijalne jednadžbe i nižedimenzionalni modeli u elastičnosti

18.6.2021.
Matko Ljulj
mail: `mljulj @ math . hr`

Uvod

Ovo predavanje više je popularno-znanstveno nego korisno za natjecanja. Pokušaj je približavanja mojeg znanstvenog područja zainteresiranima na nižim godinama studija matematike, iako se većina što će ovdje biti spomenuto radi na diplomskom studiju. Počinjemo s parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, koje su u neku ruku generalizacija običnih diferencijalnih jednadžbi (jednadžbe u kojima se traži funkcija koja zadovoljava uvjete u kojima se pojavljuju njene parcijalne derivacije), a ključne su za bilo kakvo modeliranje stvari iz prirode. Jednadžbe mehanike (poput fluida ili elastičnost) su nezamislive bez njih. Nakon toga prelazimo na teoriju elastičnosti (ne mislim ovdje na srednjoškolske opruge) te njene nižedimenzionalne modele.

Kao što je najavljeno, materija će biti prilagođena najviše naprednim studentima druge godine, iako će naravno studentima treće biti lakše pratiti, dok ću pokušati da i studenti prve godine nemaju problema s gradivom.

1 Parcijalne diferencijalne jednadžbe

1.1 Motivacija

Neka je $\Omega = [0,1]^2$, te označimo s $u(x,y)$ temperaturu u točki $(x,y) \in \Omega$. Pretpostavimo i da je po rubu domene (oznaka: $\partial\Omega$) neka točno zadana temperatura u_0. Zanima nas distribucija unutar domene.

Na nekoj diskretnoj razini, možemo razmišljati ovako: "čestice" unutar kvadrata poredane su u kvadratnu mrežu, u kojoj svaka osim rubnih imaju točno 4 susjeda (gore, dolje, lijevo i desno). Tada, kako bi se izravnao utjecaj susjeda, u ravnoteži je temperatura u točki (x_1, x_2) jednaka aritmetičkoj sredini temperatura svojih susjeda. Ako je $h > 0$ mali broj koji označava razmak između dva susjeda, možemo pisati ovako:

$$\begin{aligned}
&u(x,y) = \frac{1}{4}\left(u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h)\right)\\
&\frac{4u(x,y) - u(x+h,y) - u(x-h,y) - u(x,y+h) - u(x,y-h)}{4} = 0.\\
&\frac{2u(x,y) - u(x+h,y) - u(x-h,y)}{4} + \frac{2u(x,y) - u(x,y+h) - u(x,y-h)}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Dijeleći s h^2 i puštajući $h \to 0$ (kao da uzimamo sve više i više čestica u obzir, i da su one međusobne sve bliže i bliže) dobivamo

$$-(\partial_{x,x}u + \partial_{y,y}u) = 0.$$

Operator koji funkciji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pridruži $\partial_{x_1,x_1} f + \ldots + \partial_{x_n,x_n} f$ zovemo **Laplaceov operator**, i označavamo ga s Δ. Zato posljednju jednadžbu možemo pisati i kao

$$-\Delta u = 0.$$

Ova jednadžba zove se **Laplaceova jednadžba**. Minus s lijeve strane jasno možemo i maknuti, ali nećemo. Zajedno s rubnim uvjetom imamo **rubnu zadaću**

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{u } \Omega,\\ u = u_0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

koja ima jedinstveno rješenje. Odgovarajuća jednadžba koja s desne strane ima neku fiksnu funkciju f, tj.

$$-\Delta u = f$$

naziva se **Poissonova jednadžba**. Objašnjenje u našem slučaju bi bilo da u svakoj točki iz Ω još dodatno ili hladimo ili grijemo temperaturom ulažući pozitivnu ili negativnu energiju $f(x,y)$.

Poissonova i Laplaceova jednadžba jedne su od najjednostavnijih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

1.2 Varijacijska formulacija

Neka je za daljnju analizu rubni uvjet u_0 jednak nuli (pretpostavljamo da je Ω na rubu temperature nula, a "zanimljivost" dolazi od člana f). Dakle, imamo zadaću

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{u } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Primijetite da bi funkcija u bila rješenje ovog problema, nužno mora biti dvaput derivabilna, a najčešće se još dodatno gleda i da je ta druga derivacija neprekidna.

Dakle, neka je $u \in C^2(\Omega)$. Uzmimo proizvoljnu funkciju $v \in C^1(\Omega)$ koja je jednaka nuli na rubu Ω, pomnožimo prvu jednadžbu iz rubne zadaće i integrirajmo. Dobivamo

$$-\int_\Omega v\Delta u dxdy = \int_\Omega f v dxdy.$$

Izvedimo parcijalnu integraciju s lijeve strane. Za studente koji su položili *INTRAF* ovo je zapravo vježba primjene Greenovog teorema, a za mlađe ćemo objasniti jednostavnijim alatima. Kao prvo, integral po kvadratu zapravo su dva jednostruka integrala po $[0,1]$. Zato imamo

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega v\Delta u dxdy &= -\int_0^1\int_0^1 v(x,y)(\partial_{x,x}u + \partial_{y,y}u(x,y))dxdy \\
&= -\int_0^1\int_0^1 v(x,y)\partial_{x,x}u(x,y)dxdy - \int_0^1\int_0^1 v(x,y)\partial_{y,y}u(x,y)dxdy \\
&= \int_0^1\int_0^1 \partial_x v(x,y)\partial_x u(x,y)dxdy + \int_0^1\int_0^1 \partial_y v(x,y)\partial_y u(x,y)dxdy \\
&\quad - \left(\int_0^1 v(1,y)\partial_x u(1,y)dy - \int_0^1 v(0,y)\partial_x u(0,y)dy + \int_0^1 v(x,1)\partial_x u(x,1)dx - \int_0^1 v(x,0)\partial_x u(x,0)dx\right),
\end{aligned}$$

gdje smo na kraju primijenili parcijalnu integraciju na svakom od dva integrala po jednoj od varijabli x i y, uzimajući drugu kao parametar. Zadnja četiri rubna člana iz parcijalne integracije su nula jer je v tako odabrana. Zato se rubna zadaća transformira u jednadžbu

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dxdy = \int f v \; dxdy. \tag{2}$$

Gornja jednadžba naziva se **varijacijska formulacija** diferencijalne jednadžbe. Riječ "varijacijska" dolazi iz toga što funkciju $v \in C^1(\Omega)$ (uz $v = 0$ na $\partial\Omega$) možemo varirati. Naime, sada smo vidjeli da ako je u rješenje diferencijalne formulacije rubne zadaće (1), da je tada i rješenje (2), tj. rješenje je problema:

Naći $u \in C^1(\Omega)$ (uz $u = 0$ na $\partial\Omega$) takav da za svaki $v \in C^1(\Omega)$ (uz $v = 0$ na $\partial\Omega$) vrijedi (2).

Prirodno je pitanje vrijedi li i obrat. Odgovor je potvrdan.

Teorem 1. *Neka $u \in C^2(\Omega)$ zadovoljava rubnu zadaću u diferencijalnoj formulaciji (1). Tada zadovoljava i rubnu zadaću i u varijacijskoj formulaciji – to je jedinstveno rješenje koje za svaku $v \in C^1(\Omega)$ uz $v = 0$ na $\partial\Omega$ zadovoljava (2).*

Obratno, neka je $u \in C^2(\Omega)$ funkcija koja zadovoljava rubnu zadaću u varijacijskoj formulaciji (2). Tada je ona rješenje rubne zadaće u diferencijalnoj formulaciji (1).

Za dokaz je ključan sljedeći rezultat.

Teorem 2 (Osnovna lema varijacijskog računa). *Neka je $u \in C(\Omega)$. Ako za svaku funkciju $v \in C^\infty(\Omega)$ uz $v = 0$ na $\partial\Omega$ vrijedi $\int\limits_\Omega uv = 0$, tada je $u = 0$.*

DZ 1. *Riješite sljedeće podzadatke:*

a) *Dokažite drugi smjer Teorema 1 koristeći osnovnu lemu varijacijskog računa.*

b) *Dokažite lakšu verziju osnovne leme varijacijskog računa: ako za $u \in C([0,1])$ vrijedi da za svaku $v \in C([0,1])$ uz $v(0) = v(1) = 0$ vrijedi $\int uvdx = 0$, tada je nužno $u = 0$. Uputa: Neka je u nekoj točki u pozitivna. Tada je i pozitivna i na maloj okolini. Nađite v koja će to kazniti, jer će van te male okoline biti nula, a u okolini pozitivna.*

c) *Generalizirajte gornji dokaz za $v \in C^1([0,1])$ (nađite primjer funkcija s koje su nula na $[0,1] \setminus \langle a,b \rangle$, dok su na $\langle a,b \rangle$ pozitivne).*

d) *Generalizirajte gornji dokaz za $v \in C^\infty([0,1])$ (nađite još glađi primjer takvih funkcija). Uputa: Sjetite se primjera funkcije kojoj su sve derivacije u nuli jednake nuli, a da nije identički jednaka nuli.*

Nadalje ćemo se više baviti varijacijskom formulacijom nego diferencijalnom formulacijom. Jedan od ključnih razloga je, koliko god se zasada činio banalnim, zato što nam varijacijska formulacija traži manju glatkoću rješenja. Da bi funkcija zadovoljila varijacijsku formulaciju treba biti samo C^1, ne treba imati drugu derivaciju.

Poopćimo predmet našeg promatranja u nekoliko smjerova. Kao prvo, cijelo vrijeme nam je domena jedinični kvadrat. Skup Ω može biti bilo koji zatvoreni i ograničen (kompaktan) skup kojem se rub (barem po konačno mnogo dijelova) može parametrizirati funkcijama klase C^1. Kao drugo, možemo tražiti da rubni uvjet nije zadovoljen duž cijelog ruba domene $\partial\Omega$, nego samo na nekom njegovom dijelu pozitivne duljine. Pa, neka je tako, i označimo taj dio ruba s Γ_D ("D" dolazi od oznake za **Dirichletov rubni uvjet**). Na djelu ruba na kojem nema uvjeta $\Gamma_N := \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ implicitno je zadan **Neumannov uvjet**: tzv. fluks temperature između ruba i okoline. U ovom slučaju on je nula, što znači da na tom dijelu sustav niti ne prima niti ne gubi toplinu. Treće, u integral možemo ubaciti i neku kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ reda 2, kojom možemo regulirati da se u domeni iz nekog razloga temperatura ne propagira na jednak način u svim smjerovima. Dapače, teoretski ta matrica može imati drugačiju vrijednost u svakoj točki domene. Ako ne želimo komplicirati, "normalno ponašanje" dobit ćemo ako za vrijednost te matrice uzmemo identitetu.

