SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Radulović, Borja Rukavina

Osnove matematičke analize

– skripta –

Zagreb, 31. svibnja 2022.

Sadržaj

Poglavlje 1

Zasnivanje skupova $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$

1. Skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$

Definicija 1.1. *Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je definiran Peanovim aksiomima:*

(P1) $(\exists 1 \in \mathbb{N})$ *i* 1 *nije sljedbenik ni jednog elementa iz* $\mathbb{N}$

(P2) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! s(n) \in \mathbb{N})$ *i* $s(n) = s(m) \Rightarrow n = m$

(P3) Aksiom matematičke indukcije: Ako je $S \subseteq \mathbb{N}$ podskup takav da je

- $1 \in S$ *(baza)*
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \in S \Rightarrow s(n) \in S$ *(korak)*

tada je $S = \mathbb{N}$.

Zadatak 1.1. *Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

a) $2^n > n$,

b) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Rješenje: Koristimo aksiom matematičke indukcije ($P3$):

a) Baza ($n = 1$): $2^1 > 1$

Korak: pretpostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$2^n > n. \tag{1.1}$$

Tada iz (1.1) slijedi da je $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n = n + n \geq n + 1$.

b) Baza ($n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2. \tag{1.2}$$

Korak: pretpostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2. \tag{1.3}$$

Tada je

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \tag{1.4}$$

$\square$

Zadatak 1.2. *Dokažite da svaki neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima najmanji element, tj. $\exists s \in S$ takav da $s \leq k$, $\forall k \in S$.*

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da tvrdnja ne vrijedi. Tada postoji neprazni podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ koji nema najmanji element. Neka je

$$R\colon = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq s \text{ za svaki } s \in S\}. \tag{1.5}$$

Kako S nema najmanji element, jasno je da vrijedi $R \cap S = \emptyset$. Jasno je da je $1 \in R$ (aksiom $(P1)$). Pretpostavimo da je $k \in R$. Tada svaki prirodni broj manji ili jednak k mora također biti manji ili jednak s za svaki $s \in S$. Stoga je $1, 2, \ldots, k \in R$. Iz činjenice da $R \cap S = \emptyset$, vidimo da vrijedi $1, 2, \ldots, k \notin S$. Da je $k + 1 \in S$, tada bi $k + 1$ bio najmanji element skupa S. Ova činjenica implicira da $k + 1 \in R$. Stoga, princip matematičke indukcije implicira da je $R = \mathbb{N}$. Tada je S prazan skup, što je kontradikcija s pretpostavkom da je S neprazan. Stoga, svaki neprazan skup prirodnih brojeva mora imati najmanji element. □

Definicija 1.2. *Skup cijelih brojeva definiran je sa*

$$\mathbb{Z}\colon = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}. \tag{1.6}$$

Definicija 1.3. *Skup racionalnih brojeva definiran je sa*

$$\mathbb{Q}\colon = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}. \tag{1.7}$$

Zadatak 1.3. *Dokažite da jednadžba $q^2 = 2$ nema rješenja u skupu $\mathbb{Q}$.*

Rješenje: Pretpostavimo da postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $q^2 = 2$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $q = \frac{m}{n}$, za $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ te da su m i n relativno prosti, tj. nemaju zajedničkog djeljitelja različitog od -1 i 1 ("razlomak je maksimalno skraćen"). Tada je

$$\frac{m^2}{n^2} = 2, \tag{1.8}$$

odakle slijedi

$$m^2 = 2n^2, \tag{1.9}$$

pa je m^2 djeljiv s 2. Tada je i m djeljiv s 2, jer u slučaju da nije, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k + 1$ pa bi slijedilo da

$$m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1, \tag{1.10}$$

nije djeljiv s 2, što je kontradikcija. Dakle, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k$. Tada iz

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2, \tag{1.11}$$

slijedi

$$n^2 = 2k^2, \tag{1.12}$$

odakle slično vidimo da je i n djeljiv s 2, tj. postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $n = 2l$. Time smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da su m i n relativno prosti.

□

2. Skup $\mathbb{R}$

Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ definiramo pomoću aksioma:

1. Aksiomi zbrajanja $(+)$

   (A1) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x+y)+z = x+(y+z)$ (asocijativnost)

   (A2) $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x+0 = 0+x = x$ (neutralni element)

   (A3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists (-x) \in \mathbb{R})\ x+(-x) = (-x)+x = 0$ (inverz)

   (A4) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x+y = y+x$ (komutativnost)

$(\mathbb{R}, +)$ je abelova grupa.

2. Aksiomi množenja $(\cdot)$

   (A5) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (xy)z = x(yz)$ (asocijativnost)

   (A6) $(\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall x \in \mathbb{R})\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (neutralni element)

   (A7) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbb{R})\ x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$ (inverz)

   (A8) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ xy = yx$ (komutativnost)

   (A9) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x(y+z) = xy + xz$ (distributivnost $\cdot$ prema $+$)

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je polje.

Zadatak 2.1. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dokažite:*

a) $x+y = x+z \Rightarrow y = z$,

b) $-(-x) = x$,

c) $x \neq 0,\ x \cdot y = x \Rightarrow y = 1$,

d) $0 \cdot x = 0$,

e) $(-x) \cdot y = -(xy)$.

Rješenje:

a) $y = (A2) = 0+y = (A3) = ((-x)+x)+y = (A1) = (-x)+(x+y) = (pretpostavka) = (-x)+(x+z) = (A1) = ((-x)+x)+z = (A3) = 0+z = (A2) = z$,

b) $(-x)+(-(-x)) = (A3) = 0 = (A3) = (-x)+x \Rightarrow$ (koristimo a)) $-(-x) = x$,

c) $1 = (A7) = x^{-1} \cdot x = (pretpostavka) = x^{-1} \cdot (xy) = (A5) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = (A7) = 1 \cdot y = (A6) = y$,

d) $0 \cdot x = (A2) = (0+0) \cdot x = (A9) = 0 \cdot x + 0 \cdot x = 2 \cdot 0x$ $(1 \cdot 0x = 2 \cdot 0x)$
Pretpostavimo da vrijedi $0 \cdot x \neq 0$. Tada iz c) slijedi $1 = 2$ $(1+0 = 1+1)$, odakle dobijemo (koristeći dio a)) $0 = 1$, što je kontradikcija s $(A6)$. $(1 \neq 0)$

e) $-(xy)+xy = (A3) = 0 = (d)) = 0 \cdot y = (A3) = ((-x)+x) \cdot y = (A9) = (-x) \cdot y + xy$.
Iz dijela a) imamo $(-x) \cdot y = -(xy)$.

$\square$

3. Aksiomi uređaja

(A10) $(\forall x, y, \in \mathbb{R})\ (x \leq y) \vee (y \leq x)$ (linearnost)

(A11) $(\forall x, y, \in \mathbb{R})\ ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (x = y)$ (antisimetričnost)

(A12) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z)$ (tranzitivnost)

(A13) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \leq y) \Rightarrow x + z \leq y + z$ (usklađenost zbrajanja)

(A14) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ ((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \Rightarrow x \cdot y \geq 0$ (usklađenost množenja)

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je totalno uređeno polje.

Zadatak 2.2. *Dokažite da za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

a) $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$,

b) $0 < 1$,

c) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$,

d) $0 \leq x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$.

Rješenje:

a) Iz $x \leq 0$ koristeći (A13) imamo $0 = (A3) = (-x) + x \leq (-x) + 0 = (A2) = -x$, iz čega slijedi $0 \leq -x$.

b) Zbog (A6) imamo $0 \neq 1$ pa vrijedi $0 < 1$ ili $1 < 0$. Pretpostavimo da vrijedi $1 < 0$. Iz a) imamo $-1 > 0$ pa iz (A14) dobivamo $(-1) \cdot (-1) > 0$.

S druge strane, koristeći tvrdnje *b*) i *e*) iz Zadatka 2.1 imamo $(-1)\cdot(-1) = -(1\cdot(-1)) = -(-(1 \cdot 1)) = 1$, pa vrijedi $1 > 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $1 < 0$.

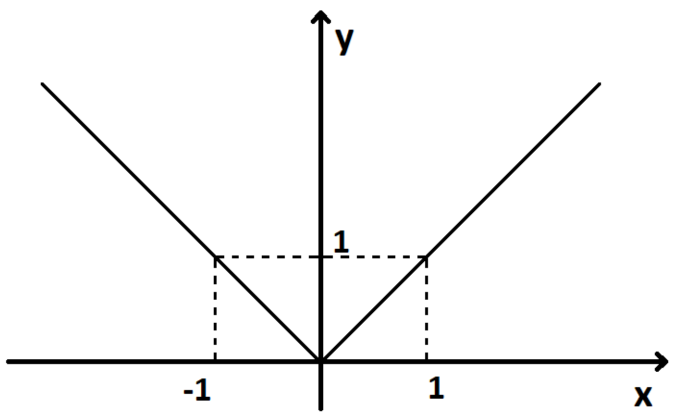
c) Koristeći tvrdnju *e*) iz Zadatka 2.1 dobivamo $(x - y)(x + y) = (A9) = (x - y)x + (x - y)y = (A9) = x^2 + (-y)x + xy + (-y)y = x^2 - xy + xy - y^2 = (A3) = x^2 + 0 - y^2 = (A2) = x^2 - y^2$.

d) $0 \leq x \leq y \Rightarrow x, y \geq 0$ i $y - x \geq 0$ pa imamo $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) \geq (A14) \geq 0$ (gdje je $y - x \geq 0$ i $y + x \geq y + 0 \geq 0 + 0 = 0$), dobivamo $y^2 \geq x^2$.

□

Definicija 2.1. *Apsolutna vrijednost je funkcija $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana sa*

$$|x| :\ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$



Napomena 2.2. *Apsolutna vrijednost ima sljedeća svojstva:*

a) $|x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$,

b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

c) $|x+y| \leq |x| + |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$,

d) $||x| - |y|| \leq |x-y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.3. *Dokažite da za* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|. \tag{2.2}$$

Rješenje: Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.

Baza: (n=1) $|x_1| \leq |x_1|$

Korak: Pretpostavimo da (2.2) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ $(*)$. Neka su $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Tada iz Napomene 2.2 *c)* i pretpostavke $(*)$:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\Big| \leq \Big|\sum_{k=1}^{n} x_k\Big| + |x_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|. \tag{2.3}$$

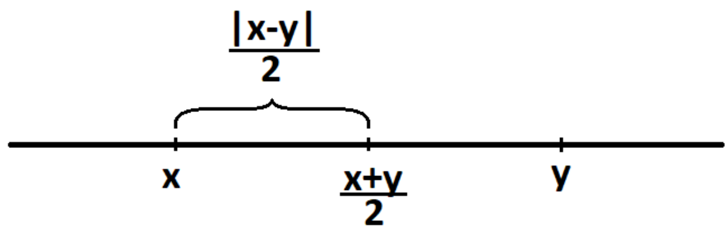
□

Zadatak 2.4. *Dokažite da za* $x, y \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

a) $\min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$, *b)* $\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.

Rješenje:

a) Grafički:



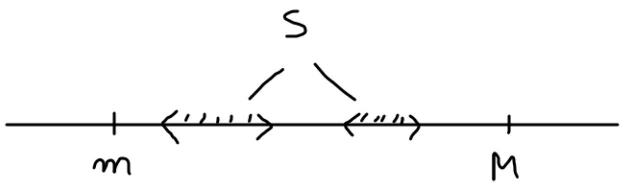
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \leq y$. Tada je $x - y \leq 0$, iz čega slijedi $|x-y| = -(x-y)$, pa je

$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(-(x-y))}{2} = x = \min\{x,y\}. \tag{2.4}$$

b) Slično (domaća zadaća).

□

Definicija 2.3. *Skup $S \subset \mathbb{R}$ je omeđen odozgo (odozdo) ako postoji $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) takav da $(\forall x \in S)\ x \leq M$ ($m \leq x$). Kažemo da je M (m) gornja (donja) međa skupa S.*



Najmanju gornju među zovemo supremum, a najveću donju među zovemo infimum skupa S. Pišemo: $\sup S$ *i* $\inf S$.

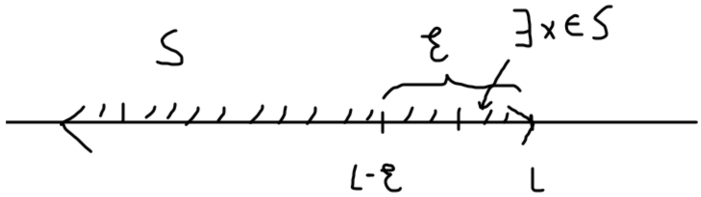
Ako je L gornja međa, tada je ona supremum ako i samo ako ne postoji manja gornja međa, odnosno $(\forall a \in \mathbb{R},\ a < L)\ \exists x \in S$ t.d. $a < x$. Slično je donja međa L infimum skupa S ako i samo ako vrijedi $(\forall a \in \mathbb{R},\ a > L)\ \exists x \in S$ t.d. $a > x$.

Zadatak 2.5. *Dokažite da je za $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$ supremum $L :=\sup S$ karakteriziran sljedećim svojstvima:*

i) $(\forall x \in S)\ x \leq L$,

ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S)\ L - \varepsilon < x$.

Rješenje: Grafički:



Pretpostavimo da je $L = \sup S$. Supremum je također i gornja međa pa vrijedi (i) po definiciji gornje međe. Pretpostavimo da (ii) ne vrijedi. Tada:

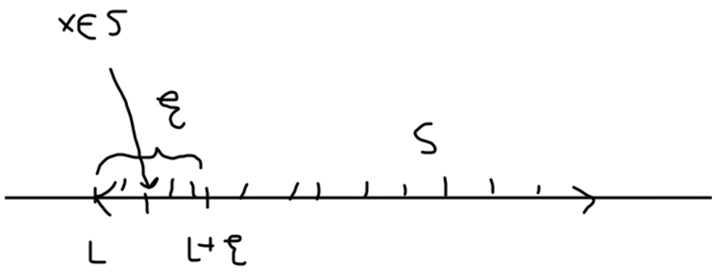
$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in S)\ L - \varepsilon \geq x, \tag{2.5}$$

što znači da je $L - \varepsilon$ gornja međa skupa S i $L - \varepsilon < L$. Dobili smo kontradikciju, jer je L najmanja gornja međa (L je supremum).

S druge strane, neka je L takav da vrijede (i) i (ii), tada je po (i) L gornja međa skupa S. Pretpostavimo da nije najmanja gornja međa, tj. da postoji $L' \in \mathbb{R}$ gornja međa takva da $L' < L$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da $L' + \varepsilon < L$, tj. $L' < L - \varepsilon$. Po (ii) za taj ε postoji $x \in S$ takav da $L - \varepsilon < x$, no tada je $L' < x$ što je kontradikcija s pretpostavkom da je L' gornja međa. Dakle, L je najmanja gornja međa pa je i supremum. □

Napomena 2.4.

$$L = \inf S \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & (\forall x \in S)\ x \geq L, \\ (ii) & (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S)\ L + \varepsilon > x. \end{cases} \tag{2.6}$$



$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ i $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ zadovoljavaju (A1)-(A14).

