

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 26. lipnja 2023.

Zadatak 1 (7 bodova) Dokažite da je skup

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y + x < 4\}$$

otvoren u \mathbb{R}^2 .

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 26. lipnja 2023.

Zadatak 2 (7 bodova) Može li se funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - \sin(xy)}{y}$$

dodefinirati do neprekidne funkcije na \mathbb{R}^2 ?

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 26. lipnja 2023.

Zadatak 3 (8 bodova)

- (a) (4 boda) Može li se funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana kao

$$f(x, y) = \frac{x^4 y + 2x^3 y^2 + 7xy^4}{(x^2 + 4y^2)(x^2 + 5y^2)}$$

proširiti do diferencijabilne funkcije čija je domena čitav \mathbb{R}^2 ?

- (b) (4 boda) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, 2x - y + z)$ te diferencijabilna funkcija $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $g(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$. Neka je $h = (h_1, h_2, h_3) = g \circ f$. Odredite $\frac{\partial h_1}{\partial x}(1, 2, 1) + \frac{\partial h_1}{\partial y}(1, 2, 1) + \frac{\partial h_3}{\partial z}(1, 2, 1)$.

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 26. lipnja 2023.

Zadatak 4 (8 bodova)

- (a) (4 boda) Odredite interior, zatvarač i rub skupa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y - 1) > 0, x > 2\}.$$

- (b) (4 boda) Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ funkcija. Definirajte diferencijabilnost funkcije u točki $x_0 \in U$. Dokažite sljedeću tvrdnju: ako je f diferencijabilna u točki $x_0 \in U$, onda je diferencijal funkcije f u točki x_0 jedinstveno određen funkcijom f i točkom x_0 .

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 26. lipnja 2023.

Zadatak 1 (7 bodova) Dokažite da je skup

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y + x > 3\}$$

otvoren u \mathbb{R}^2 .

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 26. lipnja 2023.

Zadatak 2 (7 bodova) Može li se funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$

$$f(x, y) = \frac{y^2 - \sin(xy)}{x}$$

dodefinirati do neprekidne funkcije na \mathbb{R}^2 ?

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 26. lipnja 2023.

Zadatak 3 (8 bodova)

- (a) (4 boda) Može li se funkcija $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana kao

$$f(x, y) = \frac{x^4 y + 7x^3 y^2 + 8xy^4}{(x^2 + 3y^2)(x^2 + 4y^2)}$$

proširiti do diferencijabilne funkcije čija je domena čitav \mathbb{R}^2 ?

- (b) (4 boda) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, 2x + y - z)$ te diferencijabilna funkcija $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $g(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$. Neka je $h = (h_1, h_2, h_3) = g \circ f$. Odredite $\frac{\partial h_1}{\partial x}(1, 2, 1) + \frac{\partial h_1}{\partial y}(1, 2, 1) + \frac{\partial h_3}{\partial z}(1, 2, 1)$.

Osnove matematičke analize

Drugi kolokvij - 26. lipnja 2023.

Zadatak 4 (8 bodova)

- (a) (4 boda) Odredite interior, zatvarač i rub skupa

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)y < 0, y > 3\}.$$

- (b) (4 boda) Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ funkcija. Definirajte diferencijabilnost funkcije u točki $x_0 \in U$. Dokažite sljedeću tvrdnju: ako je f diferencijabilna u točki $x_0 \in U$, onda je diferencijal funkcije f u točki x_0 jedinstveno određen funkcijom f i točkom x_0 .