Generaliziramo do sljedeće rubne zadaće: treba naći $u \in V$,

$$V := \left\{ u \in C^1(\Omega) \ : \ u = 0 \text{ na } \Gamma_D \right\}$$

takav da za sve $v \in V$ vrijedi

$$\int\limits_\Omega (\mathbf{A}\nabla u) \cdot \nabla v \; dxdy = \int f v \; dxdy.$$

Primijetite da je skup u kojem tražimo rješenje u isti kao skup u kojem tražimo tzv. **testne funkcije** v, što daje neku dodatnu dozu simetrije.

Ovo je općenita **linearna eliptička jednadžba drugog reda**. Linearna je jer je njena odgovarajuća diferencijalna formulacija dana kao linearna kombinacija njenih parcijalnih derivacija (skalari mogu biti i poznate funkcije po (x, y)); drugog je reda jer je njena odgovarajuća diferencijalna formulacija drugog reda. Eliptička je, ukratko, jer Laplaceov operator

$$\Delta = \partial_{x,x} + \partial_{y,y}$$

podsjeća na jednadžbu kružnice ($x^2 + y^2 = 1$). Postoje i parabolička jednadžba ($\partial_t u - \partial_{x,x} u = f$) i hiperbolička ($\partial_{t,t} u - \partial_{x,x} u = f$). Umjesto y u tim jednadžbama pišemo t jer ta varijabla ima ulogu vremenske varijable, i te jednadžbe se primjenjuju u problemima koji modeliraju promjenu mehanike u vremenu.

Postoje i jednadžbe prvog reda, one bi općenito u dvije varijable bile

$$a(x,y)\partial_x u + b(x,y)\partial_y u = c(x,y).$$

DZ 2. *Riješite sljedeće podzadatke:*

a) Promotrimo homogenu linearnu PDJ prvog reda s konstantnim koeficijentima: $a\partial_x u + b\partial_y u = 0$ (uz $a \neq 0$, $b \neq 0$). Ako je $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ rješenje te jednadžbe, dokažite da postoji funkcija jedne varijable $f \in C^1(\mathbb{R})$ takva da je

$$u(x, y) = f(bx - ay).$$

Uputa: Izrazite u pomoću nekih drugih varijabli, tako da je jednadžba zapravo derivacija u smjeru jedne od tih varijabli.

b) Promotrimo najjednostavniju hiperboličku jednadžbu $\partial_{t,t} u - \partial_{x,x} u = 0$ na domeni $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Ako je $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ rješenje te jednadžbe, dokažite da postoje funkcije jedne varijable $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ takve da je

$$u(t, x) = f(x - t) + g(x + t).$$

Pored linearnih PDJ postoje i nelinearne PDJ. Teorija za linearne PDJ je već dovoljno komplicirana sama za sebe, dok (nažalost) nelinearne češće bolje modeliraju pojave iz prirode. Ipak, linearne PDJ tada su korisne jer linearizacijom nelinearnih jednadžbi možemo dobiti neka svojstva, ili čak i numerički riješiti nelinearnu (spajajući uzastopne aproksimacije linearizacija jednadžbi, slično kao kako biste numerički integrirali "ružnu" funkciju).

Nadalje promatramo samo eliptičke jednadžbe drugog reda, te radi jednostavnosti, matrica $\mathbf{A}$ je simetrična i konstanta na domeni Ω.

1.3 Numerički pristup

Prednost varijacijske formulacije je i u numeričkom rješavanju PDJ. Parcijalne diferencijalne jednadžbe općenito nemaju zatvorene formule, ili su one komplicirane (preko integralnih operatora). S druge strane, kako su jako raširene i primjenjive u inženjerstvu, potreba za njihovom učinkovitom numeričkom aproksimacijom je jasna.

Objasnimo najraširenju metodu: **metoda konačnih elemenata** (eng. finite element method). Radi jednostavnosti, gledajmo slučaj u 1D: $\Omega = [0, 1]$ (iako se tehnički više ne radi o PDJ, nego o ODJ). Tada i $\mathbf{A}$ postaje skalar, koji ćemo označiti s a.

Budući da varijacijsku zadaću ne možemo riješiti na beskonačnodimenzionalnim prostorima, aproksimiramo dovoljno "gustim" konačnodimenzionalnim prostorom. Dakle, umjesto prostora V imat ćemo prostor V_h ($h > 0$ je oznaka za mali parametar – što je manji, to je aproksimacija bolja). Tražit ćemo $u_h \in V_h$ takav da za sve $v_h \in V_h$ vrijedi

$$\int_\Omega (a\nabla u_h) \cdot \nabla v_h \, dx = \int_\Omega f v_h \, dx,$$

$$\implies a \int_0^1 u_h' \, v_h' \, dx = \int_0^1 f v_h \, dx.$$

Neka je $\phi_1, \dots, \phi_N$ baza prostora V_h. Da bi gornja jednakost vrijedila za sve $v_h \in V_h$, po linearnosti je dovoljno da vrijedi za sve vektore baze. Zato, ako je

$$u_h = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi_i,$$

tada za svaki $j = 1, \dots, N$ možemo pisati

$$a \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \phi_i \right)' \phi_j' \, dx = \int_0^1 f \phi_j \, dx$$

$$\implies \sum_{i=1}^N \lambda_i a \left(\int_0^1 \phi_i' \phi_j' dx \right) = \int_0^1 f \phi_j dx.$$

Primijetimo da su u gornjoj jednadžbi samo λ_i, $i = 1, \cdots, N$, nepoznanice, sve je ostalo poznato.

Definirajmo kvadratnu matricu $\mathbf{K} \in \mathbb{M}_N$, $K_{i,j} = a \int_0^1 \phi_i' \phi_j' dx$, te vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$, $R_j = \int_0^1 f \phi_j dx$. Primijetite da $\mathbf{K}$ i $\mathbf{b}$ ovise o bazi vektorskog prostora i poznatim vrijednostima iz naše PDJ (a i f). Dapače, ako je a

konstanta, $\mathbf{K}$ se može eksplicitno izračunati (kada je baza poznata). Inače, kao i vektor $\mathbf{b}$, najčešće je potrebno primijeniti neku numeričku metodu za račun integrala. Matrica $\mathbf{K}$ naziva se **matrica krutosti**.

Na ovaj način možemo pisati

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{b},$$

gdje su $\mathbf{x} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ ključne nepoznanice. Ako odredimo $\mathbf{x}$, odredili smo i numeričku aproksimaciju našeg rješenja. Ako su određeni uvjeti zadovoljeni (o kojima ćemo pričati u nastavku), ovaj $N \times N$ sustav kao i početna zadaća ima jedinstveno rješenje, za svaki odabir baze za prostor $V_h \leqslant V$. Preostalo je odabrati bazu.

Možda vam prvo na pamet padne baza polinoma $\{1, x, x^2, \ldots, x^{N-1}\}$. No, koliko god ti polinomi imaju dobra analitička svojstva (mnogo je rezultata oblika da se funkcije i/ili rješenja jednadžbi sve bolje aproksimiraju polinomima kako stupanj polinoma raste), imaju neka loša numerička svojstva. Nećemo ulaziti dublje u njihove probleme, nego ćemo pokazati jednu bazu koja je bolja.

Kod numeričkog rješavanja očekujemo da je N velik prirodan broj, što znači da se bavimo velikim sustavom. Dapače, treba i pamtiti mnogo podataka (u najgorem slučaju N^2 elemenata matrice $\mathbf{K}$). Zanimljivo je zapravo da iako je rješavanje linearnog sustava velik zadatak, u računalu traje usporedivo dugo kao i asembliranje matrice $\mathbf{K}$. Cilj je, zato, smanjiti broj elemenata u matrici $\mathbf{K}$.

Gledajući kako izgledaju članovi matrice $\mathbf{K}$ primijećujemo da je jedan način kako smanjiti broj njenih netrivijalnih elemenata tako da su elementi baze na što većem intervalu identički jednaki nula. Promotrimo zato bazu sastavljenu na ovakav način: podijelimo interval $[0, 1]$ uniformno na $N-1$ elemenata s N točaka ($h = 1/(N-1)$, $x_i = (i-1)h$, $i = 1, \ldots, N$). Tada je ϕ_i neprekidna po dijelovima linearna funkcija (na svakom od intervala subdivizije određene na gornji način) takva da je $\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

Iz načina konstrukcije baze, elementi su neprekidni te su identički jednaki nula svugdje osim na intervalima $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ (za rubne sami možete vidjeti kakvo je pravilo). Isto vrijedi i za njihove derivacije (barem po dijelovima – integriranje možemo rastaviti na sumu integrala po intervalima subdivizije). Zato primjećujemo da čim je $|i-j| > 2$, vrijedi $K_{i,j} = 0$. Umjesto N^2 elemenata matrice, u $\mathbf{K}$ nalazi se cca $3N$ netrivijalnih elemenata matrice, što spremanje i rješavanje sustava čini mnogo bržim (iako postoje bolje metode za takve matrice od Gaussovih eliminacija, složit ćete se da je i tu metodu lakše raditi kada je mnogo elemenata jednako nula).

Ta baza ima još jednu prednost: u zapisu $u_h = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \phi_i$ elementi λ_i upravo su vrijednosti funkcije u_h u točkama x_i (u formulu uvrstite x_i – na desnoj strani samo jedan sumand preživi). Za takvu bazu vrijedi da je funkcija u_h zapravo neprekidna po dijelovima linearna funkcija koja u točkama x_i poprima vrijednosti λ_i, upravo one koje dobijemo kao rješenje sustava.