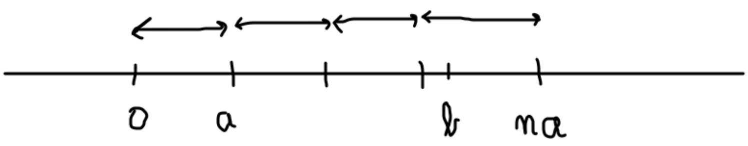
Uvodimo aksiom potpunosti:

(A15) Svaki neprazan i odozgo omeđen podskup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$ (tj. $\sup S \in \mathbb{R}$).

Napomena 2.5. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ *ne zadovoljava* $(A15)$.

Zadatak 2.6. *Dokažite da vrijedi tkzv. Arhimedov aksiom:*

(AA) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a > 0,\ b > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ na > b.$



Rješenje: Pretpostavimo da (AA) ne vrijedi, tj.

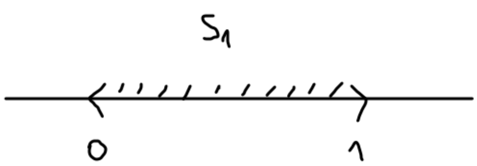
$$(\exists a, b \in \mathbb{R})(a > 0,\ b > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ na \leq b. \tag{2.7}$$

Tada je skup $S\colon = \{na | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ neprazan i odozgo omeđen. Iz $(A15)$ slijedi da postoji $L\colon = \sup S \in \mathbb{R}$. Tada za $\varepsilon\colon = a > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $na > L - \varepsilon$ tj. $(n+1)a > L$ $((n+1)a \in S)$, što je kontradikcija, jer je L gornja međa skupa S.

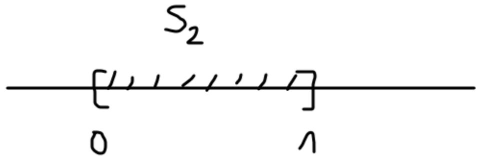
□

Definicija 2.6. *Neka je* $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$. *Ako je* $L\colon = \sup S \in S$ $(L\colon = \inf S \in S)$, *onda* $\sup S$ $(\inf S)$ *zovemo maksimum (minimum) skupa* S *i pišemo* $\max S\colon = L$ $(\min S\colon = L)$.

Primjer 2.7. *(a)* $S_1 = \langle 0, 1\rangle$, $\sup S_1 = 1$, $\inf S_1 = 0$, *nema maksimum ni minimum*



(b) $S_2 = [0, 1]$, $\sup S_2 = \max S_2 = 1$, $\inf S_2 = \min S_2 = 0$



Zadatak 2.7. *Odredite infimum i supremum skupova:*

a) $A = \left\{ \frac{1}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, *b)* $B = \left\{ \frac{x^2-4}{x^2+4} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

Rješenje:

(a) Primijetimo da vrijedi:

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{0+1} = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

iz čega slijedi da je 1 gornja međa skupa A. Nadalje, za $x = 0$ imamo

$$\frac{1}{x^2+1} = 1, \tag{2.9}$$

iz čega slijedi da je 1 maksimum skupa A. Dakle, $\sup A = \max A = 1$.

Nadalje, primijetimo da vrijedi:

$$\frac{1}{x^2+1} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

iz čega slijedi da je 0 donja međa skupa A.

Dokažimo da je $\inf A = 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\frac{1}{x^2+1} < 0 + \varepsilon, \tag{2.11}$$

to jest

$$x^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.12}$$

Po Arhimedovom aksiomu za $a = \varepsilon$ i $b = 1$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n\varepsilon > 1. \tag{2.13}$$

Tada je za $x \geq n$

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{2.14}$$

Dakle, $\inf A = 0$.

(b) Primijetimo da vrijedi:

$$\frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{x^2+4-4-4}{x^2+4} = 1 - \frac{8}{x^2+4}. \tag{2.15}$$

Nadalje, imamo:

$$1 - \frac{8}{x^2+4} < 1, \tag{2.16}$$

jer je $\frac{8}{x^2+4} > 0$, pa imamo da je 1 gornja međa skupa B. Tvrdimo da je $\sup B = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tražimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$1 - \frac{8}{x^2+4} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{8}{x^2+4} \Leftrightarrow (x^2+4)\varepsilon > 8. \tag{2.17}$$

Po Arhimedovom aksiomu sada za $a = \varepsilon$ i $b = 8$ imamo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \cdot \varepsilon > 8$, odakle je za $x \geq n$: $(x^2+4)\varepsilon \geq x^2\varepsilon \geq n^2\varepsilon \geq n\varepsilon > 8$.

Dakle, $\sup B = 1$.

S druge strane, primijetimo da vrijedi:

$$1 - \frac{8}{x^2+4} \geq 1 - \frac{8}{0+4} = 1 - 2 = -1, \tag{2.18}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je $x^2 \geq 0$.

Sada za $x = 0$ imamo $1 - \frac{8}{x^2+4} = 1 - \frac{8}{4} = -1$, te imamo $\inf B = \min B = -1$.

$\square$

Definicija 2.8. *Niz realnih brojeva je funkcija $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Umjesto $a(n)$ pišemo a_n. Niz označavamo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Kažemo da je (a_n) rastući (padajući) ako $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$). U slučaju stroge nejednakosti ($<$ ili $>$) kažemo da je (a_n) strogo rastući (strogo padajući).*

Zadatak 2.8. *Ispitajte monotonost nizova:*

a) $a_n = \frac{n-1}{n}$,

b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

c) $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+n}$.

Rješenje:

(a) Vrijedi:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{n-1}{n} < \frac{(n+1)-1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} \\ &\Leftrightarrow (n-1)(n+1) < n^2 \Leftrightarrow n^2 - 1 < n^2, \end{aligned} \tag{2.19}$$

iz čega slijedi da je (a_n) je strogo rastući.

(b) Imamo:

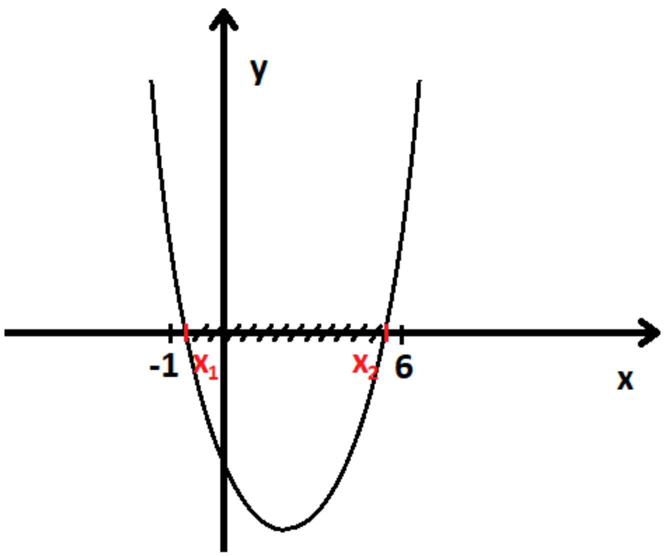
$$\begin{aligned} a_n > a_{n+1} &\Leftrightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{n+1} > \sqrt{n} + \sqrt{n+2} \ /^2 \\ &\Leftrightarrow 4(n+1) > n + 2\sqrt{n(n+2)} + n + 2 \\ &\Leftrightarrow n + 1 > \sqrt{n(n+2)} \ ^2 \\ &\Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \\ &\Leftrightarrow 1 > 0, \end{aligned} \tag{2.20}$$

iz čega slijedi da je (a_n) strogo padajući.

(c) Vrijedi:

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^2+1}{3(n+1)^2+n+1} < \frac{n^2+1}{3n^2+n} \\ &\Leftrightarrow \frac{n^2+2n+2}{3n^2+7n+4} < \frac{n^2+1}{3n^2+n} \\ &\Leftrightarrow (n^2+2n+2)(3n^2+n) < (n^2+1)(3n^2+7n+4) \\ &\Leftrightarrow 3n^4+7n^3+8n^2+2n < 3n^4+7n^3+7n^2+7n+4 \\ &\Leftrightarrow n^2-5n-4<0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Rješavamo jednadžbu $x^2-5x-4=0$ te dobivamo rješenja $x_1 = \frac{5-\sqrt{41}}{2} \approx -0.7$ i $x_2 = \frac{5+\sqrt{41}}{2} \approx 5.7$.



Dakle, $n < x_2 \Leftrightarrow n < 6$ i $n > x_2 \Leftrightarrow n \geq 6$.

Dakle, vrijedi:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 < a_7 < a_8 < \dots, \tag{2.22}$$

gdje je a_6 najmanji član niza. Dakle, niz je padajući do a_6, a nadalje je rastući.

□

Zadatak 2.9. *Odredite infimum i supremum skupova:*

a) $S = \{\frac{3n-2}{n+3} | n \in \mathbb{N}\}$, *b)* $S = \{\frac{n^2+1}{2n^2+n} | n \in \mathbb{N}\}$.

Rješenje:

(a) Imamo:

$$a_n = \frac{3n-2}{n+3} = \frac{3(n+3)-3\cdot 3-2}{n+3} = 3 - \frac{11}{n+3}. \tag{2.23}$$

Dakle, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući niz, iz čega slijedi:

$$\inf S = \min S = a_1 = 3 - \frac{11}{4} = \frac{1}{4}. \tag{2.24}$$

Tvrdimo da je $\sup S = 3$. Vrijedi:

$$a_n = 3 - \frac{11}{n+3} \leq 3, \tag{2.25}$$

iz čega slijedi da je 3 gornja međa skupa S.

Neka je $\varepsilon > 0$. Imamo:

$$\begin{aligned} a_n > 3-\varepsilon &\Leftrightarrow 3 - \frac{11}{n+3} > 3-\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{11}{n+3} \Leftrightarrow (n+3)\varepsilon > 11. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Po Arhimedovom aksiomu, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0\varepsilon > 11$ ($a = \varepsilon$, $b = 11$), pa je $(n_0+3)\varepsilon > 11$, odakle slijedi $a_{n_0} > 3 - \varepsilon$. Dakle, $\sup S = 3$.

(b) Imamo niz:

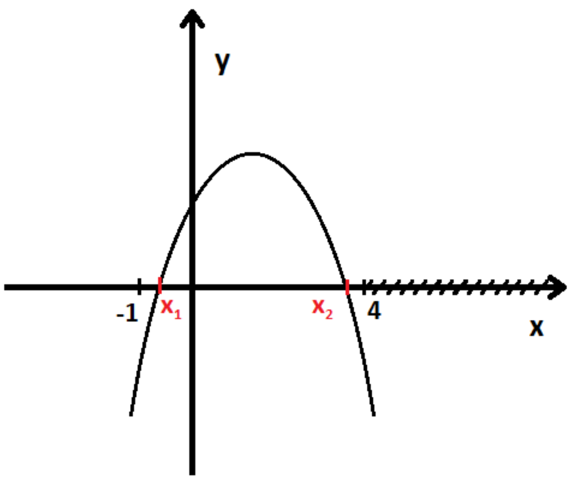
$$a_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n}. \tag{2.27}$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{n^2+1}{2n^2+n} < \frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2+n+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{n^2+1}{2n^2+n} < \frac{n^2+2n+2}{2n^2+5n+3} \\ &\Leftrightarrow (n^2+1)(2n^2+5n+3) < (n^2+2n+2)(2n^2+n) \\ &\Leftrightarrow 2n^4+5n^3+5n^2+5n+3 < 2n^4+5n^3+6n^2+2n \\ &\Leftrightarrow -n^2+3n+3 < 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Vrijedi:

$$-x^2+3x+3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{-2} = \frac{3 \mp \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x_1 = -0.79 \; x_2 = 3.79. \tag{2.29}$$



Dakle, (2.28) vrijedi za $n > x_2 \Leftrightarrow n \geq 4$. Tada je niz rastući. Imamo:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 < a_5 < a_6 < \dots. \tag{2.30}$$

Slijedi da je $\inf S = \min S = a_4 = \frac{17}{36}$.

$\sup S =?$. Imamo:

$$a_1 = \frac{1^2+1}{2\cdot 1^2+1} = \frac{2}{3}. \tag{2.31}$$

Vrijedi:

$$a_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n} = \frac{1}{2}\frac{n^2+1}{n^2+\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\frac{n^2+\frac{n}{2}-\frac{n}{2}+1}{n^2+\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\frac{n}{2}-1}{n^2+\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{n-2}{4n^2+2n} \leq \frac{1}{2},\ n \geq 2. \tag{2.32}$$

Dakle, $\sup S = \max S = a_1 = \frac{2}{3}$. □

Zadatak 2.10. *Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđeni skupovi. Dokažite:*

(a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$,

(b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Rješenje:

(a) Zbog

$$x + y \leq \sup A + \sup B,\ \forall x \in A,\ y \in B, \tag{2.33}$$

je $\sup A + \sup B$ gornja međa skupa $A+B$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada

$$(\exists x_0 \in A)(\exists y_0 \in B)\ x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } y_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.34}$$

Tada je $x_0 + y_0 \in A + B$ i $x_0 + y_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} + \sup B - \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \sup B - \varepsilon$.

(b) Bez smanjenja općenitosti imamo $\sup A \leq \sup B$ (inače zamijenimo uloge A i B). Vrijedi:

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ili } x \in B \Rightarrow x \leq \sup A \leq \sup B \text{ ili } x \leq \sup B. \tag{2.35}$$

Dakle, imamo:

$$(\forall x \in S = A \cup B)\ x \leq \sup B, \tag{2.36}$$

pa je $\sup B$ gornja međa skupa $A \cup B$. Dokažimo da je to i supremum. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada

$$(\exists x_0 \in B \subset A \cup B = S)\ x_0 > \sup B - \varepsilon. \tag{2.37}$$

Dakle, $\sup B$ je najmanja gornja međa skup $A \cup B$.

Slijedi da je $\sup B = \max\{\sup A, \sup B\}$ supremum skupa $A \cup B$.

