1. (a) Neka je $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Odredite limes u $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_n e^{-x}\psi(x-n).$$

(b) Dokažite ili opovrgnite: $e^x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. **Uputa:** Iskoristite rezultat iz a) dijela.

Rješenje:

(a) S obzirom da niz ψ_n po točkama konvergira k 0, provjerit ćemo da je $\mathcal{S}-\lim_n \psi_n = 0$. Za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ trebamo ocijeniti

$$|x^\alpha \partial^\beta \psi_n(x)|.$$

Prije svega, vidimo da su derivacije funkcije ψ_n oblika

$$\partial^\beta \psi_n(x) = \partial^\beta(e^{-x}\psi(x-n)) = e^{-x}\sum_{k=1}^{\beta} a_k \partial^k \psi(x-n),$$

za neke $a_k \in \mathbb{R}$. Za $\varepsilon > 0$ neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in \operatorname{supp} \tau_n\psi$ vrijedi

$$|x|^\alpha e^{-x} < \frac{\varepsilon}{\beta \cdot \max_{k\leq\beta} |a_k| ||\partial^k \psi||_{L^\infty}};$$

takav postoji zbog kompaktnosti nosača od ψ i činjenice da $x^\alpha e^{-x} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Tada imamo

$$|x^\alpha \partial^\beta \psi_n(x)| \leq |x|^\alpha e^{-x} \sum_{k=1}^{\beta} |a_k||\partial^k \tau_n \psi(x)| < \varepsilon.$$

(b) Neka je sada ψ standardni izglađivač. Tada prema a) dijelu slijedi $\psi_n \to 0$. S druge strane,

$$\langle e^x, e^{-x}\tau_n\psi\rangle = \int \psi(x-n)dx = 1,$$

pa zaključujemo da $e^x \notin \mathcal{S}'$.

2. Pokažite: ako je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tada je i $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Rješenje:

Za početak, lako se vidi da je Fourierova transformacija Schwartzove funkcije C^∞ (deriviranje pod integralom). Nadalje, neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ proizvoljni. Prema napomeni s vježbi, možemo koristiti i sljedeće ekvivalentne polunorme na $\mathcal{S}$: $f \mapsto ||\partial^\beta(x^\alpha f)||_{L^\infty}$. Neka su stoga $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ proizvoljni. Imamo

$$\partial^\beta(\xi^\alpha \hat{f})(\xi) = \partial^\beta\Big(\frac{1}{(2\pi i)^|\alpha|}\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)\Big) = (2\pi i)^{|\beta|-|\alpha|}\widehat{x^\beta\partial^\alpha f}(\xi).$$

Stoga je

$$|\partial^\beta(\xi^\alpha \hat{f})(\xi)| \leq (2\pi i)^{|\beta|-|\alpha|} \cdot |\widehat{x^\beta\partial^\alpha f}(\xi)| \leq (2\pi i)^{|\beta|-|\alpha|} \cdot ||x^\beta \partial^\alpha f||_{L^1},$$

odakle slijedi da su sve polunorme konačne, tj. $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

3. Dokažite ili opovrgnite: ako je $(f_n)_n$ niz u $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ te $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ takva da vrijedi $f_n \overset{\text{s.s.}}{\to} f$, tada vrijedi i $f_n \overset{\mathcal{S}'}{\to} f$.

   Rješenje:

   Odgovor je negativan. Neka je f_n standardni izglađujući niz. Tada vrijedi $f_n \overset{\text{s.s.}}{\to} 0$. S druge strane, na vježbama smo pokazali da vrijedi $f_n \overset{\mathcal{S}'}{\to} \delta_0 \neq 0$.

4. Neka su $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ te $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ takve da je $\varphi \equiv 0$ na $\operatorname{supp} T$. Je li tada nužno i $\langle T, \varphi \rangle = 0$?

   Rješenje:

   Uzmimo $T = \delta_0'$, te neka je $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ takva da vrijedi

   (a) $0 \leq \psi \leq 1$,

   (b) $\psi \equiv 1$ na $[-1, 1]$.

   Stavimo $\varphi(x) := x \cdot \psi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Tada je $\psi \equiv 0$ na $\operatorname{supp} \delta_0' = \{0\}$, dok je s druge strane $\langle \delta_0', \varphi \rangle = -\varphi'(0) = -1$.

5. Odredite limes u prostoru distribucija niza $f_n = n \cdot \mathbb{1}_{[0,1/n]}$.

   Rješenje:

   Za proizvoljnu $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ imamo

$$\langle f_n, \varphi \rangle = n \cdot \int_{[0,1/n]} \varphi(x) dx =_{[0,1/n]} \varphi(x) dx \to \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

   pa zaključujemo da je

$$\mathcal{D}' - \lim_n f_n = \delta_0.$$