Ovakva baza označava se s $\mathbb{P}_1$, gdje 1 označava činjenicu da su bazne funkcije po dijelovima polinomi stupnja 1. Naravno, ako želimo neka bolja svojstva (ili bržu konvergenciju kada $h \to 0$), koristit ćemo P_2, ili P_3 elemente (za polinomima još višeg stupnja u praksi nema više toliko koristi).

Ako je jednadžba dana na dvodimenzionalnoj domeni, ideja je slična, samo je "subdivizija" domene kompliciranija. Domena se particionira na disjunktne trokute, koji općenito ne mogu svi biti jednakostranični (pogledajte slučaj kada je domena kvadrat), ali su njemu što sličniji (čak je i subdivizija na pravokutne trokute dobra). Tada su $\mathbb{P}_1$ elementi oni koji su jednaki 1 u nekom od vrhova tih trokuta, a nula na ostalima. Bazne funkcije, iako u dvije varijable, opet su po dijelovima linearne. Struktura matrice krutosti malo je ružnija nego u linearnom slučaju, ali i dalje je očuvano svojstvo da je broj netrivijalnih elemenata u njoj $\mathcal{O}(N)$. "Subdiviziju" u 2D slučaju zovemo **mreža** (eng. mesh).

Postoji i rezultat (koji nećemo pisati precizno, jer je dosta detaljan) koji kaže da: kako se mreža progušćuje na način da trokuti ne teže u nedeformirane (recimo postoji najmanji i najveći kut koji sve te mreže mogu imati), tada se i aproksimacija u_h za pravo rješenje u popravlja kako $h \to 0$, tj. vrijedi

$$\int_\Omega (u - u_h)^2 dxdy + \int_\Omega \|\nabla u - \nabla u_h\|^2 dxdy \to 0.$$

1.4 O normama i funkcijskim prostorima*

Ovo poglavlje je označeno zvjezdicom jer gradivo koje slijedi je zapravo najteže (uključuje neke alate koji se uče na diplomskom studiju), ali su nužni za nastavak predavanja. Također, pokušao sam minimalno ući u detalje, pod cijenu da ne budem precizan. Kako god, pripremimo se, dolazi težak dio.

Do sada sam vas malo varao. To se vidi u zadnjem poglavlju: numeričke aproksimacije žive u prostoru globalno neprekidnih funkcija koje su po dijelovima neprekidne, a pomoću njih želimo aproksimirati C^1 funkcije, što i nema toliko smisla. Stvar je u tome što se analiza parcijalnih diferencijalnih jednadžbi zapravo ne radi na neprekidnim i neprekidno diferencijabilnim funkcijama.

Krenimo s prvom definicijom: za $p \geqslant 1$ i za proizvoljnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definiramo broj (ako postoji)

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p dxdy \right)^{1/p} .$$

i zovemo ga L^p–**normom** funkcije f. Nadalje ćemo promatrati samo slučaj $p = 2$. Dodatno, ako je f derivabilna, definiramo (ako postoji)

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^2 + |\partial_1 f|^2 + |\partial_2 f|^2 dxdy \right)^{1/2} ,$$

i zovemo ga H^1–**normom** funkcije f.

Potreba za normom je jasna: ako imamo vektorski prostor funkcija i ako na njemu želimo uspoređivati funkcije (recimo, koliko je precizna numerička aproksimacija), vektorski prostor želimo snabdijeti normom. Nadalje, ispostavlja se da bi bilo ijepo da taj vektorski prostor u kojem promatramo funkcije ima dodatno svojstvo koje zovemo **zatvorenost**:

Za svaki konvergentan niz $(f_n)_{n\geqslant 1}$ u vektorskom prostoru V vrijedi da se limes nalazi u V.

No, za funkcije koje su C i C^1 takvo što ne vrijedi u navedenim normama (kažemo da $f_n \to f$ u nekoj normi ako $\|f_n - f\| \to 0$ u toj normi kad $n \to +\infty$).

DZ 3. *Riješite sljedeće podzadatke:*

a) *Nađite primjer niza C^1 funkcija $(f_n)_{n\geqslant 1}$ na $[0, 1]$ i funkcije f koja nije neprekidna za koje vrijedi da $f_n \to f$ u L^2–normi.*

b) *Nađite primjer niza C^1 funkcija $(f_n)_{n\geqslant 1}$ na $[-1, 1]$ i neprekidne funkcije f koja ima derivaciju u svim točkama osim u $x = 0$ za koje vrijedi da $f_n \to f$ u H^1–normi na intervalima $[-1, 0]$ i $[0, 1]$ (za $f'(0)$ uzmite derivaciju u samo odgovarajućem smjeru).*

Zato, umjesto prostora $C(\Omega)$ i $C^1(\Omega)$ promatraju se takozvani $L^2(\Omega)$ i $H^1(\Omega)$ prostori. Oni su dobiveni kao *zatvarači* $C^1(\Omega)$–funkcija u odgovarajućim normama (za sve moguće konvergentne nizove $C^1(\Omega)$–funkcija promotrili smo sve moguće limese i ubacili ih u prostore). Intuitivno, vrijedi

- U prostorima $L^2(\Omega)$ nalaze se funkcije koje su neprekidne osim u prebrojivo mnogo točaka.
- U tih prebrojivo mnogo točaka vrijednost $L^2(\Omega)$ **nije bitna**. Preciznije: dvije funkcije koje se razlikuju u najviše prebrojivo mnogo točaka **poistovjećujemo** kao da su ista funkcija.
- U prostorima $H^1(\Omega)$ nalaze se funkcije koje su globalno neprekidne, te su C^1 osim u prebrojivo mnogo točaka.
- Ako je $f \in H^1(\Omega)$, tada vrijedi $f \in L^2(\Omega)$, te $\partial_i f \in L^2(\Omega)$.

Tu je prva nepreciznost u ovom poglavlju: naveo sam samo neke funkcije koje se nalaze u našim prostorima, ali ne i sve. Primjerice, u dvije i više dimenzija, H^1–funkcije mogu biti i neke koje nisu niti neprekidne, ali nećemo o tome.

Obratimo pažnju na drugu točku. Zaista, ako pogledate ponovno definiciju za L^p–normu. Uzmimo funkciju koja je jednaka nuli osim u prebrojivo (ili lakše, konačno) mnogo točaka. Norma je tada jednaka nuli. S druge strane, ako je neka funkcija norma, mora zadovoljavati svojstvo da je norma jednaka nuli ako i samo ako je element jednak nul–vektoru. Ono što se zapravo dogodi je da L^p–funkcije zapravo nisu funkcije, nego klase ekvivalencije u kojima poistovjećujemo dvije funkcije kojima je norma razlike jednaka nuli.

Zato možemo pričati o derivaciji takvih funkcija. Naime, kako su H^1–funkcije derivabilne svugdje osim u prebrojivo mnogo točaka, njihovu derivaciju evaluiramo u svim osim u tih nekoliko točaka, a u onim točkama u kojima derivacija ne postoji, vrijednost nije ni bitna – sve takve funkcije ionako poistovjećujemo kao jednu.

Nadalje, kako imamo mnogo toga zadano integralom, bilo ovdje normom, bilo varijacijsku formulaciju za PDJ, te kako sada vidimo da integral ne može razaznati vrijednost (neneprekidne) funkcije u jednoj (ili dapače prebrojivo) mnogo točaka, nemamo problema s time što primjerice derivacija nije definirana u nekim točkama. Primjerice, u 1D, kada imamo u varijacijskoj formulaciji izraz oblika $\int_0^1 u'v'dx$, taj izraz promatramo kao sumu integrala po intervalima na kojima derivacije od u i v postoje. Tu vidimo još veću snagu varijacijske formulacije. Umjesto što smo prvotno tražili C^2 funkcije kao rješenja eliptičke PDJ, pa onda proširili na to da tražimo da je rješenje klase C^1, sada vidimo da možemo tražiti da je to rješenje u prostoru H^1.

Ovdje nismo gotovi s novim pojmovima. Osim zatvorenosti, htjeli bismo imati i svojstvo **kompaktnosti**:

Ako je niz funkcija $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ograničen (u nekoj normi), tada postoji podniz tog niza koji konvergira u istoj toj normi.

To je rezultat koji smo vidjeli da vrijedi u $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$. No, ispostavlja se da ovaj jako koristan rezultat nikad ne vrijedi u beskonačnodimenzionalnim vektorskim prostorima. Postoji jedan drugi rezultat, za koji nam treba novi pojam.

Definicija 1. *Niz funkcija $(f_n)_{n\geqslant 1}$ iz $L^2(\Omega)$ kažemo da **slabo konvergira** ka nekoj $f \in L^2(\Omega)$ ako za svaku $g \in L^2(\Omega)$ vrijedi*

$$\int_\Omega f_n g \, dxdy \to \int_\Omega fg \, dxdy.$$

Oznaka: $f_n \rightharpoonup f$.

Konvergencija u gornjoj definiciji je konvergencija realnih brojeva, pa je sve dobro definirano. Običnu konvergenciju u normi ponekad ćemo (kako bi razlikovali) imenovati jakom konvergencijom.

Osnovna svojstva:

- Jaka konvergencija povlači slabu, no obrat općenito ne vrijedi. Primjer je niz funkcija $f_n(x) = \sin(nx)$ na $[-\pi, \pi]$.
- Slabi limes, ako postoji, jedinstven je. Ako postoji i jaki limes, poklapa se sa slabim.
- Na konačnodimenzionalnim prostorima jaka i slaba konvergencija su ekvivalentne.
- Slabo konvergentan niz je ograničen u normi.

DZ 4. *Riješite sljedeće podzadatke:*

a) Pokazuje se da su funkcije koje su po dijelovima konstantne (i to konačno mnogo dijelova) guste u L^2. Odnosno, za proizvoljne $f \in L^2([a,b])$ i $\varepsilon > 0$ postoji $f_\varepsilon \in L^2([a,b])$ koja je po dijelovima konstantna takva da je $\|f - f_\varepsilon\|_{L^2([a,b])} < \varepsilon$. Zato, pokažite da niz funkcija definiran s $f_n(x) = \sin(nx)$ ne konvergira jako, ali vrijedi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n g \, dx \to 0$$

za svaku po dijelovima konstantnu g, pa je zato slabi limes tog niza funkcija nula.

b) Dokažite da su na konačnodimenzionalnim prostorima jaka i slaba konvergencija ekvivalentne.