□

Zadatak 2.11 (Domaća zadaća)**.** *Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni skupovi. Dokažite:*

(a) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$,

(b) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Zadatak 2.12. *Odredite infimum i supremum skupova:*

(a) $S = \{\frac{m-n-1}{mn+4m+3n+12} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $S = \{(-1)^n \frac{n^2+2}{n^2+7} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Rješenje:

(a) Vrijedi:

$$\frac{m-n-1}{mn+4m+3n+12} = \frac{m-n-1}{(m+3)(n+4)} = \frac{m+3-(n+4)}{(m+3)(n+4)} = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{m+3}. \tag{2.38}$$

Dakle, $S = A + B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \{\frac{1}{n+4} \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ (padajući)},\\ B &:= \{-\frac{1}{m+3} \mid m \in \mathbb{N}\} \text{ (rastući)}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} &\sup A = \max A = \frac{1}{5} \ (n=1), \quad \sup B = 0,\\ &\inf A = 0, \quad \inf B = \min B = -\frac{1}{4} \ (m=1). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} &\sup S = \sup A + \sup B = \frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{5} \text{ (nije maksimum)},\\ &\inf S = \inf A + \inf B = 0 + (-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} \text{ (nije minimum)}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

(b) Definiramo $S := A \cup B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \{(-1)^{2k}\frac{(2k)^2+2}{(2k)^2+7} \mid k \in \mathbb{N}\} = \{\frac{4k^2+2}{4k^2+7} \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ (rastući)},\\ B &:= \{(-1)^{2k-1}\frac{(2k-1)^2+2}{(2k-1)^2+7} \mid k \in \mathbb{N}\} = \{-\frac{(2k-1)^2+2}{(2k-1)^2+7} \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ (padajući)}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Skup A. Definiramo:

$$a_k = \frac{4k^2+2}{4k^2+7} = 1 - \frac{5}{4k^2+7} < 1. \tag{2.43}$$

Niz a_k je rastući, pa vrijedi $\inf A = \min A = a_1 = \frac{6}{11}$.

1 je gornja međa. Dokažimo da je $\sup A = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} a_k > 1 - \varepsilon &\Leftrightarrow 1 - \frac{5}{4k^2+7} > 1 - \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{4k^2+7} \Leftrightarrow (4k^2+7)\varepsilon > 5. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon$ i $b = 5$) postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0\varepsilon > 5$, pa vrijedi:

$$(4k_0^2 + 7)\varepsilon > (4k_0^2)\varepsilon > k_0^2\varepsilon \geq k_0\varepsilon > 5. \tag{2.45}$$

Dakle, $\sup A = 1$.

Skup B. (Domaća zadaća).

Slično, dobivamo $\inf B = -1$ te $\sup B = \max B = -\frac{3}{8}$.

Dakle,

$$\begin{aligned} \sup S &= \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} = \max\{1, -\frac{3}{8}\} = 1, \\ \inf S &= \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\} = \min\{\frac{6}{11}, -1\} = -1. \end{aligned} \tag{2.46}$$

□

Zadatak 2.13. *Neka su $A, B \subset [0, \infty\rangle$ odozgo omeđeni i neprazni. Definiramo:*

$$A \cdot B = \{xy \mid x \in A,\ y \in B\}. \tag{2.47}$$

Dokažite:

(a) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$,

(b) $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$ *(domaća zadaća).*

Rješenje:

(a) Ako je $\sup A = 0$, onda je $A = \{0\}$ pa je $A \cdot B = \{0\}$ i tvrdnja slijedi.

Pretpostavimo da je $\sup A > 0$. Vrijedi:

$$xy \leq \sup A \sup B,\ \forall x \in A,\ \forall x \in B, \tag{2.48}$$

pa slijedi da je $\sup A \sup B$ gornja međa skupa $A \cdot B$.

Dokažimo da je supremum. Neka je $0 < \varepsilon < \sup A \sup B$. Tada za:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon}{2\sup B} > 0\ (\exists x \in A)\ x > \sup A - \varepsilon_1, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon}{2\sup A} > 0\ (\exists y \in B)\ y > \sup B - \varepsilon_2. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Sada imamo:

$$xy > (\sup A - \varepsilon_1)(\sup B - \varepsilon_2) = \sup A \sup B - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4\sup A \sup B} > \sup A \sup B - \varepsilon. \tag{2.50}$$

□

Napomena 2.9. *Ako su $A, B \subset \mathbb{R}$ neprazni i omeđeni, tada je*

$$\begin{aligned} \sup(A \cdot B) &= \max\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}, \\ \inf(A \cdot B) &= \min\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}, \end{aligned} \tag{2.51}$$

Zadatak 2.14. *Odredite infimum i supremum skupova:*

(a) $S = \{\frac{2n-1}{n}\frac{1+m}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $S = \{\frac{n^2 x}{n^2 x + 2x + n^2 + 2} \mid n \in \mathbb{N},\ x \geq 0\}$.

Rješenje:

(a) Neka je $S = A \cdot B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \{\frac{2n-1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \subset [0, \infty\rangle \text{ (rastući)}, \\ B &:= \{\frac{1+m}{m} | m \in \mathbb{N}\} \subset [0, \infty\rangle \text{ (padajući)}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Dobivamo da je $\sup A = 2$, $\inf A = \min A = 1$ $(n = 1)$ - rastući niz te $\sup B = \max B = 2$ $(m = 1)$ i $\inf B = 1$ - padajući niz.

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} &\sup S = \sup A \cdot \sup B = 2 \cdot 2 = 4, \\ &\inf S = \inf A \cdot \inf B = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned} \tag{2.53}$$

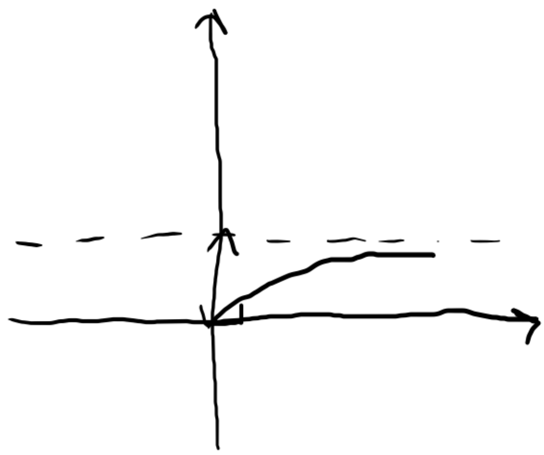
(b) Neka je

$$S = \{\frac{n^2}{n^2+2} \cdot \frac{x}{x+1} \mid n \in \mathbb{N},\ x \geq 0\} = A \cdot B, \tag{2.54}$$

gdje je

$$A := \{\frac{n^2+2-2}{n^2+2} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0, \infty\rangle,\ B := \{\frac{x+1-1}{x+1} \mid x \geq\} \subseteq [0, \infty\rangle. \tag{2.55}$$

Lako dobivamo da je $\sup A = 1$ i $\inf A = \min A = \frac{1}{3}$ $(n = 1)$. Ilustriramo funkciju $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ za $x \geq 0$:



Dakle, dobivamo da je $B = [0, 1\rangle$. Slijedi da je $\sup B = 1$ te $\inf B = \min B = 0$ $(x = 0)$.

Slijedi da je $\sup S = \sup A \cdot \sup B = 1 \cdot 1 = 1$ te $\inf S = \inf A \cdot \inf B = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 = \min S$.

□

Poglavlje 2

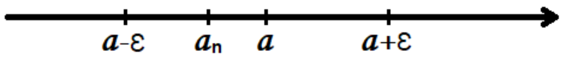
Nizovi u $\mathbb{R}$

1. Konvergencija nizova

Definicija 1.1. *Niz realnih brojeva* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira k realnom broju* a *ako vrijedi:*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ |a_n - a| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0. \tag{1.1}$$

Pišemo: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.



Zadatak 1.1. *Dokažite:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p} = 0,\ p > 0. \tag{1.2}$$

Rješenje: Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n^p} < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0 \\ &\Leftrightarrow n\cdot\varepsilon^{1/p} > 1,\ \forall n \geq n_0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon^{1/p}$ i $b = 1$) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $n_0\varepsilon^{1/p} > 1$. □

Teorem 1.2 (Teorem o sendviču)**.** *Neka su* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentni nizovi tako da vrijedi* $a_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ *i* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: L$*. Ako je* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz takav da je* $a_n \leq c_n \leq b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$*, onda je i* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentan i* $\lim_{n\to\infty} c_n = L$*.*

Zadatak 1.2. *Izračunajte limese:*

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2\cos(n)+8n}{n^3+1}$,

b) $\lim_{n\to\infty} q^n,\ q \in \langle 0, 1\rangle$,

c) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$,

d) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a},\ a \geq 1$,

e) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$

f) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n!}$.

Rješenje:

a) Vrijedi:

$$0 \leq \left|\frac{5n^2\cos n + 8n}{n^3+1}\right| \leq \frac{5n^2|\cos n| + 8n}{n^3+1} \leq \frac{5+\frac{8}{n}}{n+\frac{1}{n^2}} \to 0,\ n\to\infty. \tag{1.4}$$

Po Teoremu o sendviču slijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2\cos n + 8n}{n^3+1} = 0. \tag{1.5}$$

b) Vrijedi (koristimo binomni teorem):

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n = \left(1+\frac{1}{q}-1\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{q}-1\right)^k \geq \binom{n}{1}\left(\frac{1}{q}-1\right), \tag{1.6}$$

gdje smo iskoristili da je $\frac{1}{q}-1>0$. Dakle, slijedi:

$$0 \leq q^n \leq \frac{1}{\frac{1}{q}-1}\frac{1}{n} \to 0,\ n\to\infty. \tag{1.7}$$

Po Teoremu o sendviču slijedi da

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0,\ q\in\langle 0,1\rangle. \tag{1.8}$$

c) Vrijedi:

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1+(\sqrt[n]{n}-1))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt[n]{n}-1)^k \geq 1+\binom{n}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2. \tag{1.9}$$

Sada dobivamo:

$$\begin{aligned} n &\geq 1+\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 \Rightarrow 1 \geq \frac{n}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt[n]{n} \leq 1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \to 1,\ n\to\infty, \end{aligned} \tag{1.10}$$

za $n \geq 2$.

Po Teoremu o sendviču slijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1. \tag{1.11}$$

d) Vrijedi:

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n},\ \forall n \geq a. \tag{1.12}$$

Znamo da $\sqrt[n]{n}\to 1,\ n\to\infty$ po *c*) dijelu Zadatka, pa po Teoremu o sendviču imamo:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1. \tag{1.13}$$

e) Vrijedi:

$$4 = \sqrt[n]{0+0+4^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} \leq \sqrt[n]{4^n+4^n+4^n} \leq 4\cdot\sqrt[n]{3}. \tag{1.14}$$

Znamo da $\sqrt[n]{a}\to 1,\ n\to\infty$ po *d*) dijelu Zadatka, pa po Teoremu o sendviču vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} = 4. \tag{1.15}$$

f) Vrijedi:

$$0 \leq \frac{\sqrt{n^2+1}}{n!} \leq \frac{\sqrt{n^2+n^2}}{n!} \leq \frac{n\sqrt{2}}{n!} = \frac{\sqrt{2}}{(n-1)!} \leq \frac{\sqrt{2}}{n-1} \to 0,\ n\to\infty. \tag{1.16}$$

Po Teoremu o sendviču vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n!} = 0. \tag{1.17}$$

$\square$

Napomena 1.3. *Vrijedi:*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \ a > 0, \\ &\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \\ &\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \ q \in \langle -1, 1\rangle. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Teorem 1.4. *Vrijedi:*

i) Ako je (a_n) rastući i odozgo omeđen, onda je konvergentan i $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Ako je (a_n) padajući i odozdo omeđen, onda je konvergentan i $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Zadatak 1.3. *Izračunajte:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}. \tag{1.19}$$

Rješenje: Definiramo:

$$a_n := \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}. \tag{1.20}$$

Tada je

$$a_{n+1} = \Big(2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{\text{n korijena}}\Big)^{1/2} \tag{1.21}$$

Imamo: $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Dokazati ćemo da je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući i odozgo omeđen pomoću matematičke indukcije.

Dokazujemo da je $(a_n)_n$ rastući, tj. da vrijedi

$$a_n \leq a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.22}$$

Baza. $(n = 1)$, $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$.

Korak. Pretpostavimo da je $a_n \leq a_{n+1}$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

Tada vrijedi (koristimo pretpostavku indukcije):

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}. \tag{1.23}$$

Dokazujemo da je $(a_n)_n$ odozgo omeđen s 2, tj. da vrijedi

$$a_n \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.24}$$

Baza. $(n = 1)$, $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$.

Korak. Pretpostavimo da je $a_n \leq 2$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2. \tag{1.25}$$

Dakle, (a_n) je rastući i odozgo omeđen pa je po Teoremu 1.4 niz (a_n) konvergentan.

Označimo $L := \lim_{n\to\infty} a_n$.

Tada iz

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \tag{1.26}$$

dobijemo:

$$\begin{aligned} L = \sqrt{2+L} &\Leftrightarrow L^2 = 2 + L \Leftrightarrow L^2 - L - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (L-2)(L+1) = 0 \Leftrightarrow L = 2 \text{ ili } L = -1. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Odbacujemo $L = -1$ jer iz $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ slijedi $L \geq 0$.

Dakle, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. □

Zadatak 1.4 (Domaća zadaća). *Dokažite:*

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{12 + \sqrt{12 + \cdots + \sqrt{12}}}}_{n \text{ korijena}} = 4. \tag{1.28}$$

Zadatak 1.5. *Dokažite da je* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Rješenje: Definiramo $a_n = \frac{n}{2^n}$. Tada je

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n} a_n. \tag{1.29}$$

Zbog

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n} < 1 \Leftrightarrow n > 1, \tag{1.30}$$

vidimo da je (a_n) padajući za $n \geq 2$. Očito je (a_n) odozdo omeđen s 0 pa je konvergentan. Označimo $L := \lim_{n\to\infty} a_n$. Iz

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n} a_n \tag{1.31}$$

dobijemo $L = \frac{1}{2}L$, tj. $L = 0$. □

Definicija 1.5. *Niz $(b_n)_n$ je podniz niza $(a_n)_n$ ako postoji strogo rastuća funkcija $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $b_n = a_{p_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Lema 1.6. *Svaki niz u $\mathbb{R}$ ima monoton podniz.*

Teorem 1.7 (Bolzano-Weierstrass). *Svaki omeđeni niz ima konvergentan podniz.*

Teorem 1.8. *Ako je niz (a_n) konvergentan s limesom $L \in \mathbb{R}$, onda je svaki njegov podniz konvergentan s istim limesom L.*

Definicija 1.9. *Kažemo da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k $+\infty$ ako*

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ a_n > M,\ \forall n \geq n_0. \tag{1.32}$$

Pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Slično definiramo niz koji konvergira k $-\infty$.

Definiramo prošireni skup realnih brojeva s $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definicija 1.10. *Kažemo da je $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ gomilište niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako postoji podniz $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ niza $(a_n)_n$ takav da je:*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha. \tag{1.33}$$

Napomena 1.11. *Iz Leme 1.6 svaki niz ima barem jedno gomilište u $\overline{\mathbb{R}}$. Iz Bolzano-Weierstrassovog teorema 1.7 slijedi da svaki omeđeni niz ima barem jedno gomilište u $\mathbb{R}$.*

Primjer 1.12.

a) Niz $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ima dva gomilišta: -1 i 1, jer je

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1} + \frac{1}{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \to -1,\ k \to \infty, \\ a_{2k} &= (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1,\ k \to \infty. \end{aligned} \tag{1.34}$$

b) Niz $a_n = (-1)^n n$ nema gomilišta u $\mathbb{R}$, ali ima u $\overline{\mathbb{R}}$: $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (-1)^{2k} \cdot 2k = 2k \to \infty, \\ a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1} \cdot (2k-1) = -(2k-1) \to -\infty. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Definicija 1.13. *Neka je (a_n) niz realnih brojeva i $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ skup svih gomilišta niza (a_n). Definiramo limes superior i limes inferior niza (a_n) s:*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup A \ \text{ i } \ \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf A. \tag{1.36}$$

Napomena 1.14. *Ako A nije odozgo/odozdo omeđen, onda definiramo:*

$$\sup A = \infty,\ \inf A = -\infty. \tag{1.37}$$

Zadatak 1.6. *Dokažite da je za $q > 1$*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty. \tag{1.38}$$

Rješenje: Neka je $M > 0$. Trebamo naći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$q^n > M,\ \forall n \geq n_0. \tag{1.39}$$

Sada imamo (zbog $q - 1 > 0$ i binomnog teorema):

$$q^n = ((q-1)+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (q-1)^k \geq n(q-1). \tag{1.40}$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = q - 1$ i $b = M$) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$n_0(q-1) > M, \tag{1.41}$$

pa je

$$q^n \geq n(q-1) \geq n_0(q-1) > M,\ \forall n \geq n_0, \tag{1.42}$$

što je trebalo i dokazati. □

Zadatak 1.7 (Domaća zadaća)**.** *Dokažite da je za $q > 1$ $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n} = \infty$. Uputa: slijediti rješenje prethodnog Zadatka s $k = 2$.*

Zadatak 1.8. *Izračunajte:*

a) $\limsup_{n\to\infty} \frac{1+n\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n+1}$, *b)* $\liminf_{n\to\infty} \frac{(1+(-1)^n)^n+n\cos(n\pi)}{2n+1}$.

Rješenje:

a) Neka je

$$a_n = \frac{1+n\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n+1}. \tag{1.43}$$

Sada imamo:

$$\cos(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0, \ n = 2k-1 \ (1,3,5,7,\dots) \\ 1, \ n = 4k \ (0,4,8,\dots) \\ -1, \ n = 4k-2 \ (2,6,\dots) \end{cases} \tag{1.44}$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= \frac{1+(2k-1)\cdot 0}{2(2k-1)+1} = \frac{1}{4k-1} \to 0, \ k\to\infty, \\ a_{4k} &= \frac{1+4k}{2\cdot 4k+1} = \frac{1+4k}{8k+1} \to \frac{1}{2}, \ k\to\infty, \\ a_{4k-2} &= \frac{1+(4k-2)\cdot(-1)}{2\cdot(4k-2)+1} = \frac{-4k+3}{8k-3} \to -\frac{1}{2}, \ k\to\infty. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Dakle, $A = \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ pa je $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup A = \frac{1}{2}$.

b) Neka je

$$a_n = \frac{(1+(-1)^n)^n + n\cos(n\pi)}{2n+1}. \tag{1.46}$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{(1+(-1)^{2k})^{2k} + 2k\cdot\cos(2k\pi)}{2\cdot 2k+1} = \frac{2^{2k}+2k}{4k+1} \to \infty, \ k\to\infty, \\ a_{2k-1} &= \frac{(1+(-1)^{2k-1})^{2k-1} + (2k-1)\cdot(-1)}{2\cdot(2k-1)+1} = \frac{-2k+1}{4k-1} \to -\frac{1}{2}, \ k\to\infty. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Dakle, $A = \{-\frac{1}{2}, \infty\}$ pa je $\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf A = -\frac{1}{2}$. □

Teorem 1.15. *Niz (a_n) je konvergentan u $\overline{\mathbb{R}}$ ako i samo ako*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n. \tag{1.48}$$

Napomena 1.16. *Za $q < -1$ niz $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije konvergentan. Naime,*

$$\begin{aligned} q^{2k} &= (q^2)^k \to \infty \ (q^2 > 1), \\ q^{2k-1} &= \frac{1}{q}(q^2)^k \to -\infty \ (\frac{1}{q} < 0), \end{aligned} \tag{1.49}$$

jer je

$$\liminf_{n\to\infty} q^n = -\infty \neq \infty = \limsup_{n\to\infty} q^n. \tag{1.50}$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \textit{ne postoji}, \ q \le -1, \\ 0, \ -1 < q < 1, \\ 1, \ q = 1, \\ \infty, \ q > 1. \end{cases} \tag{1.51}$$

Zadatak 1.9. *Neka je*

$$a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} + (1+a)\sin(\frac{n\pi}{2}). \tag{1.52}$$

Odredite $a \in \mathbb{R}$ tako da niz (a_n) bude konvergentan.

Rješenje: Odredi skup gomilišta A:

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{3^{2k} + (-2)^{2k}}{3^{2k+1} + (-2)^{2k+1}} + (1+a)\cdot 0 = \frac{3^{2k} + 2^{2k}}{3^{2k+1} - 2^{2k+1}} \to \frac{1}{3},\ k \to \infty,\\
a_{4k-1} &= \frac{3^{4k-1} + (-2)^{4k-1}}{3^{4k} + (-2)^{4k}} + (1+a)\cdot(-1) = \frac{3^{4k-1} - 2^{4k-1}}{3^{4k} + 2^{4k}} - (1+a) \to \frac{1}{3} - 1 - a,\ k \to \infty,\\
a_{4k-3} &= \frac{3^{4k-3} + (-2)^{4k-3}}{3^{4k-2} + (-2)^{4k-2}} + (1+a)\cdot 1 = \frac{3^{4k-3} - 2^{4k-3}}{3^{4k-2} + 2^{4k-2}} + 1 + a \to \frac{1}{3} + 1 + a.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Dakle, $A = \{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} - a, \frac{4}{3} + a\}$.

Da bi (a_n) bio konvergentan, treba vrijediti:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n, \tag{1.54}$$

pa skup A treba biti jednočlan skup, tj.

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - a = \frac{4}{3} + a, \tag{1.55}$$

odakle je $a = -1$. □

Definicija 1.17. *Kažemo da je niz realnih brojeva (a_n) Cauchyjev ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ |a_n - a_m| < \varepsilon,\ \forall n, m \geq n_0. \tag{1.56}$$

Teorem 1.18 (Potpunost skupa $\mathbb{R}$)**.** *Niz (a_n) u $\mathbb{R}$ je konvergentan akko je Cauchyjev.*

Zadatak 1.10. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{3^n},\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.57}$$

Je li (x_n) konvergentan?

Rješenje: Dokazati ćemo da je (x_n) Cauchyjev. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Imamo:

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)| \leq\\
&\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq\\
&\leq \frac{1}{3^{m-1}} + \frac{1}{3^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n}(1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \cdots + (\frac{1}{3})^{m-n-1}) =\\
&= \frac{1}{3^n}\frac{1 - (\frac{1}{3})^{m-n}}{1 - \frac{1}{3}} \leq \frac{3}{2}\frac{1}{3^n},
\end{aligned} \tag{1.58}$$

gdje je $1 - (\frac{1}{3})^{m-n} \leq 1$. Dakle,

$$|x_n - x_m| \leq \frac{3}{2}\frac{1}{3^n},\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n. \tag{1.59}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \ \forall m \geq n \geq n_0. \tag{1.60}$$

Zbog nejednakosti (1.59) je dovoljno pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da

$$\frac{3}{2}\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon \Leftrightarrow 3^{n_0}\varepsilon > \frac{3}{2}. \tag{1.61}$$

Zbog $3^{n_0} = (1+2)^{n_0} = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} 2^k \geq n_0 \cdot 2$ i Arhimedovog aksioma (za $a = 2\varepsilon$ i $b = \frac{3}{2}$) vidimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$3^{n_0}\varepsilon \geq n_0 \cdot 2\varepsilon > \frac{3}{2}. \tag{1.62}$$

$\square$

Poglavlje 3

Topologija prostora $\mathbb{R}^n$

1. Otvorene i zatvorene kugle

Definicija 1.1. *Neka je $X \neq \emptyset$. Preslikavanje $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ je metrika ako vrijedi:*

(M1) $d(x,y) \geq 0,\ \forall x,y \in X$ *(pozitivnost)*

(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(strogost)*

(M3) $d(x,y) = d(y,x),\ \forall x,y \in X$ *(simetričnost)*

(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ \forall x,y,z \in X$ *(nejednakost trokuta)*

Uređeni par (X,d) zovemo metrički prostor.

Zadatak 1.1. *Neka je (X,d) metrički prostor. Definiramo:*

$$d'(x,y) := \alpha d(x,y) + \beta, \tag{1.1}$$

za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kakve uvjete moraju zadovoljavati α i β tako da bi (X,d') bio metrički prostor?

Rješenje: Provjeravamo svojstva metrike:

(M3) Vrijedi za d' (jer (M3) vrijedi za d).

(M2) Treba vrijediti: $d'(x,x) = \alpha d(x,x) + \beta = \beta \Rightarrow \beta = 0$.

S druge strane, sada imamo da $0 = d'(x,y) = \alpha d(x,y) \Rightarrow x = y$ (jer (M2) vrijedi za d).

(M1) Vrijedi:

$$0 \leq d'(x,y) = \alpha d(x,y) \Leftrightarrow \alpha > 0. \tag{1.2}$$

(M4) Vrijedi:

$$d'(x,y) = \alpha d(x,y) \leq \alpha(d(x,z) + d(z,y)) = d'(x,z) + d'(z,y). \tag{1.3}$$

Dakle, da bi d' bila metrika, treba vrijediti $\alpha > 0$ i $\beta = 0$.

□

Promatramo slučaj n-dimenzionalnog Euklidskog prostora:

$$X = \mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},\ n \geq 1 \tag{1.4}$$

Definiramo preslikavanja:

$$\begin{aligned} &d_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}, \\ &d_\infty\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

za $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Zadatak 1.2. *Dokažite da je $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ metrički prostor.*

Rješenje:

(M1) Vrijedi pozitivnost:

$$d_\infty(x,y) \geq 0. \tag{1.6}$$

(M2) Vrijedi strogost:

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) = 0 &\Leftrightarrow |x_1 - y_1| = \cdots = |x_n - y_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n \Leftrightarrow x = y. \end{aligned} \tag{1.7}$$

(M3) Vrijedi simetričnost:

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\} = \max\{|y_1 - x_1|, \ldots, |y_n - x_n|\} = d_\infty(y,x). \tag{1.8}$$

(M4) Za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi nejednakost trokuta:

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y), \tag{1.9}$$

odakle dobijemo:

$$d_\infty(x,y) \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y). \tag{1.10}$$

□

Zadatak 1.3. *a) Dokažite Cauchy-Schwarzovu nejednakost:*

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

b) Dokažite da je $(\mathbb{R}^n, d_2)$ metrički prostor.

Rješenje:

a) Neka je $f(t) := \sum_{i=1}^n (|x_i|t + |y_i|)^2$, $t \in \mathbb{R}$. Tada je:

$$f(t) = (\sum_{i=1}^n x_i^2)t^2 + 2t \sum_{i=1}^n |x_i y_i| + \sum_{i=1}^n y_i^2 = At^2 + Bt + C, \tag{1.12}$$

gdje je

$$A = \sum_{i=1}^n x_i^2, \ B = 2\sum_{i=1}^n |x_i y_i|, \ C = \sum_{i=1}^n y_i^2. \tag{1.13}$$

Zbog činjenice da vrijedi $f(t) = \sum_{i=1}^n (|x_i|t + |y_i|)^2 \geq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$, diskriminanta mora biti nepozitivna, tj.

$$0 \geq D = B^2 - 4AC = (2\sum_{i=1}^n |x_i y_i|)^2 - 4(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}. \tag{1.14}$$

b)(M1) Vrijedi pozitivnost:

$$d_2(x,y) \geq 0. \tag{1.15}$$

(M2) Vrijedi strogost:

$$0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \Leftrightarrow |x_1 - y_1|^2 = \cdots = |x_n - y_n|^2 = 0 \Leftrightarrow x = y. \tag{1.16}$$

(M3) Vrijedi simetričnost:

$$d_2(x,y) = d_2(y,x). \tag{1.17}$$

(M4) Vrijedi nejednakost trokuta (koristimo Cauchy–Schwartzovu nejednakost (1.11)):

$$\begin{aligned} d_2^2(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i - y_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i||z_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 = \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}\right)^2 = (d_2(x,z) + d_2(z,y))^2. \end{aligned} \tag{1.18}$$

□

Napomena 1.2. *$\mathbb{R}^n$ je također unitaran prostor sa skalarnim produktom:*

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{1.19}$$

Tada za normu induciranu tim skalarnim produktom

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{1.20}$$

vrijedi

$$||x - y|| = d_2(x,y). \tag{1.21}$$

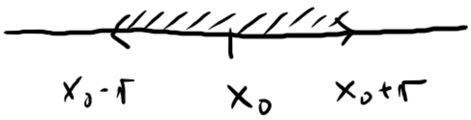
Zadatak 1.4 (Domaća zadaća)**.** *Dokažite da je $(\mathbb{R}^n, d_1)$ metrički prostor, ako je*

$$d_1(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|. \tag{1.22}$$

Definicija 1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Otvorena kugla sa središtem u x_0 i radijusom r je skup*

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}. \tag{1.23}$$

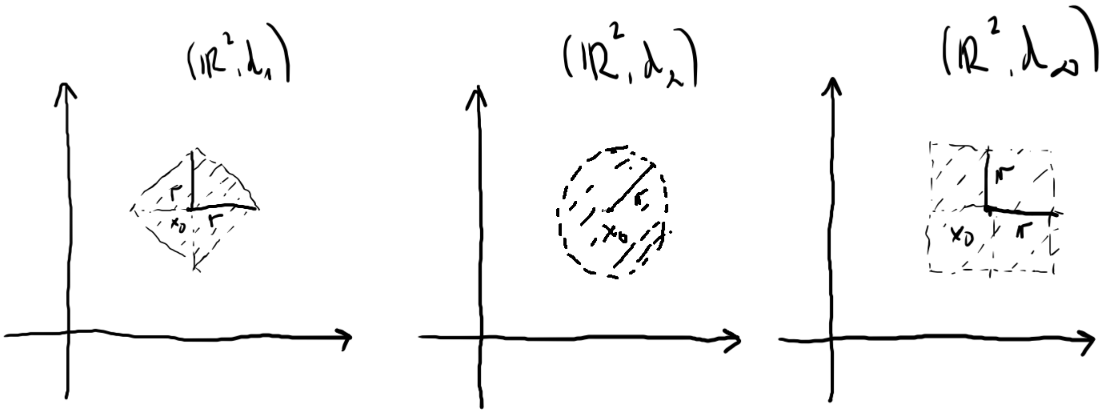
Primjer 1.4. *a)* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *je metrički prostor.*



Sada je

$$K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle. \tag{1.24}$$

b) Imamo:



Definicija 1.5. *Podskup* $U \subset X$ *metričkog prostora* X *je otvoren ako se može prikazati kao unija otvorenih kugala u* X.