Iskažimo i ključan rezultat zbog kojeg smo uveli slabu konvergenciju.

Teorem 3 (verzija Banach – Alaogluovog teorema)**.** *Svaki niz ograničen u normi $L^2(\Omega)$ ima slabo konvergentan podniz.*

Postoje još neki rezultati koji vrijede, ali nisu netrivijalni i trebaju se ponovno dokazivati u novim definicijama prostora i konvergencija, ali ćemo ih navoditi putem.

1.5 Lax – Milgramov teorem

Vratimo se na našu eliptičku rubnu zadaću, sada u novom ruhu: naći $u \in H^1(\Omega)$, uz $u = 0$ na Γ_D, takav da za sve $v \in H^1(\Omega)$, uz $u = 0$ na Γ_D vrijedi

$$\int_\Omega (\mathbf{A}\nabla u) \cdot \nabla v \; dxdy = \int f v \; dxdy.$$

Rješavanje te zadaće, kao što smo rekli, u pravilu je netrivijalno i najčešće se tome pristupa numerički. Ono što je lakše, kao i inače u teoriji PDJ, je odrediti ima li zadaća rješenje i je li ono jedinstveno. Za sve eliptičke zadaće to se u pravilu radi na isti način.

Definicija 2. *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normirani vektorski funkcijski prostor (vektorski prostor funkcija snabdjeven normom), te neka je $a : V \times V \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Kažemo da je a*

- ***bilinearna forma**: ako je linearna po svakoj varijabli:*

$$a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v) \;\; i \;\; a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2);$$

- ***simetrična:** ako je $a(u, v) = a(v, u)$;*
- ***koercitivna:** ako postoji $c > 0$ takav da*

$$c\|u\|^2 \leqslant a(u, u);$$

- ***ograničena:** ako postoji $C > 0$ takav da*

$$a(u, v) \leqslant C\|u\| \cdot \|v\|.$$

Teorem 4 (Lax–Milgram). *Neka je $a : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinearna, koercitivna i ograničena forma na*

$$V := \{u \in H^1(\Omega) \; : \; u = 0 \; na \; \Gamma_D\},$$

te neka je $f \in L^2(\Omega)$. Tada zadaća $a(u, v) = \int_\Omega f v \; dxdy$ ima jedinstveno rješenje.

Dodatno, ako je a i simetrična, tada funkcional

$$J(u) := \frac{1}{2} a(u, u) - \int_\Omega f u dxdy$$

poprima jedinstveni globalni minimum na V koji je ujedno i rješenje gornje zadaće.

Funkcional J iz nastavka teorema ponekad se naziva **energetski funkcional**. Koristan ga je gledati u kontekstu modeliranja pojava u prirodi: svaki sustav želi zauzeti stanje u kojem ima minimalnu energiju. Taj funkcional sugerira i sljedeće pravilo: *linearna jednadžba implicira kvadratnu energiju.*

Pogledajmo primjenu gornjeg teorema u našem slučaju. Uvjeti na našu formu

$$a(u, v) := \int_\Omega (\mathbf{A}\nabla u) \cdot \nabla v \; dxdy$$

su trivijalni osim koercitivnosti. Bilinearnost je očita, imamo čak i simetričnost, a za ograničenost (kako su sve matrice ograničene), imamo prema Cauchy–Shwarzovoj nejednakosti za integrale

$$a(u, v) = \int_\Omega (\mathbf{A}\nabla u) \cdot \nabla v \; dxdy \leqslant M \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dxdy = M\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant M\|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Za koercitivnost treba pretpostaviti nešto dodatno za matricu $\mathbf{A}$, što se i inače pretpostavlja, odnosno prirodno pojavlja u modeliranju. Nadalje je $\mathbf{A}$ simetrična i **pozitivno definitna matrica** reda 2. (Za one koji ne znaju, matrica je pozitivno definitna ako za svaki nenul vektor $\mathbf{v}$ vrijedi $\mathbf{Av} \cdot \mathbf{v} > 0$, ili ekvivalentno, sve svojstvene vrijednosti od $\mathbf{A}$, osim što su realni brojevi jer je $\mathbf{A}$ simetrična, dodatno su i pozitivni.)

Sada imamo da ako je $\lambda_{\min}$ najmanja svojstvena vrijednost od $\mathbf{A}$, onda

$$a(u,u) = \int_\Omega (\mathbf{A}\nabla u)\cdot \nabla u \, dxdy \geqslant \lambda_{\min} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dxdy = \lambda_{\min} \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Ako $\mathbf{A}$ nije konstantna matrica nego ovisi o $\mathbf{x} \in \Omega$, tada treba dodatno pretpostaviti da je najmanja svojstvena vrijednost svih tih matrica $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ odozdo ograničena brojem strogo većim od nule. Ovdje dokaz nije gotov, htjeli bismo još desnu stranu dobivene nejednakosti ograničiti odozdo s $\|u\|_{H^1}^2$. U generalnom slučaju znamo da norma derivacije ne može odozgo iskontrolirati normu funkcije (pogledajte slučaj netrivijalne konstante). No, kako mi imamo i rubni uvjet ($u = 0$ na Γ_D), postoji rezultat koji nam ovdje pomaže.

Teorem 5 (Poincaréova nejednakost)**.** *Postoji $C_P > 0$ takva da za sve $f \in H^1(\Omega)$ takve da je $f = 0$ na Γ_D (dio ruba pozitivne duljine) vrijedi nejednakost*

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_P \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Konstanta C_P ovisi o domeni Ω i rubu Γ_D, ali ne ovisi o funkciji f. Ta konstanta naziva se **Poincaréova konstanta**.*

Koristeći gornji teorem, dovršavamo i vidimo da je a uistinu koercitivna:

$$a(u,u) \geqslant \frac{\lambda_1}{C_P} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Iz gornjeg raspisa, primijetimo da možemo dobiti i jednu ogradu na normu rješenja zadaće. Naime, ako je u rješenje, tada iz dokazanog i Cauchy–Schwarzove nejednakosti za integrale vrijedi

$$\frac{\lambda_1}{C_P} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leqslant a(u,u) = \int_\Omega f u \, dxdy \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

odakle nakon dijeljenja s $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ dobivamo da postoji konstanta M takva da je

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant M \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ovo će biti od velike koristi kasnije.

DZ 5. *Riješite sljedeće podzadatke:*

a) Pokažite Poincaréovu nejednakost na C^1 funkcijama na intervalu $[0,1]$: dokažite da postoji $C > 0$ takva da za sve funkcije koje zadovoljavaju $f(0) = 0$ imamo

$$\int_0^1 |f|^2 \, dx \leqslant C \int_0^1 |f'|^2 \, dx.$$

b) Pokažite posebnu verziju Poincaréove nejednakost na C^1 funkcijama na pravokutniku $\Omega := [0,1] \times [0,m]$ ($m > 0$ realni parametar): dokažite da postoji $C(m) > 0$ takva da za sve C^1 funkcije f koje su nula na cijelom rubu pravokutnika imamo

$$\int_\Omega |f|^2 \, dxdy \leqslant C(m) \int_\Omega |\partial_1 f|^2 + |\partial_2 f|^2 \, dxdy.$$

Konstanta $C(m)$ može ovisiti o parametru m.

c) Kako se konstante iz gornjeg primjera ponašaju kada variramo $m > 0$? Dokažite primjerom da ne možemo odabrati jednu uniformnu konstantu za gornje nejednakosti: nađite primjer niza m_n u pozitivnim realnim brojevima i funkcija f_n na domenama Ω_{m_n} za koje omjeri normi $\|f\|_{L^2(\Omega_{m_n})}/\|\nabla f\|_{L^2(\Omega_{m_n})}$ teže u beskonačno.

DZ 6. *Neka je $\mathbf{A}$ simetrična pozitivno definitna matrica reda N, te neka je $n < N$. Neka je $\mathbf{b}$ vektor iz $\mathbb{R}^N$. Definirajmo $\mathbf{x}_0$ kao rješenje sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.*

a) Neka je $\mathbf{x}_1$ vektor iz $\mathbb{R}^N$ takav da je $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$ za sve vektore iz $\mathbb{R}^N$. Vrijedi li $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0$? Vrijedi li isti zaključak ako je $\mathbf{A}$ regularna matrica koja nije nužno pozitivno definitna?

b) Neka je V vektorski potprostor od $\mathbb{R}^N$ dimenzije n. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_2 \in V$ takav da je $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$ za sve vektore iz V. Ako je $\mathbf{x}_0 \in V$, vrijedi li nužno da je $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_2$? Ako $\mathbf{x}_0 \notin V$, vrijedi li da je $\mathbf{x}_2$ ortogonalna projekcija vektora $\mathbf{x}_0$ na potprostor V?

c) Definirajmo funkciju $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ formulom

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}.$$

Dokaži da funkcija F poprima minimum na $\mathbb{R}^N$, i da je jedina točka minimuma upravo $\mathbf{x}_0$. Mora li vrijediti isto ako je $\mathbf{A}$ samo regularna matrica?

2 Elastičnost

Sada prelazimo na drugi dio predavanja – primjena parcijalnih diferencijalnih jednadžbi mehanici, konkretno u elastičnosti.

2.1 Uvod

Promotrimo elastično (3D) tijelo. Neka je prvo zauzimalo dio prostora Ω (i bilo slobodno od svih sila koje bi mogle utjecati na njegovu potencijalnu elastičnu energiju), a nakon primjene nekih sila zauzima dio prostora $\Phi(\Omega)$. Preciznije, svaka točka $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)$ nakon primjena sila nalazi se na poziciji $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$. Funkcija $\mathbf{\Phi}$ naziva se **deformacija**. Dakle, kada je $\mathbf{\Phi} = \mathrm{id}$, tijelo nismo transformirali.

Primijetimo da se tijelo može na razne načine transformirati, no neće sve netrivijalne transformacije izazvati efekte elastičnosti. Primjerice, ako se tijelo translatiralo, neupitno je da je nešto izvana djelovalo na tijelo, ali nije promijenilo njegovu potencijalnu elastičnu energiju. Isto vrijedi i kada tijelo rotiramo.