Primjer 1.6. $K(x_0, r)$ *je otvoren skup.*

Teorem 1.7.

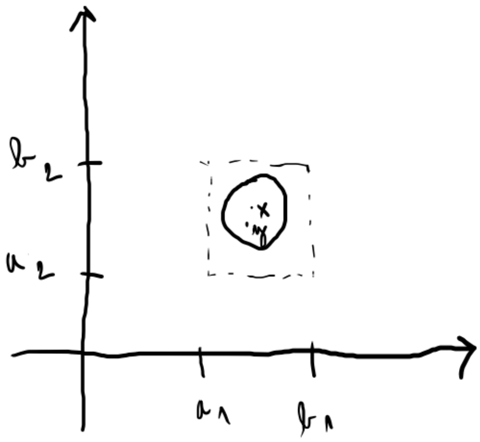
$$U \text{ je otvoren} \Leftrightarrow (\forall x_0 \in U)(\exists r > 0)\ K(x_0, r) \subset U. \tag{1.25}$$

Zadatak 1.5. *Dokažite da je skup*

$$U = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle \tag{1.26}$$

otvoren u $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

Rješenje: Skiciramo u $\mathbb{R}^2$:



Primijetimo da je $U = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \ a_i < y_i < b_i, \ \forall i = 1, \dots, n\}$. Neka je $x \in U$.

Definiramo:

$$r := \min\{x_i - a_i, b_i - x_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}. \tag{1.27}$$

Tada je za $y \in K(x, r)$ te $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$|y_i - x_i| \leq d_2(x, y) < r, \tag{1.28}$$

pa je

$$\begin{aligned} y_i - x_i < r \leq b_i - x_i \Rightarrow y_i < b_i, \\ x_i - y_i < r \leq x_i - a_i \Rightarrow y_i > a_i. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Slijedi da vrijedi:

$$a_i < y_i < b_i, \ i \in \{1, 2, \dots, n\}, \tag{1.30}$$

pa je $y \in U$. Dakle,

$$K(x, r) \subset U. \tag{1.31}$$

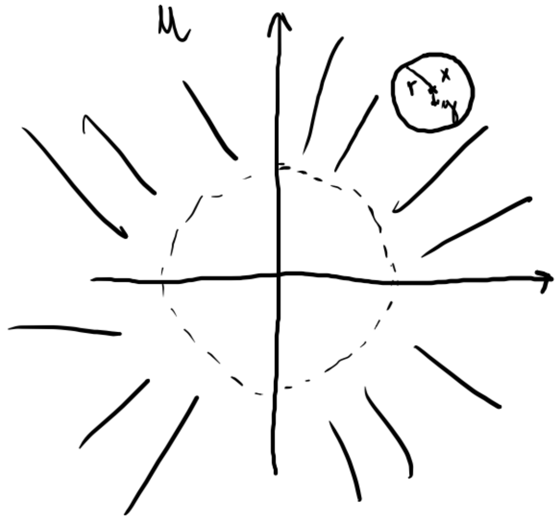
Po Teoremu je U otvoren. □

Zadatak 1.6. *Dokažite da je*

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 > 4\}, \tag{1.32}$$

otvoren u $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Rješenje: Skiciramo:



Neka je $x \in U$. Tada je $x_1^2 + x_2^2 > 4$. Neka je $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2$. Dokažimo da je $K(x, r) \subset U$.

Neka je $y \in K(x, r)$. Tada je (koristimo nejednakost trokuta):

$$\begin{aligned}&\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = d(x, 0) \leq d(x, y) + d(y, 0) < r + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\\ &\Leftrightarrow 2 < \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 > 4 \Leftrightarrow y \in U.\end{aligned} \tag{1.33}$$

Dakle, $K(x, r) \subset U$, pa je po Teoremu 1.7 U otvoren. □

Definicija 1.8. *Topologija na skupu $X \neq \emptyset$ je familija τ podskupova od X koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(T1) $\emptyset, X \in \tau$

(T2) Ako je $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset \tau$ proizvoljna familija iz τ, tada je $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

(T3) Za $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_n \in \tau$ slijedi da je $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

Teorem 1.9. *U metričkom prostoru (X, d) familija*

$$\tau := \{U \subseteq X \mid U \text{ otvoren}\} \tag{1.34}$$

je topologija na X.

Zadatak 1.7. *Neka je $X \neq \emptyset$ i $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{1.35}$$

a) Dokažite da je d metrika.

b) Odredite familiju otvorenih skupova τ.

Rješenje:

a)(M1) Vrijedi pozitivnost:
$$d(x,y) \geq 0,\ \forall x,y \in X. \tag{1.36}$$

(M2) Vrijedi strogost:
$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y. \tag{1.37}$$

(M3) Vrijedi simetričnost:
$$d(x,y) = d(y,x),\ \forall x,y \in X. \tag{1.38}$$

(M4) Neka je $x,y,z \in X$. Vrijedi nejednakost trokuta:
$$x = y \Rightarrow d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y), \tag{1.39}$$
jer je $d(x,z) \geq 0$ i $d(z,y) \geq 0$. Nadalje, vrijedi:
$$x \neq y \Rightarrow z \neq x \text{ ili } z \neq y \Rightarrow d(z,x) + d(z,y) \geq 1 = d(x,y). \tag{1.40}$$

b) Vrijedi:
$$K(x,1) = \{y \in X : d(x,y) < 1\} = \{x\}. \tag{1.41}$$
Neka je $A \subseteq X$ proizvoljan. Tada je
$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} = \bigcup_{x \in A} K(x,1), \tag{1.42}$$
pa je po definiciji A otvoren.

Stoga je $\tau = \mathcal{P}(X)$. (svaki podskup $A \subseteq X$ je otvoren)

□

Napomena 1.10. *Metrika iz Zadatka 1.7 se zove diskretna metrika.*

Definicija 1.11. *Podskup A metričkog prostora je zatvoren ako je $A^c = X \setminus A$ otvoren.*

Zadatak 1.8. *Dokažite da su sljedeći skupovi zatvoreni u metričkom prostoru (X,d):*

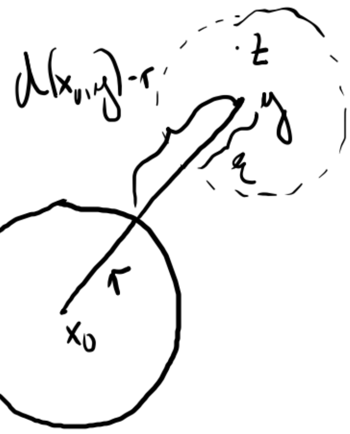
a) zatvorena kugla: $\overline{K}(x_0,r) := \{x \in X \mid d(x_0,x) \leq r\}$,

b) $\{x\}$, $x \in X$.

Rješenje:

a) Trebamo dokazati da je $\overline{K}(x_0,r)^c$ otvoren.

Neka je $y \in \overline{K}(x_0,r)^c$. Uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2}(d(x_0,y) - r)$.



Neka je $z \in K(y,\varepsilon)$. Imamo:

$$z \in K(y,\varepsilon) \Rightarrow d(z,y) < \frac{1}{2}(d(x_0,y)-r) \Rightarrow r + 2d(z,y) < d(x_0,y) \leq d(x_0,z) + d(z,y). \tag{1.43}$$

jer $d(z,y) \geq 0$, sada je $d(x_0,z) > r$, dakle $z \in \overline{K}(x_0,r)^c$. Jer je $z \in K(y,\varepsilon)$ bio proizvoljan zaključujemo $K(y,\varepsilon) \subset K(x_0,r)^c$.

Slijedi da je $K(y,\varepsilon) \subset \overline{K}(x_0,r)^c$ pa je po Teoremu 1.7 $\overline{K}(x_0,r)^c$ otvoren.

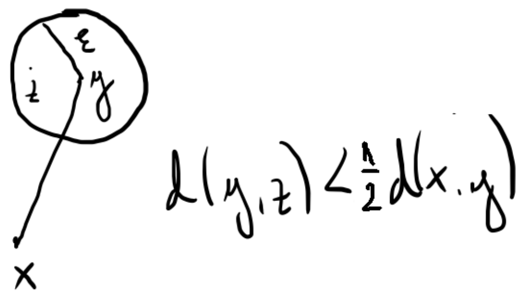
b) Neka je $x \in X$ i $A := \{x\}$. Tada za $y \notin A$ slijedi da je $y \neq x$, pa za $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x,y)$ vrijedi:

$$z \in K(y,\varepsilon) \Rightarrow d(y,z) < \varepsilon < d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \tag{1.44}$$

pa imamo

$$d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z) > d(x,y) - \frac{1}{2}d(x,y) = \frac{1}{2}d(x,y) > 0, \tag{1.45}$$

tj. $x \neq z$, pa je $z \notin A$. ($K(y,\varepsilon) \subset A^c$)



Dakle, $K(y,\varepsilon) \subset A^c$ pa je po Teoremu 1.7 A^c otvoren.

□

2. Zatvarač, interior i rub skupa

Definicija 2.1. *Neka je A podskup metričkog prostora X. Definiramo:*

- ***zatvarač*** *skupa A:* $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{A\subseteq F\\ F \text{ zatvoren}}} F$ *(druga oznaka : $\operatorname{Cl} A$)*
- ***interior*** *skupa A:* $\operatorname{Int} A = \bigcup\limits_{\substack{U\subseteq A\\ U \text{ otvoren}}} U$
- ***rub*** *skupa A:* $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X\backslash A}$

Napomena 2.2.

1) $\overline{A}$ *i* ∂A *su zatvoreni skupovi.*

2) $\operatorname{Int} A$ *je otvoren skup.*

3) Skup A je zatvoren ako i samo ako vrijedi $A = \overline{A}$.

4) $\operatorname{Int} A \subseteq A \subseteq \overline{A}$

Primjer 2.3. *Promatramo metrički prostor* $(\mathbb{R}, d_2)$.

a) $A = \langle 0, 1]$: $\operatorname{Int} A = \langle 0,1\rangle$, $\overline{A} = [0,1]$, $\partial A = \{0,1\}$

b) $\operatorname{Int} \mathbb{Z} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, $\partial\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}} \cap \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$

c) $\operatorname{Int} \mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{R} = \mathbb{R} \cap \overline{\emptyset} = \emptyset$

Zadatak 2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$. Dokažite:*

$$x \in \overline{A} \iff (\forall\varepsilon > 0) \quad K(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Rješenje: Neka je $x \in \overline{A}$ i pretpostavimo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da $K(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Za skup $E := X\backslash K(x, \varepsilon)$ vrijedi da je zatvoren, $A \subseteq E$ i $x \notin E$. Tada $x \notin \bigcap\limits_{\substack{A\subseteq F\\ F \text{ zatvoren}}} F = \overline{A}$, što je kontradikcija.

Drugi smjer ćemo pokazati obratom po kontrapoziciji. Pretpostavimo da $x \notin \overline{A}$, tada postoji skup F takav da $A \subseteq F$, F zatvoren i $x \notin F$. $X\backslash F$ je otvoren skup koji sadrži x, pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da $K(x, \varepsilon) \subset X\backslash F$. Očito je $K(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$, a kako je $A \subseteq F$ vrijedi $K(x, \varepsilon) \cap A \subseteq K(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$. $\square$

Primjer 2.4.

a) Jer je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, prema prethodnom zadatku imamo $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Također vrijedi $\operatorname{Int} \mathbb{Q} = \emptyset$ *i* $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

b) Promotrimo skup $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, po prethodnom zadatku vrijedi $\overline{A} = A \cup \{0\}$.

Zadatak 2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor. Dokažite:*

a) $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A$, *b)* $\text{Int}\, A \cap \partial A = \emptyset$,

c) $\partial A = \overline{A} \setminus \text{Int}\, A$.

Rješenje: a) Trebamo pokazati dvije skupovne inkluzije, pa neka je $x \in \overline{A}$. Pretpostavimo da $x \notin \text{Int}\, A$, tada ne postoji otvoren skup koji sadrži x takav da je čitav skup sadržan u A. Posebno,

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad K(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset,$$

pa po zadatku 2.1 možemo zaključiti $x \in \overline{X \setminus A}$. Dakle, $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \partial A$.

Drugi smjer slijedi direktno iz činjenice da vrijedi $\text{Int}\, A \subseteq \overline{A}$ i $\partial A \subseteq \overline{A}$.

b) Neka je $x \in \text{Int}\, A$, tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da $K(x, \varepsilon) \subseteq A$. Jer je $K(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) = \emptyset$ iz zadatka 2.1 slijedi $x \notin \overline{X \setminus A}$, što povlači $x \notin \partial A$. Dakle, $\text{Int}\, A \cap \partial A = \emptyset$.

c) Iz b) imamo da je unija $\text{Int}\, A \cup \partial A$ disjunktna, pa iz a) slijedi $\partial A = \overline{A} \setminus \text{Int}\, A$.

□

Definicija 2.5. *Za $x \in X$ i $A \subseteq X$ definiramo udaljenost između x i A kao*

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

Zadatak 2.3. *Dokažite da za podskup A metričkog prostora (X, d) vrijedi*

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}.$$

Rješenje: Neka je $x \in \overline{A}$ te $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Po zadatku 2.1 vrijedi $K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Tada postoji $y_\varepsilon \in K(x, \varepsilon) \cap A$ pa imamo $d(x, A) \leq d(x, y_\varepsilon) < \varepsilon$. Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $d(x, A) < \varepsilon$ pa je $d(x, A) = 0$.

Obratno, pretpostavimo $d(x, A) = 0$. To znači (po definiciji infimuma)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A) \text{ t.d. } d(x, y) < d(x, A) + \varepsilon = \varepsilon,$$

iz čega vidimo $K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Sada iz zadatka 2.1 slijedi tvrdnja.

□

Definicija 2.6. *Neka je (X, d) metrički prostor. Točka $x_0 \in X$ je **gomilište** skupa $A \subseteq X$ ako za svaki otvoreni skup $U \subseteq X$ takav da $x_0 \in U$ vrijedi*

$$U \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Skup svih gomilišta označavamo s A'.

Napomena 2.7. *Točka $x_0 \in X$ je gomilište skupa $A \subseteq X$ ako svaka otvorena okolina točke x_0 sadrži neku točku iz A različitu od x_0.*

Primjer 2.8. *Skup svih gomilišta skupa $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ je skup $A' = \{0\}$.*

Propozicija 2.9. *U metričkom prostoru X vrijedi $\overline{A} = A \cup A'$.*

Dokaz: Slijedi iz zadatka 2.3.

□

Zadatak 2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$. Dokažite:*

a) $\overline{A} = X \setminus \text{Int}\,(X \setminus A)$, *b)* $\operatorname{Int} A = X \setminus (\overline{X\setminus A})$.

Rješenje: Vrijedi:

$$X\setminus\overline{A} = X\setminus \bigcap_{\substack{A\subseteq F\\ F \text{ zatvoren}}} F \overset{\text{de Morgan}}{=} \bigcup_{\substack{A\subseteq F\\ F \text{ zatvoren}}} (X\setminus F) \overset{(*)}{=} \bigcup_{\substack{U\subseteq X\setminus A\\ U \text{ otvoren}}} U = \operatorname{Int}(X\setminus A), \tag{2.1}$$

gdje jednakost $(*)$ slijedi iz toga da je $A \subseteq F$, F zatvoren ako i samo ako je $X\setminus F \subseteq X\setminus A$, $X\setminus F$ otvoren. Iz dobivenog direktno slijedi tvrdnja a). Primjenom (2.1) na $X\setminus A$ dobivamo $X\setminus(\overline{X\setminus A}) = \operatorname{Int}(X\setminus(X\setminus A)) = \operatorname{Int} A$, iz čega slijedi b) tvrdnja.

□

Zadatak 2.5. *Dokažite da je* $S = \{(x,0) | x \in \mathbb{R}\}$ *zatvoren u* $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Rješenje: Neka je $(x,y) \in S^C$, tada je $|y| > 0$. Tvrdimo da je $B := K\left((x,y), \frac{|y|}{2}\right) \subseteq S^C$. Neka je $(x',y') \in B$, tada imamo

$$|y'| \geq |y| - |y-y'| > |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2} > 0,$$

gdje smo iskoristili $|y-y'| = \sqrt{|y-y'|^2} \leq \sqrt{|y-y'|^2 + |x-x'|^2} < \frac{|y|}{2}$. Time smo pokazali da je $(x',y') \in S^C$. Dakle, S^C je otvoren u $(\mathbb{R}^2, d_2)$, pa je S zatvoren. □

Definicija 2.10. *Niz* $(x_n)_n$ *u metričkom prostoru* (X,d) *je* ***konvergentan*** *ako postoji* $x_0 \in X$ *takav da*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ t.d. } n \geq n_0 \implies d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Pišemo: $x_n \longrightarrow x_0$ *ili* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Zadatak 2.6. *Neka su* $(x_n)_n$ *i* $(y_n)_n$ *nizovi u metričkom prostoru* (X,d) *takvi da* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *i* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. *Dokažite:*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y).$$

Rješenje: Prvo ćemo pokazati da je za x, x', y, y':

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y'). \tag{2.2}$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} d(x,y) - d(x',y') &\leq d(x,x') + \cancel{d(x',y')} + d(y',y) - \cancel{d(x',y')},\\ d(x',y') - d(x,y) &\leq d(x',x) + \cancel{d(x,y)} + d(y,y') - \cancel{d(x,y)}, \end{aligned}$$

pa je

$$-(d(x,x') + d(y,y')) \leq d(x',y') - d(x,y) \leq d(x,x') + d(y,y'),$$

čime je pokazano (2.2). Neka je $\varepsilon > 0$, tada postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \geq n_1 \ \text{ i } \ d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \geq n_2.$$

Neka je $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, tada za $n \geq n_0$ vrijedi:

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n,x) + d(y_n,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Teorem 2.11. *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$. Tada vrijedi*

$$x \in \overline{A} \iff \text{postoji niz } (x_n)_n \subset A \text{ t.d. } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Napomena 2.12. *A je zatvoren ako i samo ako sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova.*

Definicija 2.13. *Niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) je* ***Cauchyjev*** *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ t.d. } m, n \geq n_0 \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Napomena 2.14. *Konvergentan niz je uvijek Cauchyjev. Obrat ne mora vrijediti!*

Definicija 2.15. *Kažemo da je (X, d)* ***potpun*** *ako svaki Cauchyev niz konvergira.*

Primjer 2.16. *(R^n, d_2) je potpun.*

Zadatak 2.7. *Neka je (X, d) potpun metrički prostor i $Y \subseteq X$. Tada je (Y, d) metrički prostor. Dokažite da je Y zatvoren u X ako i samo ako je (Y, d) potpun.*

Rješenje: Pretpostavimo da je $Y \subseteq X$ zatvoren. Neka je $(x_n)_n$ Cauchyev niz u (Y, d). Tada je $(x_n)_n$ Cauchyev i u (X, d) pa zbog potpunosti postoji $x \in X$ takav da $x_n \to x$. Po pretpostavci je Y zatvoren, pa po teoremu 2.11 vrijedi $x \in Y$.

Pretpostavimo sada da je (Y, d) potpun. Neka je $x \in \overline{Y}$, tada po teoremu 2.11 postoji niz $(x_n)_n \subset Y$ takav da $x_n \to x$. Specijalno je $(x_n)_n$ Cauchyjev u Y pa zbog potpunosti i konvergentan u Y. Tada zbog jedinstvenosti limesa vrijedi $x \in Y$. Dakle, pokazali smo $\overline{Y} \subseteq Y$, tj. $\overline{Y} = Y$, pa je Y zatvoren. $\square$

Primjer 2.17.

- *$([a, b], d)$ je potpun jer je zatvoren u $\mathbb{R}$, pri čemu je $d(x, y) = |x - y|$.*
- *$(\mathbb{Q}, d)$ nije potpun, jer nije zatvoren u $\mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$).*

Poglavlje 4

Limes i neprekidnost

1. Neprekidnost funkcije

Definicija 1.1. *Neka su (X,d) i (Y,d') metrički prostori, i neka je $A \subseteq X, x_0 \in A'$ i $f : A \longrightarrow Y$ funkcija. Kažemo da je $L \in Y$* ***limes funkcije f u točki $\mathbf{x_0}$*** *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in A, 0 < d(x,x_0) < \delta \implies d'(f(x),L) < \varepsilon).$$

Pišemo: $L = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Zadatak 1.1. *Izračunajte limese (ako postoje):*

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Rješenje: a)

$$0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le \frac{x^2y^2}{x^2+0} = y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Drugi način: Neka je $\varepsilon > 0$. Tada za $\delta := \sqrt{\varepsilon} > 0$ i za (x,y) takve da $0 < \|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| < \delta$ vrijedi

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0\right| \le y^2 \le \|(x,y)\|^2 < \delta^2 = \varepsilon,$$

iz čega slijedi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$.

b) Računamo:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0,$$
$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2},$$

iz čega vidimo da limes ne postoji.

□

Definicija 1.2. *Neka su (X,d) i (Y,d') metrički prostori, i neka je $A \subseteq X, x_0 \in A \cap A'$ i $f : A \longrightarrow Y$ funkcija. Kažemo da je f* ***neprekidna u točki $\mathbf{x_0}$*** *ako je*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Napomena 1.3. *Kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna.*

Zadatak 1.2. *Ispitajte neprekidnost funkcija:*

$$a)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & , (x,y)\ne(0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$b)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y)\ne(0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Rješenje: a) Iz prethodnog zadatka znamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$, pa je f neprekidna.

b) Računamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x,0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{\sqrt{x^2+0^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1,\\
\lim_{y\to 0^+} f(0,y) &= \lim_{y\to 0^+} \frac{0-y}{\sqrt{0^2+y^2}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-y}{|y|} = \lim_{y\to 0^+} -1 = -1.
\end{aligned}$$

Dakle, f nema limes u $(0,0)$ pa nije neprekidna.

□

Teorem 1.4 (Heinelova karakterizacija neprekidnosti)**.** *Neka su X i Y metrički prostori, neka je $f : X \longrightarrow Y$ funkcija i $x_0 \in X$. Tada je f neprekidna u x_0 ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_n \subset X$ takav da $x_n \longrightarrow x_0$ vrijedi $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$.*

Zadatak 1.3. *Može li se funkcija $f(x,y) = \frac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}$ dodefinirati do neprekidne funkcije na $\mathbb{R}^2$?*

Rješenje: Domena funkcije f je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2\backslash\{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je $((x_n,y_n))_n$ niz u $\mathbb{R}^2$ takav da $(x_n,y_n) \to (x_0,x_0)$.Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n^2-y_n^2)}{x_n-y_n}\cdot\frac{x_n+y_n}{x_n+y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n^2-y_n^2)}{x_n^2-y_n^2}\cdot(x_n+y_n) = 2x_0.$$

Ako dodefiniramo funkciju f na sljedeći način:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x-y} & , \ x \neq y,\\ 2x & , \ x = y, \end{cases}$$

onda iz Heineove karakterizacije neprekidnosti slijedi da je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}^2$.

□

Napomena 1.5. *$f = (f_1,f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je neprekidna ako i samo ako su f_1, f_2 neprekidne.*

Zadatak 1.4. *Mogu li se sljedeće funkcije proširiti do neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}^2$?*

$$a)\ f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{\ln(1+x^2y^2)}, \qquad b)\ f(x,y) = \left(\frac{x^2\sin x}{x^2+y^2}, \frac{x\ln(1+y^2)}{x^2+y^2}\right).$$

Rješenje: a) Domena funkcije f je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2\backslash\{(x,y) : xy = 0\}$. Neka je (x_0,y_0) t.d. $x_0y_0 = 0$, i neka je $((x_n,y_n))_n$ niz u $\mathbb{R}^2$ takav da $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$. Tada $x_ny_n \to x_0y_0 = 0$ pa je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(x_ny_n)}{\ln(1+x_n^2y_n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-\cos(x_ny_n)}{x_n^2y_n^2}}{\frac{\ln(1+x_n^2y_n^2)}{x_n^2y_n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{\ln(1+x^2y^2)} & , xy \neq 0,\\ \frac{1}{2} & , xy = 0 \end{cases}$ je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^2$.

b) Treba samo provjeriti može li se funkcija dodefinirati u $(0,0)$ tako da bude neprekidna. Računamo:

$$\left|\frac{x^2 \sin x}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^2 |\sin x|}{x^2} = |\sin x| \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

$$0 \leq \left|\frac{x \ln(1+y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{xy^2}{y^2} = x \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

gdje smo iskoristili da je $\ln(1+t) \leq t$, za $t > 0$. Vidimo da će funkcija f biti neprekidna ako definiramo $f(0,0) := (0,0)$.

□

Zadatak 1.5. *Dokažite da je* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ *neprekidna.*

Rješenje: Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$, i neka je $\varepsilon > 0$. Tada za $\delta = \varepsilon$ i $x \in \mathbb{R}^n$ t.d. $\|x - x_0\| < \delta$ vrijedi

$$|f(x) - f(x_0)| = |\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\| < \delta = \varepsilon.$$

□

Teorem 1.6. *Neka su* X *i* Y *metrički prostori i* $f : X \longrightarrow Y$ *neprekidna funkcija. Tada vrijedi:*

a) za svaki $U \subseteq Y$ *otvoren je* $f^{-1}(U)$ *otvoren,*

b) za svaki $F \subseteq Y$ *zatvoren je* $f^{-1}(F)$ *zatvoren.*

Zadatak 1.6. *Ispitajte otvorenost i zatvorenost skupova:*

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$,

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 2, \sin x + \sin y \leq x^2\}$.

Rješenje: a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ je neprekidna, vrijedi

$$f^{-1}(\langle 1, +\infty\rangle) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in \langle 1, +\infty\rangle\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\} = A.$$

Sada iz teorema 1.6 slijedi da je A otvoren. Jedini skupovi koji su i otvoreni i zatvoreni u Euklidskoj topologiji su $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$. A očito nije prazan, te $(0,0) \notin A$ pa $A \neq \mathbb{R}^2$. Dakle, A nije zatvoren. To smo mogli pokazati i koristeći činjenicu da zatvoreni skupovi sadrže limese svih svojih konvergentnih nizova. Na primjer, $\left(1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ je konvergentan niz u A i konvergira prema $(1,1) \notin A$, pa A nije zatvoren.

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y$ i $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = \sin x + \sin y - x^2$ su neprekidne. Vrijedi

$$B = f^{-1}([2, +\infty\rangle) \cap g^{-1}(\langle -\infty, 0]).$$

Jer su f i g neprekidne, $[2, +\infty\rangle$ i $\langle -\infty, 0]$ zatvoreni skupovi te presjek dva zatvorena skupa zatvoren skup, možemo zaključiti da je B zatvoren. Jer $B \neq \emptyset$ i $B \neq \mathbb{R}^2$, skup B nije otvoren.

□

Definicija 1.7. *Skup* $A \subseteq X$ *je* ***kompaktan*** *ako svaki niz u* A *ima konvergentan podniz čiji je limes u* A.

Teorem 1.8. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.*

Zadatak 1.7. *Ispitajte kompaktnost sljedećih skupova:*

a) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, x^2 + y^2 \leq 5\}$,

b) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, x^2 + y^2 < 5\}$,

c) $\mathbb{Z}$.

Rješenje: a) Vrijedi $K = f^{-1}([1, +\infty\rangle) \cap g^{-1}(\langle -\infty, 5])$, gdje su $f(x,y) = xy$ i $g(x,y) = x^2 + y^2$ neprekidne funkcije. Vidimo da je K zatvoren, još ćemo pokazati da je omeđen. Za $(x,y) \in K$ vrijedi $5 \geq x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2$, tj. $\|(x,y)\| \leq \sqrt{5}$. Tada je K kompaktan po teoremu 1.8.

b) K nije zatvoren jer ne sadrži limese svih konvergentnih nizova u K, npr.

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{n}, \sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{n}\right) \to \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \notin K.$$

Tada K nije ni kompaktan.

c) $\mathbb{Z}$ nije omeđen, pa nije ni kompaktan. Drugi način je da uočimo da je $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ niz u $\mathbb{Z}$ koji nema konvergentan podniz, pa $\mathbb{Z}$ nije kompaktan.

□

Zadatak 1.8. *Neka je $A \subseteq X$ kompaktan i $B \subseteq A$ zatvoren skup. Dokažite da je B kompaktan.*

Rješenje: Neka je $(x_n)_n$ niz u $B \subseteq A$. Jer je A kompaktan, niz $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz $x_{n_k} \to x_0 \in A$. Jer je B zatvoren, vrijedi $x_0 \in B$. Dakle, $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz s limesom u B, pa je po definiciji skup B kompaktan. □

Zadatak 1.9. *Neka je $f : X \longrightarrow Y$ neprekidna funkcija i $K \subseteq X$ kompaktan. Dokažite da je $f(K)$ kompaktan skup.*

Rješenje: Neka je $(y_n)_n$ niz u $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K$ takav da $y_n = f(x_n)$. $(x_n)_n$ je niz u kompaktu K pa ima konvergentan podniz $(x_{n_k})_k$ s limesom $x_0 \in K$. Jer je f neprekidna, po teoremu 1.4 vrijedi $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0) \in f(K)$. Dakle, $(y_{n_k})_k$ je konvergentan podniz niza $(y_n)_n$ s limesom u $f(K)$, pa je $f(K)$ kompaktan.