Pogledajmo dvije točke $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, te kamo su se preslikale nakon primjene deformacije ($\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{\Phi}(\mathbf{y})$). Dužina određena razlikom tih točaka prije i poslije deformacija može se promijeniti (rotirati i translatirati) bez posljedica za elastičnu energiju. No, ono što se ne može dogoditi bez promjene elastične energije je:

- ta dužina ne može se produljiti ili skratiti;
- ta dužina ne može promijeniti kut koji zatvara s nekom sebi blizu dužinom određenom točkama $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}'$.

Udaljenosti i kutove čuvaju skalarni produkti. Također, kako stvari gledamo lokalno, na prste zaključujemo da za dva "mala" parametra h_1, h_2 i jedinične vektore $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ elastična energija ovisi o razlikama vrijednosti oblika

$$((\mathbf{\Phi}(\mathbf{x} + h_1\mathbf{v}_1) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{\Phi}((\mathbf{x} + h_2\mathbf{v}_2) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})) \qquad \text{i} \qquad ((\mathbf{x} + h_1\mathbf{v}_1) - \mathbf{x}) \cdot ((\mathbf{x} + h_2\mathbf{v}_2) - \mathbf{x}).$$

Zatim, primijećujemo da će sve biti dovoljno gledati samo u tri kanonska smjera, te na prste, ne trebamo razlikovati h_1 i h_2. Nakon sređivanja, za $i, j \in \{1, 2, 3\}$ zanimaju nas razlike oblika

$$((\mathbf{\Phi}(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{\Phi}((\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})) - h^2\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j.$$

Dijeleći s h^2 i puštajući u nulu, dobivamo izraze oblika

$$\partial_i\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \cdot \partial_j\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) - \delta_{i,j},$$

što su elementi 3×3 matrice

$$\nabla\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})^T\nabla\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) - \mathbf{I}.$$

Ova matrica naziva se **tenzorom naprezanja**. I dalje na prste: elastična energija (bez uračunavanja sila) je oblika

$$\int\limits_\Omega W(\nabla\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})^T\nabla\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) - \mathbf{I})\, d\mathbf{x},$$

gdje je W neka kvadratna funkcija.

Ovime smo jako brzo i s jako malo preciznog objašnjenja došli do jednadžbi **nelinearne elastičnosti**. Rješenje ćemo dobiti ako gornju energiju minimiziramo po $\mathbf{\Phi}$, nakon što još uračunamo i vanjske sile i neki rubni uvjet.

Problem, kao što gore piše, je što su ovo jednadžbe nelinearne elastičnosti. Nije problem u tome što je W kvadratna funkcija, nego što se u njenom argumentu nalaze umnošci prvih derivacija. Želimo da se u argumentu nalaze prve derivacije u obliku linearnih kombinacija s konstantama. Ono što ćemo napraviti je linearizirati gornju PDJ, te dobiti jednadžbe **linearizirane elastičnosti**.

Prije nego nastavimo, napomenimo da iako u temelju mijenjamo jednadžbe (zanemarit ćemo neke nelinearne članove koji nam smetaju), jednadžbe linearizirane elastičnosti imaju iznenađujuće dobro ponašanje i dovoljno veliku primjenu. S jedne strane, rješenja linearizirane elastičnosti, koja je lakše naći jer je teorija linearnih PDJ mnogo lakša, možemo koristiti u formiranju rješenja za nelinearnu elastičnost (kao što integral generalne funkcije možemo izračunati aproksimirati s integralom po dijelovima linearne funkcije). S druge strane, za male sile i male deformacije, elementi matrice $\nabla\mathbf{\Phi}$ su maleni, pa su kvadrirani još i manji, pa opravdavaju zanemarivanje. Ono što želim reći je da za male sile i deformacije rješenja linearizirane elastičnosti dobro aproksimiraju rješenja nelinearne elastičnosti (što se može i precizno pokazati).

Napravimo linearizaciju. Ona se tradicionalno ne radi po funkciji $\mathbf{\Phi}$, nego po funkciji $\mathbf{U} := \mathbf{\Phi} - \mathrm{id}$. Ta funkcija naziva se **pomakom**, i označava, kao što kaže, koliko se tijelo pomaklo iz nedeformiranog položaja. Ako je $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = 0$, tada se tijelo nije deformiralo. Zapisujući tenzor naprezanja u novoj varijabli, dobivamo da je jednak

$$(\nabla\mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{I})^T(\nabla\mathbf{U}(\mathbf{x}) + \mathbf{I}) - \mathbf{I} = \nabla\mathbf{U}(\mathbf{x})^T\nabla\mathbf{U}(\mathbf{x}) + \nabla\mathbf{U}(\mathbf{x}) + \nabla\mathbf{U}(\mathbf{x})^T.$$

Prvi član je kvadratni, pa njega zanemarujemo. U ostatku se neće mnogo promijeniti ako **lineariziranim tenzorom naprezanja** proglasimo nešto što je samo za multiplikativnu konstantu drugačije od onoga što piše gore. Dakle, sada promatramo tenzor naprezanja

$$\mathbf{e}(\mathbf{U}) := \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{U}(\mathbf{x}) + \nabla\mathbf{U}(\mathbf{x})^T\right) = \mathrm{sym}\left(\nabla\mathbf{U}(\mathbf{x})\right),$$

gdje je $\mathrm{sym}(\mathbf{A})$ simetrični dio kvadratne matrice $\mathbf{A}$.

Sada je energija po ovom tenzoru naprezanja zaista kvadratna, i producirat će linearnom eliptičkom PDJ. Općenito znamo da ona izgleda ovako:

$$\int_\Omega \mathcal{C}\mathbf{e}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{V})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}\, d\mathbf{x},$$

za svaku funkciju $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdje je $\mathbf{F}$ volumna sila primijenjena na tijelo, te je $\mathcal{C}$ neki linearni **tenzor**: linearni operator koji 3×3 matricama pridružuje 3×3 matrice. (U prošlom poglavlju nepoznanica nam je bila funkcija $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kojoj je gradijent matrica 2×1, pa smo zato za opću eliptičku jednadžbu pisali kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ reda 2 jer je linearan operator koji matricama 2×1 pridružuje matrice 2×1). Točka između $\mathbf{e}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{V})$ označava Frobeniusov produkt matrica: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} := \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$ (očita generalizacija skalarnog produkta vektora).

U lineariziranoj elastičnosti u posebnom, ali najraširenijem slučaju kada elastični materijal homogen (u svakoj točki ima ista svojstva), objektivan (kada promatrač promijeni poziciju, svojstva ostanu ista) i anizotropan (u svakom smjeru su svojstva jednaka), pričamo o tzv. **St. Venant – Kirchhoffovom materijalu**, te tada vrijedi da tenzor $\mathcal{C}$ na proizvoljnoj matrici $\mathbf{E}$ djeluje na sljedeći način:

$$\mathcal{C}\mathbf{E} = \lambda\,\mathrm{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E},$$

odnosno, za proizvoljne matrice $\mathbf{E}$ i $\mathbf{F}$ vrijedi

$$\mathcal{C}\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} = \lambda\,\mathrm{tr}(\mathbf{E})\,\mathrm{tr}(\mathbf{F}) + 2\mu\mathbf{E} \cdot \mathbf{F}.$$

Konstante λ i μ su tzv. **Laméove konstante** i ovise o materijalu koji promatramo.

Sada smo definirali sve potrebno – gledajući $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ na prostoru $H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, uz određeni rubni uvjet (recimo kao inače $\mathbf{U} = 0$ na dijelu ruba domene Γ_D, što označava da je tamo tijelo fiksirano).

I za ovu zadaću dokazujemo egzistenciju i jedinstvenost rješenja pomoću Lax–Milgramovog teorema. No, treba nam još neki rezultat nalik na Poincaréovu nejednakost.

Teorem 6 (Kornova nejednakost)**.** *Postoji $C_K > 0$ takva da za sve $\mathbf{F} \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ takve da je $\mathbf{F} = 0$ na Γ_D (dio ruba pozitivne duljine) vrijedi nejednakost*

$$\|\mathbf{F}\|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)} \leqslant C_K\|\mathbf{e}(\mathbf{F})\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Konstanta C_K ovisi o domeni Ω i rubu Γ_D, ali ne ovisi o funkciji $\mathbf{F}$. Ta konstanta naziva se **Kornova konstanta**.*

Dokažimo da su uvjeti Lax–Milgramovog teorema zadovoljeni u najlakšem slučaju (kad su oba $\lambda, \mu > 0$).

DZ 7. *Riješite sljedeće podzadatke:*

a) *Dokažite da za simetričnu* $\mathbf{E}$ *i antisimetričnu* $\mathbf{F}$ *matricu reda 3 vrijedi* $\mathcal{C}\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} = 0$. *To opravdava što smo u eliptičnu zadaću kao test funkciju stavili* $\mathbf{e}(\mathbf{V})$ *umjesto* $\mathbf{V}$*, jer je to upravo simetrični dio od gradijenta* $\mathbf{V}$ *(antisimetrični dio bi iščeznuo).*

b) *Dokažite da u slučaju* $\lambda, \mu > 0$ *vrijedi nejednakost* $\mathcal{C}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} > 0$ *za sve simetrične matrice* $\mathbf{A}$ *reda 3 različite od nul-matrice. Zaključite da zato postoji* $\alpha > 0$ *takav da vrijedi* $\mathcal{C}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \leqslant \alpha \|A\|^2$.

c) *Pronađite matričnu reprezentaciju operatora* $\mathcal{C}$ *na simetričnim matricama. Konkretno, koristeći izomorfizam koji vektoru* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^6$ *pridružuje 6 matričnih elemenata simetrične matrice* $\mathbf{W}$ *reda 3 na dijagonali i iznad nje, nađite matricu* $\mathbf{C}$ *reda 6 za koju vrijedi* $\mathbf{C}\mathbf{w} = \mathcal{C}\mathbf{W}$. *Odredite svojstvene vrijednosti matrice* $\mathbf{C}$ *u ovisnosti o* λ *i* μ. *Zaključite za koje vrijednosti tih konstanti je bilinearna forma koercitivna, pa zadovoljava Lax–Milgramov teorem.*

Najteži dio je provjera koercitivnosti. No, imamo

$$\frac{\alpha}{C_K}\|\mathbf{U}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \alpha\|e(\mathbf{U})\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \int_\Omega \mathcal{C}\mathbf{e}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{U})\, d\mathbf{x},$$

gdje prva nejednakost slijedi iz Kornove nejednakosti, a druga iz koercitivnosti tenzora $\mathcal{C}$ (s koeficijentom koercitivnosti α) primijenjene u svakoj točki iz Ω.