□

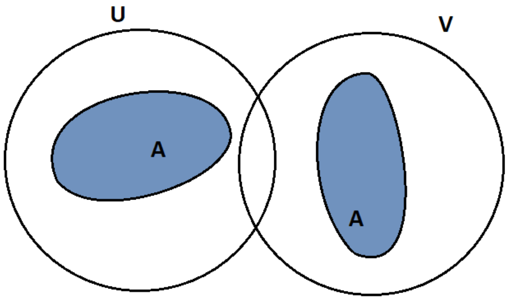
Definicija 1.9. *Podskup A metričkog prostora X je **nepovezan** ako postoje $U, V \subseteq X$ neprazni i otvoreni takvi da $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \subseteq U \cup V$ i $(U \cap V) \cap A = \emptyset$.*

*Kažemo da je A **povezan** ako nije nepovezan.*

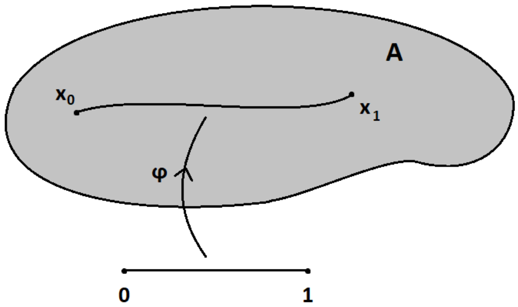
*A je **putevima povezan** ako za svake dvije točke $x_0, x_1 \in A$ postoji neprekidno preslikavanje $\varphi : [0,1] \to X$ takvo da $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$, $\varphi([0,1]) \subseteq A$. φ zovemo **staza** ili **put**.*

Teorem 1.10. *Neka je $A \subseteq X$ putevima povezan. Tada je A povezan.*

Zadatak 1.10. *Neka je $A \subseteq X$ povezan i $f : X \longrightarrow Y$ neprekidna. Dokažite da je $f(A)$ povezan.*



(a) nepovezan skup



(b) put

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, to jest da je $f(A)$ nepovezan. Tada postoje $U, V \subseteq Y$ neprazni i otvoreni takvi da $f(A) \cap U \neq \emptyset$, $f(A) \cap V \neq \emptyset$, $f(A) \subseteq U \cup V$ i $(U \cap V) \cap f(A) = \emptyset$.

Jer je f neprekidna funkcija, skupovi $U' = f^{-1}(U)$ i $V' = f^{-1}(V)$ su otvoreni. Kako je $f(A) \cap U \neq \emptyset$ postoji $y \in f(A) \cap U$. Tada postoji $x \in A$ takav da $f(x) = y \in U$, iz čega zaključujemo $x \in A \cap U'$. Time smo pokazali $A \cap U' \neq \emptyset$. Sasvim analogno se pokazuje $A \cap V' \neq \emptyset$.

Jer je $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ imamo

$$(U' \cap V') \cap A = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \cap A \subseteq f^{-1}(f(A) \cap (U \cap V)) = \emptyset,$$

iz čega zaključujemo $(U' \cap V') \cap A = \emptyset$. Također iz $f(A) \subseteq U \cup V$ slijedi $A \subseteq f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = U' \cup V'$. Tada zapravo imamo da je A nepovezan skup, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, $f(A)$ je povezan skup.

□

Zadatak 1.11. *Dokažite da neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ne može biti injekcija.*

Rješenje: Pretpostavimo da je f injekcija. Neka je B zatvorena kugla u $\mathbb{R}^2$, tada je $f : B \to f(B)$ neprekidna bijekcija. B je kompaktan povezan skup u $\mathbb{R}^2$ pa je i $f(B)$ kompaktan povezan skup u $\mathbb{R}$, to jest $f(B)$ je segment (ne može biti jednočlan skup jer je f injekcija, a B nije jednočlan skup). Neka je $x \in B$ takav da $f(x)$ nije rub segmenta $f(B)$. Vrijedi da je $B \backslash \{x\}$ povezan putevima, pa onda i povezan. S druge strane, jer se $f(x)$ ne nalazi na rubu segmenta $f(B)$ lako se provjeri da je $f(B) \backslash \{f(x)\}$ nepovezan. Ali $f(B) \backslash \{f(x)\} = f(B \backslash \{x\})$ je povezan skup kao slika povezanog skupa neprekidne funkcije, što je kontradikcija. Dakle, f ne može biti injekcija.

□

Zadatak 1.12. *Odredite jesu li sljedeći skupovi povezani:*

a) $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$

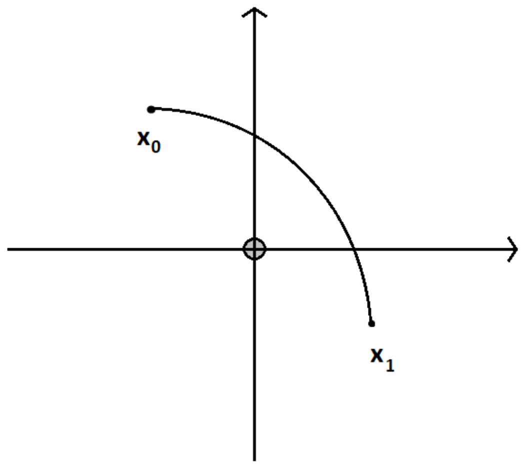
b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > 1\}$

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

e) $E = \mathbb{Q}$ *(u* $\mathbb{R}$*)*

f) $F = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2$.



Rješenje: a) $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ je povezan putevima pa i povezan.

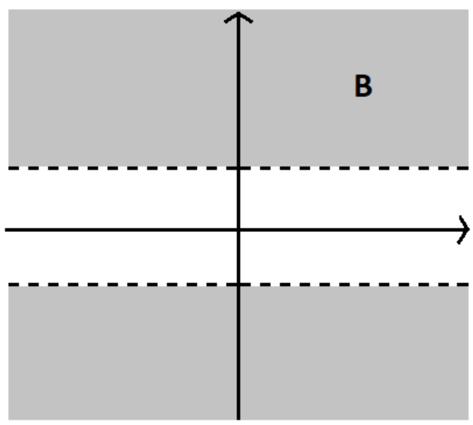
b) Uzmimo na primjer $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$, $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. U i V su otvoreni skupovi i vrijedi:

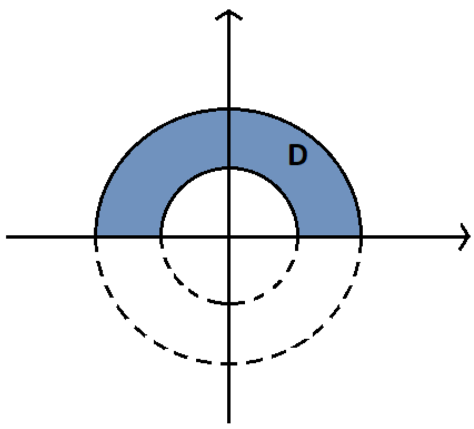
$$B \cap U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -1\} \neq \emptyset,$$
$$B \cap V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\} \neq \emptyset,$$
$$B \subseteq U \cup V, \quad B \cap (U \cap V) = \emptyset.$$

Dakle, B je nepovezan.

c) Neka je $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dana s $f(x) = (\cos x, \sin x)$. f je neprekidna, $[0, 2\pi]$ je povezan skup i $f([0, 2\pi]) = C$, pa možemo zaključiti da je C povezan.

d) Definiramo funkciju $f : [1,2] \times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ s $f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Uočimo da je $\tilde{D} := [1,2] \times [0,\pi]$ povezan skup. Naime, proizvoljne dvije točke $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \tilde{D}$ se mogu povezati putem koji se sastoji od dva segmenta: $[(x_1,y_1),(x_1,y_2)]$ i $[(x_1,y_2),(x_2,y_2)]$. Dakle $\tilde{D}$ je povezan putevima, pa je onda i povezan skup. Nadalje, vrijedi $f([1,2]\times[0,\pi]) = D$ i f neprekidna, pa je D povezan skup.





e) Skup $E = \mathbb{Q}$ promatramo kao podskup od $\mathbb{R}$. Uzmimo na primjer $U := \langle -\infty, \sqrt{2} \rangle$, $V := \langle \sqrt{2}, +\infty \rangle$. U i V su neprazni i otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$ i vrijedi $Q \cap U \neq \emptyset$, $Q \cap V \neq \emptyset$, $\mathbb{Q} \subseteq U \cup V$ te $\mathbb{Q} \cap (U \cap V) = \emptyset$. Dakle, $\mathbb{Q}$ je nepovezan po definiciji.

f) F je podskup od $\mathbb{R}^2$, koji se sastoji od točaka čija je barem jedna koordinata iracionalna (element $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$). Pokazat ćemo da je F povezan putevima, iz čega će slijediti da je povezan. Neka su $(a,b),(c,d) \in F$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je prva koordinata točke (a,b) iracionalna, tj. $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Imamo dva slučaja:

1°) d je iracionalan

Tada se put sastoji od dva segmenta: $[(a,b),(a,d)]$ i $[(a,d),(c,d)]$. Oba segmenta se nalaze u F jer im je barem jedna koordinata iracionalna.

2°) d je racionalan

Tada je c nužno iracionalan. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $b < d$, tada jer je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$ postoji $e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $b < e < d$. Tada se put sastoji od tri segmenta u F:

$$(a,b) \longrightarrow (a,e) \longrightarrow (c,e) \longrightarrow (c,d).$$

□

Napomena 1.11. *Može se pokazati da za svaki prebrojivi skup $S \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 2$ vrijedi da je $\mathbb{R}^n\backslash S$ putevima povezan, pa onda i povezan.*

Zanima nas kako se svojstvo povezanosti skupa ponaša s obzirom na skupovne operacije.

Zadatak 1.13. *Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ povezani. Jesu li sljedeći skupovi povezani:*

a) $A \cap B$,

b) $A^C = \mathbb{R}^n\backslash A$?

Rješenje: a) Vrijedi samo za $n = 1$. Naime, povezani skupovi u $\mathbb{R}$ su intervali (otvoreni, poluotvoreni, zatvoreni), a presjek dva intervala je ili prazan skup ili opet interval. Za $n \geq 2$ se lako može smisliti protuprimjer.

b) Za $n = 1$ uzmimo $A = [a,b]$, $a < b$. Tada je $A^C = \langle -\infty, a\rangle \cup \langle b, +\infty\rangle$, što je nepovezan skup. Za $n > 1$ kostruiramo sličan primjer; uzmimo $A = [a,b] \times \mathbb{R}^{n-1}$. Tada je $A^C = (\langle -\infty, a\rangle \cup \langle b, +\infty\rangle) \times \mathbb{R}^{n-1} = (\langle -\infty, a\rangle \times \mathbb{R}^{n-1}) \cup (\langle b, +\infty\rangle \times \mathbb{R}^{n-1})$. Skupovi $U := \langle -\infty, a\rangle \times \mathbb{R}^{n-1}$ i $V := \langle b, +\infty\rangle \times \mathbb{R}^{n-1}$ su otvoreni, neprazni, disjunktni i u uniji daju skup A, pa zaključujemo da je A nepovezan skup.

□

Zadatak 1.14. *Neka su A i B povezani skupovi takvi da je $A \cap B \neq \emptyset$. Tada je $A \cup B$ povezan.*

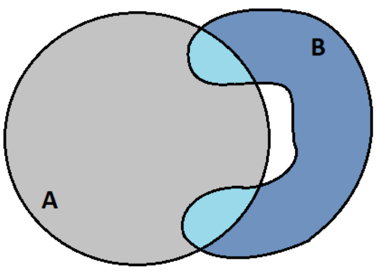
Rješenje: Pretpostavimo suprotno, to jest da je $A \cup B$ nepovezan. Tada postoje U, V neprazni i otvoreni takvi da vrijedi $(A \cup B) \cap U \neq \emptyset$, $(A \cup B) \cap V \neq \emptyset$, $(A \cup B) \subseteq (U \cup V)$ i $(U \cap V) \cap (A \cup B) = \emptyset$.

Iz $(A \cup B) \subseteq (U \cup V)$ imamo $A \subseteq (U \cup V)$. Pretpostavimo $A \cap U \neq \emptyset$ i $A \cap V \neq \emptyset$, znamo da vrijedi $A \cap (U \cap V) \subseteq (A \cup B) \cap (U \cap V) = \emptyset$. Tada je po definiciji A nepovezan, što je kontradikcija. Dakle, vrijedi $A \cap U = \emptyset$ ili $A \cap V = \emptyset$. Jer je $A \subseteq (U \cup V)$, vrijedi $A \subseteq V$ ili $A \subseteq U$. Analogno se pokazuje $B \subseteq V$ ili $B \subseteq U$.

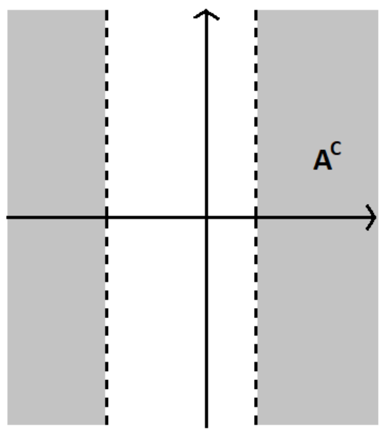
Zbog pokazanog vrijedi $A \cap B \subseteq U \cap V$. Kako je po pretpostavci $A \cap B \neq \emptyset$, iz $A \cap B \subseteq (A \cup B) \cap (U \cap V)$ slijedi $(A \cup B) \cap (U \cap V) \neq \emptyset$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je skup $A \cup B$ nepovezan. Dakle, polazna pretpostavka je bila kriva i zaključujemo da je $A \cup B$ povezan.

□

Napomena 1.12. *Ako su A i B otvoreni i disjunktni, onda je $A \cup B$ nepovezan.*



(a) Primjer presjeka dva povezana skupa u $\mathbb{R}^2$ koji je nepovezan.



(b) Primjer komplementa povezanog skupa u $\mathbb{R}^2$ koji je nepovezan.