DZ 8. *Dokažite verziju Kornove nejednakosti na glatkim funkcijama: postoji konstanta* $C_K > 0$ *takva da za proizvoljnu* $u \in C^\infty([0,1]^2; \mathbb{R}^2)$ *koja je jednaka nuli na rubu kvadrata vrijedi*

$$\int_{[0,1]^2} (\partial_1 u_1)^2 + (\partial_2 u_2)^2 + 2\left(\frac{\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1}{2}\right)^2 dxdy$$
$$\geqslant C_K \int_{[0,1]^2} u_1^2 + u_2^2 + (\partial_1 u_1)^2 + (\partial_1 u_2)^2 + (\partial_2 u_1)^2 + (\partial_2 u_2)^2\, dxdy.$$

Uputa: Iskoristite i Poincaréovu nejednakost. Parcijalna integracija kod jedinog problematičnog člana (iskoristite glatkoću od u.)

Napomena 1. *U nelinearnoj elastičnosti kada je tenzor naprezanja* $\nabla\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})^T\nabla\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) - \mathbf{I}$ *jednak nuli može se pokazati da tada postoji konstantni vektor* $\mathbf{b}$ *i konstantna rotacija* $\mathbf{Q}$ *(unitarna matrica s determinantom 1) takvi da je* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ *(da je postoji rotacija nije teško vidjeti, teži dio je dokazati da je nužno konstantna). U lineariziranoj elastičnosti može se pokazati sličan rezultat: ako je* $\mathbf{e}(\mathbf{U}) = 0$*, tada postoji konstantni vektor* $\mathbf{b}$ *i konstantna antisimetrična matrica* $\mathbf{A}$ *takvi da je* $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. *Ti deformacije i pomaci se zovu* ***kruti pomaci****, i to su deformacije za koju je elastična energija jednaka nuli.*

Objasnimo vezu između linearizirane i nelinearne elastičnosti na ovom primjeru. Postoji rezultat iz vektorskih prostora: za svaku rotaciju $\mathbf{Q}$ *postoji antisimetrična matrica* $\mathbf{A}$ *takva da je* $\mathbf{Q} = e^{\mathbf{A}}$. *Eksponencijalna funkcija matrice može se definirati preko Taylorovog reda:*

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n + \cdots,$$

(ovaj red apsolutno konvergira za sve matrice $\mathbf{A}$*, što nije teško za dokazati) te i za nju vrijedi teorem o preslikavanju spektra (ako je* λ *svojstvena vrijednost za* $\mathbf{A}$*, tada je* e^λ *svojstvena za* $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$*; primijetite zašto je to u skladu sa znanjem odakle dolaze svojstvene vrijednosti za antisimetrične i unitarne matrice). Tada, kako je* $\nabla\mathbf{\Phi} = \mathbf{Q}$ *za krute pomake, tada želimo da je*

$$\nabla\mathbf{U} = \nabla(\mathbf{\Phi} - \mathrm{id}) = \mathbf{Q} - \mathbf{I} = (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 + \cdots) - \mathbf{I},$$

no nakon linearizacije (sve članove počevši od $\mathbf{A}^2$ *zanemarujemo), dobivamo željeno:* $\nabla\mathbf{U} = \mathbf{A}$.

DZ 9. *Riješite sljedeće podzadatke:*

a) Dokažite da ako je $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *klase* C^∞ *takva da je*

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1 & \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) & \partial_2 u_2 \end{bmatrix} = 0,$$

da tada postoji (konstantna) antisimetrična matrica $\mathbf{A}$ *reda dva i vektor* $\mathbf{b}$ *reda dva takvi da je* $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$.
Derivirajte i dokažite prvo da su u_1 *i* u_2 *najviše polinomi u obje varijable. Poslije je lagano.*

b) Dokažite da ako je $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *klase* C^∞ *takva da je* $\nabla \mathbf{\Phi}^T \nabla \mathbf{\Phi} = \mathbf{I}$, *odnosno*

$$\partial_i \mathbf{\Phi} \cdot \partial_j \mathbf{\Phi} = \delta_{i,j}, \ \ i, j = 1, 2$$

da tada postoji (konstantna) unitarna matrica $\mathbf{Q}$ *reda dva i vektor* $\mathbf{b}$ *reda dva takvi da je* $\mathbf{\Phi} = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{b}$.
Uputa: Derivirajte uvjete, tražite tri međusobno okomita vektora u dvodimenzionalnom prostoru.

2.2 Niždimenzionalni modeli elastičnosti

U prirodi, iako su sva tijela trodimenzionalna, neka tijela su drastično tanja od ostalih. Postoje tijela koja su tanja u jednoj dimenziji od druge dvije (zidovi, stijenke žila), te postoje tijela koja su u dvije dimenzije mnogo manja nego u trećoj (bilo kakvi štapovi). Zato postoji i podjela. Prva tijela zvat ćemo **ploče** ili **ljuske** (ovisno o tome je li im geometrija ravna, preciznije, leži li ploha koja prolazi sredinom tih tijela u ravnini ili ne), a drugi tip tijela zvat ćemo **štapovi**.

Iako i za takva tijela, kao i za sva ostala "debela" tijela vrijede iste jednadžbe, često se njih promatra odvojeno i istražuju neki prilagođeniji modeli. Dva su razloga, analitički i numerički.

Pogledajmo za primjer neku ploču (ili ljusku). Naše jednadžbe izvedene u prošlom poglavlju promatraju istezanje ili stiskanje materijala u sve tri dimenzije. Ako je tijelo tanko u jednoj dimenziji, u toj dimenziji je nezanimljivo promatrati promjenu debljine u toj dimenzije. Onoga tko modelira taj materijal s kvalitativne i kvantitativne strane više zanima što se događa s tijelom u druge dvije dimenzije. Također, za takvo tijelo pojavljuje se još jedan efekt koji se ne može toliko jednostavno objasniti tenzorom naprezanja, a to je savijanje u tom okomitom smjeru.

Pretpostavimo da je ploča "široka i dugačka" u smjerovima $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$, a tanka u smjeru $\mathbf{e}_3$. Općenito, i u jednadžbama niždimenzionalnih modela što ćemo uskoro vidjeti, prirodno se pojavljuju dva tipa elastičnih efekata i energije:

1. **membranski efekt**: istezanje ili skupljanje u smjerovima $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$;
2. **fleksijski efekt**: savijanje ploče, recimo silom u smjeru $\mathbf{e}_3$.

Osim što se pojavljuju takva dva efekta (koja se inače ne mogu vidjeti 3D jednadžbama), ta dva efekta pojavljuju se i s drugačijim redovima veličine. Naime, pokazuje se da ako je omjer debljine i duljine ploče reda h, da je za podjednake pomake potrebno u smjeru $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ djelovati h^{-2} jačom silom nego u smjeru $\mathbf{e}_3$. No, to i nije toliko iznenađujuće u prirodi. Uzmimo dva primjera - neku elastičnu traku za vježbanje (ili kapu za olimpijske plivače) i dasku za skokove u vodu. Oba objekta su tanka u jednoj dimenziji. Nadalje, elastičnu traku možemo relativno lagano istegnuti, iako za to moramo uložiti malo energije, no nevjerojatno lako ju možemo saviti u smjeru okomitu na nju. S druge strane, dasku za skokove u vodu možemo saviti kada stanemo na njezin jedan kraj, ali mislim da je nitko od nas ne može rastegnuti.

Dakle, s analitičke strane prilikom promatranja objekata za koje znamo da su tanki, želimo imati alate kojima možemo uspoređivati i mjeriti takve efekte. Drugi razlog zašto želimo drugačiji pristup je numerika. Kao što sam pokušao objasniti u jednom od poglavlja, numeričko rješavanje PDJ je precizno ako su trokuti (ili u slučaju tri dimenzije: tetraedri) što sličniji obliku pravilnom jednakostraničnom trokutu (tetraedru). Ako je domena tanka u jednoj dimenziji, tada ili nećemo imati da je taj uvjet zadovoljen, ili ćemo trebati jako gustu mrežu kako bismo numerički riješili tu jednadžbu.

Zato se u tim slučajevima ne promatra 3D jednadžba već se nalazi PDJ zadana na 2D domeni (ili 1D u slučaju štapova) koja dobro opisuje ponašanje cijelog tijela u 3D domeni, te se debljina originalnog tijela koje opisuje u jednadžbama pojavljuje samo kao parametar. Te 2D jednadžbe nisu samo pojednostavljenje 3D jednadžbi (zažmirimo na koeficijente koji nam smetaju), nego su takve da zadovoljavaju da kada parametar debljine ide k nuli, da se i rješenja niždimenzionalnih modela približavaju rješenjima originalnih (ali za ovu priliku nespretnih) 3D jednadžbi.

Jedan način kako se takvi modeli izvode pokazat ćemo u sljedećem poglavlju.

2.3 Asimptotska analiza 2D elastičnosti

Kako bismo prezentirali dio spomenutog u prošlom poglavlju, naći ćemo limes rješenja zadaća opisanih u nastavku.

Neka je $\Omega_\varepsilon = [0,1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Definiramo prostore funkcija $V_\varepsilon := \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega_\varepsilon) \ : \ \mathbf{u}(0, x_2) = 0\}$, i rubne zadaće: naći $\mathbf{u}(\varepsilon) \in V_\varepsilon$ takav da za svaki $\mathbf{v} \in V_\varepsilon$ vrijedi

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \mathcal{C}\mathbf{e}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v}) \ d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_1 v_1 + \varepsilon f_2 v_2 \ d\mathbf{x}.$$

Primijetite da su jednadžbe već sada 2D. Stvar je samo prezentacijske prirode – inače se ova analiza koju ću sada prikazati radi uiz 3D jednadžbi, te se jedan ili dva smjera u domeni puštaju k nuli. Ove 2D jednadžbe koje su gore prikazane zapravo ne znače ništa, nego su samo primjer nečega što nam je lakše modelirati nego kada smo u 3D. Također, primijetite da smo uzeli u obzir da silu treba oslabiti kada djelujemo u smjeru u kojoj je domena tanka.

Zanima nas što se događa s rješenjima kada $\varepsilon \to 0$. Prvi problem je što se domene međusobno razlikuju – kako usporediti funkcije na različitim domenama? Rješenje: reskaliranje $\Omega := \Omega_1$, $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) := (u_1(\varepsilon), \varepsilon u_2(\varepsilon))$. Sada umjesto funkcija $\mathbf{u}(\varepsilon)$ promatramo funkcije $\mathbf{u}^\varepsilon$. Nakon dijeljenja s ε, dobivamo nove rubne zadaće: naći $\mathbf{u}^\varepsilon \in V$, $V := V_1$, takav da za svaki $\mathbf{v} \in V$ vrijedi

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{C}\mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{v}) \ d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \ d\mathbf{x},$$

gdje umjesto $\mathbf{e}(\mathbf{v})$ nakon zamjena varijabli i reskaliranja imamo $\mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{v})$:

$$\mathbf{e}(v) = \begin{bmatrix} \partial_1 v_1 & \frac{1}{2}(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) \\ \cdot & \partial_1 v_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varepsilon(v) = \begin{bmatrix} \partial_1 v_1 & \frac{1}{2\varepsilon}(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) \\ \cdot & \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_2 v_2 \end{bmatrix}$$

(točkica ispod dijagonale je lijenost zapisa jer znamo što piše ispod dijagonale u simetričnoj matrici).

Sve zadaće su dobro definirane, i daju jedinstveni $\mathbf{u}_\varepsilon$. Zanima nas kamo ti $\mathbf{u}_\varepsilon$ teže kad $\varepsilon \to 0$, tj. koju zadaću njihov limes zadovoljava. Iako smo se prebacili na Ω_1, očekujemo ponašanje koje ne ovisi o varijabli x_2. Zato nadalje konvencija: $\tilde{\mathbf{w}}$ označava funkciju definiranu na Ω, $\mathbf{w}$ označava funkciju na $[0,1] \times \{0\}$.

Gore opisani problem općenito se radi u četiri koraka:

1. Apriorne ocjene: dokazujemo da su sva rješenja $\mathbf{u}^\varepsilon$ uniformno ograničena, te još tražimo što iz toga zadovoljavaju;
2. Uzimanje slabo konvergentnog podniza, i puštanje limesa u jednadžbi za određene test funkcije;
3. Pronalazak limes-problema, i dokaz jedinstvenosti njegovog rješenja;
4. Dokaz jake konvergencije.

Neću mnogo govoriti što znači svaki korak općenito, nego na našem primjeru.

Prema Banach-Alaogluovom teoremu, znamo da ograničen niz ima slabo konvergentan podniz. Stoga dokažimo da je familija $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ ograničena, slično kao što smo nakon Lax–Milgramovog teorema našli ocjenu na rješenje. Koristimo Kornovu nejednakost te $\varepsilon \leqslant 1$ (što je ok jer nas zanima $\varepsilon \to 0$):

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C\|\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\int\limits_{\Omega} \mathcal{C}e_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \cdot e_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \ d\mathbf{x} = C\int\limits_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^\varepsilon \ d\mathbf{x} \leqslant C\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$$

(konstanta C je generička konstanta, koja ne ovisi o ε). Prvo gledajući prvi i zadnji član zaključujemo da je $\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ uniformno ograničeno po $\varepsilon \leqslant 1$. Kao drugo, svi elementi u nizu nejednakosti su uniformno ograničeni po $\varepsilon \leqslant 1$. Zato, po teoremu zaključujemo da imamo konvergentne podnizove. Konvencija je da ih ne označavamo posebno (recimo s $(u_{\varepsilon_k})_{k \geqslant 1}$), iako u pozadini znamo da su to samo podnizovi.

Dakle, imamo slabe konvergencije u $L^2(\Omega)$:

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}}^0,$$

$$\partial_i \mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \partial_i \tilde{\mathbf{u}}^0, \ i = 1, 2,$$

$$\mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1^\varepsilon & \frac{1}{2\varepsilon}(\partial_1 u_2^\varepsilon + \partial_2 u_1^\varepsilon) \\ \cdot & \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_2 u_2^\varepsilon \end{bmatrix} \rightharpoonup \mathbf{e}^0.$$

Posebno: iz druge i treće imamo istodobno da $\frac{1}{\varepsilon^2}\partial_2 u_2^\varepsilon$ i $\partial_2 u_2^\varepsilon$ konvergiraju slabo u L^2. To je jedino moguće ako $\partial_2 u_2^\varepsilon \rightharpoonup 0$. Slično, imamo i $\partial_1 u_2^\varepsilon + \partial_2 u_1^\varepsilon \rightharpoonup 0$. Posebno, to znači sljedeće: limes niza $(u_2^\varepsilon)_\varepsilon$ ne ovisi o x_2, pa zato prvo imamo

$$\tilde{u}_2^0 = u_2^0.$$

Kao drugo, iz $\partial_1 u_2^0 + \partial_2 \tilde{u}_1^0 = 0$ izražavanjem $\tilde{u}_1^0$ i integriranjem po x_2 dobivamo

$$\tilde{u}_1^0 = -x_2 \partial_1 u_2^0 + u_1^0.$$

Primijetite da s desne strane jednadžbe jedino faktor x_2 ovisi o x_2, jer obje funkcije u_1^0 i u_2^0 ne ovise o x_2.

DZ 10. *Argumentirajte gornje tvrdnje i dapače, dokažite jake konvergencije $\partial_2 u_2^\varepsilon \to 0$ i $\partial_1 u_2^\varepsilon + \partial_2 u_1^\varepsilon \to 0$ u $L^2(\Omega)$.*

Znajući da to zadovoljavaju limesi, slično ćemo uvrštavati i test funkcije. Ali, redom. Proglasit ćemo to kao vektorski prostor W:

$$W = \{(u_1, u_2) \in H^1([0,1]) \ : \ u_1(0) = u_2(0) = 0\}.$$

Prvo uvrstimo test funkciju kakvu god možemo, ali da obje strane konvergiraju. Zbog člana $\frac{1}{\varepsilon^2}$ u $\mathbf{e}_\varepsilon$, pomnožimo obje strane s ε^2 i pustimo jednadžbu da teži k nuli. Kako $\mathbf{e}_\varepsilon(u^\varepsilon)$ konvergira slabo, po definiciji slabe konvergencije dobivamo

$$\int_\Omega \mathcal{C}\mathbf{e}^0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cdot & \partial_2 \tilde{v}_2 \end{bmatrix} \, d\mathbf{x} = 0.$$

DZ 11. *Dokažite lemu: ako je $u \in C(\Omega; \mathbb{R})$ takva da je $v(0, x_2) = 0$ i ako za svaku $v \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$, takvu da je $v(0, x_2) = 0$ vrijedi $\int_\Omega u \partial_2 v = 0$, tada je $u = 0$.*

Analogno vrijedi i na našim prostorima $L^2(\Omega)$ i $H^1(\Omega)$.

Dakle, dobivamo da je $\mathcal{C}e^0_{2,2} = 0$. Kako je

$$\mathcal{C}\begin{bmatrix} a & b \\ \cdot & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\mu + \lambda)a + 2\mu c & 2\mu b \\ \cdot & (2\mu + \lambda)c + 2\mu a \end{bmatrix}$$

zaključujemo da je $(2\mu + \lambda)e^0_{2,2} + 2\mu \partial_1 \tilde{u}_1^0 = 0$, odakle je

$$e^0_{2,2} = -\frac{2\mu}{2\mu + \lambda}\partial_1 \tilde{u}_1^0.$$

Sada pomnožimo jednadžbu samo s ε. Za to moramo uvrstiti test funkciju u kojoj se neće pojaviti član $\frac{1}{\varepsilon^2}\partial_2 \tilde{v}_2$. Uvrštavamo dakle bilo kakvu $\tilde{\mathbf{v}}$ za koju $\tilde{v}_2$ ne ovisi o x_2, dakle test funkcija je oblika $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1(x_1, x_2), v_2(x_1))$:

$$\int_\Omega \mathcal{C}\mathbf{e}^0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\partial_2 \tilde{v}_1 + \partial_1 v_2) \\ \cdot & 0 \end{bmatrix} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Ispada da nam v_2 ni ne treba, jer iz iste leme kao prije dobivamo $\mathcal{C}e^0_{1,2} = 0$, odakle je $e^0_{1,2} = 0$.

Konačno uvrstimo $\tilde{\mathbf{v}}$ za koju nestanu oba singularna člana u $\mathbf{e}(\tilde{\mathbf{v}})$. No, primijetite da je to točno tada kada je $\tilde{\mathbf{v}}$ istog oblika kao $\tilde{\mathbf{u}}^0$, odnosno kada je

$$\partial_2 \tilde{v}_2 = 0, \ \partial_1 \tilde{v}_2 + \partial_2 \tilde{v}_1 = 0 \implies \tilde{v}_2 = v_2, \ \tilde{v}_1 = -x_2 \partial_1 v_2 + v_1, \ \text{ za } \mathbf{v} \in W.$$

Dobivamo

$$\int_\Omega \mathcal{C}\mathbf{e}^0 \cdot \begin{bmatrix} \partial_1 \tilde{v}_1 & 0 \\ \cdot & 0 \end{bmatrix} \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}.$$

Prvo, koristeći dobiveno za $e^0_{2,2}$ i $e^0_{1,2}$, tj. iz

$$\mathbf{e}^0 = \begin{bmatrix} \partial_1 \tilde{u}_1^0 & 0 \\ \cdot & -\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\partial_1 \tilde{u}_1^0 \end{bmatrix}$$

pojednostavljujemo:

$$\frac{\lambda(4\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\int\limits_{\Omega}\partial\tilde{u}_1^0\cdot\partial_1\tilde{v}_1\;d\mathbf{x}=\int\limits_{\Omega}\mathbf{f}\cdot\tilde{\mathbf{v}}\;d\mathbf{x}.$$

Sada uvrstimo kako su $\tilde{u}_1^0$ i $\tilde{v}_1$ dane preko funkcija jedne varijable.

$$\frac{\lambda(4\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\int\limits_{\Omega}(-x_2\partial_{1,1}u_2^0+\partial_1u_1^0)(-x_2\partial_{1,1}v_2+\partial_1v_1)\;d\mathbf{x}=\int\limits_{\Omega}f_1\cdot(-x_2\partial_1v_2+v_1^0)+f_2\cdot v_2\;d\mathbf{x}.$$

Sve funkcije, osim x_2 ovise samo o x_1. Kada izračunamo sa strane integrale

$$\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}1dx_2=1,\quad\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}x_2dx_2=0,\quad\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}x_2^2dx_2=\frac{1}{12},$$

dobivamo

$$\frac{\lambda(4\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\int\limits_0^1\frac{1}{12}\partial_{1,1}u_2^0\cdot\partial_{1,1}v_2+\partial_1u_1^0\cdot\partial_1v_1\;dx_1=\int\limits_0^1 f_1\cdot v_1+f_2\cdot v_2\;dx_1.$$

Zapravo, ovo se može rastaviti na dvije PDJ (nije sustav): naći $u_1\in H^2([0,1])$ t.d. je $u_1(0)=0$ takvu da za sve iste takve v vrijedi

$$\frac{1}{12}\frac{\lambda(4\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\int\limits_0^1\partial_{1,1}u_2^0\cdot\partial_{1,1}v_2\;dx_1=\int\limits_0^1 f_1\cdot v_1\;dx_1,$$

te, analogno, naći $u_2\in H^1([0,1])$ t.d. je $u_2(0)=0$ takvu da za sve iste takve v vrijedi

$$\frac{\lambda(4\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\int\limits_0^1\partial_1u_1^0\cdot\partial_1v_1\;dx_2=\int\limits_0^1 f_2\cdot v_2\;dx_1.$$

Obje su eliptičke, samo što je ona gornja četvrtog reda. Odgovarajuća diferencijalna jednadžba je (do na konstantu) $u_1''''=f_1$, i to je poznata jednadžba štapa četvrtog reda.

Za cijeli sustav se preko Lax–Milgrama može dokazati da ima jedinstveno rješenje. Onda možemo zaključiti i da cijela familija $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ konvergira prema dobivenom limesu, a ne samo na podnizu. Da je ta jedinstvenost nešto što nam pomaže u tome, promotrite u zadatku za zadaću.

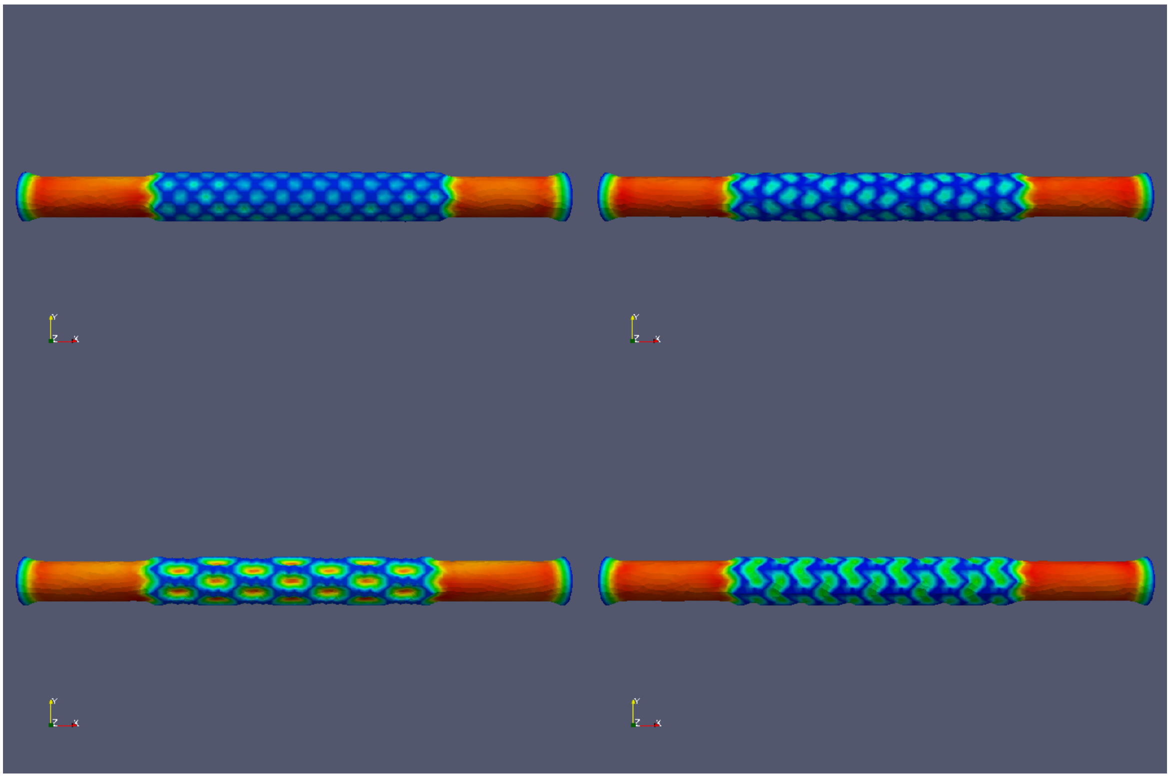
DZ 12. *Dan je niz realnih brojeva $(x_n)_{n\geqslant1}$ i realan broj L takvi da vrijedi sljedeće: svaki podniz niza ima podniz koji konvergira ka L. Dokažite da i cijeli niz $(x_n)_{n\geqslant1}$ konvergira ka L.*

3 A što dalje?

Ovo predavanje samo je zagrebalo površinu linearnih eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i asimptotskih problema u elastičnosti. Dapače, model koji smo na kraju dobili, iako ima sličnosti s nekim poznatim modelima, nema smisla jer smo krenuli iz 2D jednadžbi elastičnosti koje ništa ne modeliraju.

Teme kojima se znanstveno bavim su određeni linearni i nelinearni modeli elastičnih ljuski i štapova drugačiji od ovdje pokazanih. Primijetite da smo dobili na kraju točno jedan određeni limes-problem iskazan samo za ravnu geometriju, i u njemu nemamo debljinu kao parametar. Modeli koje ja koristim i analiziram su modeli prilagođen za neravnu geometriju, koji imaju takav parametar debljine u sebi (iako je model deifiniran za funkcije na 2D domeni), ali imaju ista asimtptoska svojstva kao 3D jednadžbe (kada se taj parametar debljine pušta u nulu, dobivaju se isti limesi). No, taj model ima još dodatna dobra svojstva: ljuska koja se modelira može imati mnogo manju glatkoću nego kod nekih drugih sličnih modela, uključuje još jednu nepoznanicu koja može osim membranskih i fleksijskih efekata mjeriti i smicanje i uvrtanje ljuske, itd.

Zašto je to korisno? Primjene su brojne. Najčešća primjena koju mi imamo je u modeliranju međudjelovanja stentova i krvnih žila. Stent je mrežasta struktura u obliku cilindra koja se smješta unutar krvnih žila kod pacijenata koji imaju probleme s njihovim začepljenjem. Modelirajući ih kao graf 1D štapova koji međudjeluje s 2D krvnom žilom, moguće je napraviti mnogo lakšu analizu nego kada cijelu strukturu modeliramo 3D jednadžbama. To je korisno kako bi se karakteristike raznih tipova stentova mogli lakše testirati, a možda i tražiti optimalan oblik stenta, koji je po nekom određenom kriteriju najbolji.



Još jedna zanimljiva primjena je traženje svojstvenih vrijednosti. Sigurno ste čuli na srednjoškolskoj fizici za rezonancu i zašto primjerice vojnici ne stupaju preko mostova. Iako se čak i mostovi mogu modelirati kao struktura ljusaka i štapova, i za stentove je bitno istražiti svojstvene vrijednosti iz istog razloga. Ukratko, par $(u_\lambda, \lambda) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ je svojstveni par za neku PDJ ako vrijedi

$$a(u_\lambda, v) = \lambda \int\limits_\Omega u_\lambda v d\mathbf{x},$$

za sve $v \in H^1(\Omega)$ (u slučaju Laplaceovog operatora i glatkih funkcija, to znači $\Delta u_\lambda = \lambda u_\lambda$, što je nešto što ima smisla znajući definiciju svojstvenih vrijednosti u konačnodimenzionalnim prostorima). To znači da ako se na sustav koji promatramo sustavno primjenjuje sila f koja je paralelna s rješenjem u_λ, ovisno o svojstvenoj vrijednosti λ to sustav se može smiriti ili možda eksplodirati s vremenom. To je bitno kod mostova (ne samo vojnici, već i udari vjetra mogu uništiti most s relativno malo energije), ali i kod stentova, da se struktura ne razleti kada krv kola žilama. Bitno je poznavati svojstvene vrijednosti i znati da se one ne nalaze u skupu parametara koji se mogu pojaviti u svakodnevnim uvjetima.

Zanimljive grafike modela s kojima se bavim (iako ne iz projekta na kojemu sam ja sudjelovao): `https://www.math.uh.edu/~canic/stent_files/movie_gallery_bending.html`.

Domaća zadaća

Da bi se zadaća smatrala riješenom, treba riješiti barem pola navedenih zadataka, i poslati na mail u bilo kojem formatu do 9.7.2021. Kako mnogi zadatci imaju podzadatke, među kojima su mnogi lagani, u pravilu nema polovičnih bodova (zadatak treba riješiti cijeli da bi se brojao riješenim). Ukoliko vas ova tema zanima, ali ste zapeli s dijelom zadataka za domaću zadaću, slobodno se javite za hintove (a možete se javiti i neovisno o zadaći).