Poglavlje 5

Diferencijabilnost i derivacija

1. Diferencijabilnost funkcije

Definicija 1.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Kažemo da je funkcija $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$* ***diferencijabilna u točki*** $\mathbf{x_0} \in \Omega$ *ako postoji linearan operator $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ takav da*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|}{\|h\|} = 0.$$

Pišemo $f'(x_0) := A$ i $f'(x_0)$ zovemo ***derivacija*** *funkcije f u točki x_0.*

Napomena 1.2. *Linearni operator A je jedinstveno određen funkcijom f. f je diferencijabilna na Ω ako je diferencijabilna u svakoj točki $x_0 \in \Omega$.*

Zadatak 1.1. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linearan operator. Dokažite da je $f'(x_0) = f$, za sve $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Rješenje: Računamo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0) + f(h) - f(x_0) - f(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Zbog jedinstvenosti derivacije zaključujemo $f'(x_0) = f$. □

Zadatak 1.2. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funkcija takva da $\|f(x)\| \leq \|x\|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Izračunajte $f'(0)$.*

Rješenje: Za $x = 0$ vrijedi $\|f(0)\| \leq \|0\|^2 = 0$, dakle $f(0) = 0$. Dalje imamo

$$0 \leq \frac{\|f(0 + h) - f(0)\|}{\|h\|} = \frac{\|f(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0,$$

tj. $f'(0) = 0$. □

Definicija 1.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f = (f_1, ..., f_m) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ preslikavanje.* ***i-ta parcijalna derivacija*** *funkcije f_j točki $x_0 \in \Omega$ se definira (ako postoji) s*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f_j(x_0 + \lambda e_i) - f_j(x_0)}{\lambda},$$

pri čemu su $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$ vektori kanonske baze u $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 1.3. *Odredite parcijalne derivacije funkcije $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2 \sin x$.*

Rješenje:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda, y_0) - f(x_0, y_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{y_0^2(\sin(x_0 + \lambda) - \sin(x_0))}{\lambda} = y_0^2 \cos x_0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \lambda) - f(x_0, y_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\sin x_0((y_0 + \lambda)^2 - y_0^2)}{\lambda} = 2y_0 \sin x_0.$$

□

Teorem 1.4. *Ako je $f : \Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u $x_0 \in \Omega$, onda postoje sve parcijalne derivacije i $f'(x_0)$ ima u paru kanonskih baza matrični prikaz*

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Zadatak 1.4. *Odredite matrični prikaz derivacije funkcije $f(x,y,z) = (x^4 y, xe^z)$. Odredite $f'(x_0,y_0,z_0)(x,y,z)$.*

Rješenje: Lako se izračuna

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = 4x_0^3 y_0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = x_0^4, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = e^{z_0}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = x_0 e^{z_0},$$

pa imamo

$$f'(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} 4x_0^3 y_0 & x_0^4 & 0 \\ e^{z_0} & 0 & x_0 e^{z_0} \end{pmatrix}.$$

Računamo djelovanje operatora $f'(x_0,y_0,z_0)$ na $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f'(x_0,y_0,z_0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_0^3 y_0 & x_0^4 & 0 \\ e^{z_0} & 0 & x_0 e^{z_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_0^3 y_0 x + x_0^4 y \\ e^{z_0} x + x_0 e^{z_0} z \end{pmatrix},$$

pa je $f'(x_0,y_0,z_0)(x,y,z) = (4x_0^3 y_0 x + x_0^4 y, e^{z_0} x + x_0 e^{z_0} z)$.

□

Napomena 1.5. *Ako je $f : \Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna u $x_0 \in \Omega$, onda je $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ linearan funkcional i reprezentiramo ga vektorom*

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

*Vektor $\nabla f(x_0)$ zovemo **gradijent** funkcije f u točki x_0. Vrijedi:*

$$f'(x_0)h = \nabla f(x_0) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i.$$

Zadatak 1.5. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$. Dokažite da je $\nabla f(x_0) = 2x_0$.*

Rješenje:

$$0 \leq \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - 2x_0 \cdot h|}{\|h\|} = \frac{|\|x_0+h\|^2 - \|x_0\|^2 - 2x_0 \cdot h|}{\|h\|}$$

$$= \frac{|\cancel{\|x_0\|^2} + \cancel{2x_0 \cdot h} + \|h\|^2 - \cancel{\|x_0\|^2} - \cancel{2x_0 \cdot h}|}{\|h\|} = \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

□

Zadatak 1.6. *Ispitajte za*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) neprekidnost,

b) postojanje parcijalnih derivacija,

c) diferencijabilnost.

Rješenje: a) f je neprekidna na $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, pa još treba ispitati neprekidnost u $(0,0)$:

$$f\left(\tfrac{1}{n}, 0\right) = 0,$$
$$f\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

iz čega vidimo da f ima prekid u $(0,0)$.

b) f ima parcijalne derivacije na $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{y_0 \cdot (x_0^2+y_0^2) - x_0y_0 \cdot 2x_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} = \frac{y_0^3 - x_0^2y_0}{x_0^4 + 2x_0^2y_0^2 + y_0^4},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{x_0 \cdot (x_0^2+y_0^2) - x_0y_0 \cdot 2y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} = \frac{x_0^3 - y_0^2x_0}{x_0^4 + 2x_0^2y_0^2 + y_0^4}.$$

Jer je $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{f(0+\lambda,0)-f(0,0)}{\lambda} = 0$ zaključujemo da parcijalna derivacija po x u $(0,0)$ postoji i vrijedi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Slično vrijedi i $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, dakle f ima sve parcijalne derivacije na $\mathbb{R}^2$.

c) f je derivabilna na $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ i za $(x,y) \neq (0,0)$ vrijedi

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

Tada iz

$$0 = \lim_{h_1 \to 0^+} \frac{|f(0+h_1,0) - f(0,0) - f'(0,0)(h_1,0)|}{\|(h_1,0)\|} = f'(0,0)e_1$$

slijedi $f'(0,0)e_1 = 0$. Slično se pokazuje $f'(0,0)e_2 = 0$, pa nužno mora vrijediti $f'(0,0) = 0$. No, tada je

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(0+h,0+h) - f(0,0) - f'(0,0)(h,h)|}{\|(h,h)\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2+h^2}}{\sqrt{2}|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}|h|} = +\infty,$$

dakle f nije diferencijabilna u $(0,0)$.

□

Napomena 1.6. *Dakle, f može imati sve parcijalne derivacije a da ne bude diferencijabilna. Parcijalne derivacije nam daju "kandidate" za derivaciju.*

Zadatak 1.7. *Dokažite da je funkcija*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x^3-2y^2)}{\sqrt{2x^2+y^4}} & ,(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

derivabilna na $\mathbb{R}^2$.

Rješenje: f je derivabilna na $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, pa još treba provjeriti derivabilnost u $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda,0)-f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{0-0}{\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0,\lambda)-f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{-2\lambda^4}{\sqrt{\lambda^4}}}{\lambda} = 0.$$

Dakle, kandidat za derivaciju je $A(h_1,h_2) = 0$. Računamo:

$$\begin{aligned} 0 \leq & \frac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)|}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{\left|\frac{h_2^2(h_1^3-2h_2^2)}{\sqrt{2h_1^2+h_2^4}}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\ & \leq \left|\frac{h_2^2}{\sqrt{2h_1^2+h_2^4}}\right| \cdot \left|\frac{h_1^3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| + \left|\frac{2h_2^4}{\sqrt{2h_1^2+h_2^4} \cdot \sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \\ & \leq |h_1|^2 + 2|h_2| \stackrel{(h_1,h_2)\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da je A derivacija u $(0,0)$.

□

Teorem 1.7. *Ako je* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *diferencijabilna u* $x_0 \in \Omega$, *onda je* f *neprekidna u* x_0.

Napomena 1.8. *Obrat teorema općenito ne vrijedi, npr.* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Zadatak 1.8. *Neka je* $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. *Može li se* f *proširiti do diferencijabilne funkcije na* $\mathbb{R}^2$*?*

Rješenje: Da bi f bila diferencijabilna u $(0,0)$, mora biti i neprekidna u $(0,0)$. Računamo:

$$0 \leq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot |x| \leq |x| \stackrel{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$

dakle možemo dodefinirati funkciju f u $(0,0)$ s $f(0,0) := 0$ tako da bude neprekidna. Sada tražimo "kandidata" za derivaciju:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda,0)-f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{0-0}{\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0,\lambda)-f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{0-0}{\lambda} = 0,$$

dakle $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Sada zbog

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(0+h,0+h)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,h)|}{\sqrt{2}|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{|h|^3}{2h^2} - 0 - 0}{\sqrt{2}|h|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

zaključujemo da f nije diferencijabilna u $(0,0)$. Dakle, f se ne može proširiti do diferencijabilne funkcije na $\mathbb{R}^2$.

□

Zadatak 1.9. *Ispitajte diferencijabilnost funkcije*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^4} & ,(x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ,(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Rješenje: Treba provjeriti diferencijabilnost u $(0,0)$. Lako se izračuna da je $\nabla f(0,0)=(0,0)$, pa je nul-operator kandidat za diferencijal. Vrijedi:

$$0\leq\left|\frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|=\frac{\frac{\ln(1+h_1^2h_2^2)}{h_1^2+h_2^4}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\leq\frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^4)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\frac{h_2^2}{|h_2|}=|h_2|\overset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\longrightarrow}0,$$

iz čega zaključujemo da je f diferencijabilna u $(0,0)$.

□

Teorem 1.9. *Neka je $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ funkcija i pretpostavimo da postoje sve parcijalne derivacije $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ funkcije f na Ω. Ako su sve parcijalne derivacije neprekidne, onda je f diferencijabilna na Ω.*

Teorem 1.10 (Lančano pravilo)**.** *Neka su $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ i $\Omega'\subseteq\mathbb{R}^m$ otvoreni skupovi, $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $g:\Omega'\longrightarrow\mathbb{R}^p$ preslikavanja takva da $f(\Omega)\subseteq\Omega'$. Ako je f diferencijabilna u $x_0\in\Omega$ i g diferencijabilna u $y_0=f(x_0)\in\Omega'$, onda je i $g\circ f$ diferencijabilna u x_0 i vrijedi:*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Zadatak 1.10. *Neka su $f(x,y,z)=(xyz,1)$ i $g(x,y)=(xy,\frac{x}{y},\frac{\sin x}{\sin y})$. Izračunajte $(g\circ f)'(x,y,z)$.*

Rješenje: Vrijedi

$$g'(x,y)=\begin{pmatrix}y & x\\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2}\\ \frac{\cos x}{\sin y} & -\frac{\sin x\cos y}{\sin^2 y}\end{pmatrix},\quad f'(x,y,z)=\begin{pmatrix}yz & xz & xy\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

pa imamo

$$(g\circ f)'(x,y,z)=g'(f(x,y,z))f'(x,y,z)=\begin{pmatrix}1 & xyz\\ 1 & -xyz\\ \frac{\cos(xyz)}{\sin 1} & -\frac{\sin(xyz)\cos 1}{\sin^2 1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}yz & xz & xy\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}yz & xz & xy\\ yz & xz & xy\\ \frac{yz\cos(xyz)}{\sin 1} & \frac{xz\cos(xyz)}{\sin 1} & \frac{xy\cos(xyz)}{\sin 1}\end{pmatrix}.$$

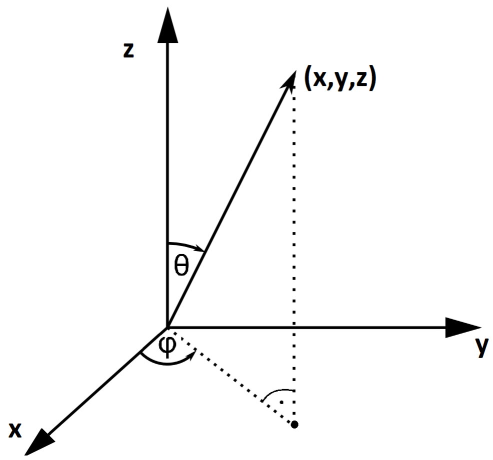
□

Zadatak 1.11. *Neka je $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Sferne koordinate su dane s*

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Neka je $u:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dana s $u(r,\theta,\varphi) = f(x,y,z)$. Odredite $\partial_r u, \partial_\theta u, \partial_\varphi u$.

Rješenje:



Definiramo $\Phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$. Tada je $u = f\circ\Phi$. Odredimo $\Phi'(r,\theta,\varphi)$:

$$\Phi'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$u'(r,\theta,\varphi) = f'(\Phi(r,\theta,\varphi))\Phi'(r,\theta,\varphi),$$

to jest

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\theta,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}r\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial f}{\partial z}r\sin\theta,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}r\sin\theta\cos\varphi.$$

$\square$

Definicija 1.11. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja ima sve parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1,...,n$. Parcijalne derivacije tih funkcija $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$, $i,j = 1,...,n$ zovemo **parcijalne derivacije 2. reda** i označavamo s*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\ i,j = 1,...,n.$$

Parcijalne derivacije p-tog reda definiramo na sličan način. Matricu drugih parcijalnih derivacija

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

*zove se **Hesseova matrica** funkcije f.*

Teorem 1.12 (Schwartz). *Neka je $f : \Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija takva da postoje sve parcijalne derivacije drugog reda, te neka su one neprekidne. Tada je Hesseova matrica simetrična, tj. vrijedi*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \ i, j = 1, ..., n.$$

Definicija 1.13. *Kažemo da je $f : \Omega^{otv} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ klase C^r, i pišemo $f \in C^r(\Omega)$, ako komponentne funkcije f imaju neprekidne parcijalne derivacije r-tog reda.*

Zadatak 1.12. *Može li se funkcija $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ dodefinirati u točki $(0, 0)$ tako da bude:*

a) klase C^1? *b) klase C^2?*

Rješenje: Prvo provjeravamo može li se funkcija dodefinirati tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}^2$. Računamo:

$$0 \leq \left| \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \right| \leq |xy| + |xy| = 2|xy| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Definiramo $f(0, 0) := 0$, tada iz gornjeg računa vidimo da je f neprekidna. Parcijalne derivacije u $(0, 0)$ su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda, 0) - f(0, 0)}{\lambda} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0, \lambda) - f(0, 0)}{\lambda} = 0.$$

Za $(x, y) \neq (0, 0)$ imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - xy(x^2 - y^2) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - xy(x^2 - y^2) \cdot (2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^4 - 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Iz

$$0 \leq \left| \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq |y| + 4|y| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} + |y| \leq 6|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

te zbog $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ zaključujemo da je $\frac{\partial f}{\partial x}$ neprekidna. Na sličan način se dolazi do istog zaključka za $\frac{\partial f}{\partial y}$, pa je $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ i vrijedi

$$f'(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0).$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+\lambda,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda^5}{\lambda^5} = 1, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+\lambda) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} -\frac{\lambda^5}{\lambda^5} = -1.
\end{aligned}$$

Iz gornjeg računa slijedi da $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$, jer bi tada po Schwartovom teoremu vrijedilo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

□

Teorem 1.14 (O inverznom preslikavanju)**.** *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje takvo da je $f \in C^1(\Omega)$. Ako je $x_0 \in \Omega$ točka takva da je $f'(x_0)$ regularan operator, onda postoje okoline $U \subseteq \mathbb{R}^n$ od x_0 i $V \subseteq \mathbb{R}^n$ od $y_0 = f(x_0)$ takve da $f : U \longrightarrow V$ ima inverz $f^{-1} : V \longrightarrow U$ i vrijedi*

$$(f^{-1})'(y_0) = [f'(x_0)]^{-1}.$$

Zadatak 1.13. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiran s $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Odredite sve točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ u kojima f ima lokalni inverz i izračunajte $(f^{-1})'(f(x,y))$.*

Rješenje: Vrijedi

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix},$$

pa je tada Jacobijan

$$Jf(x,y) = \det(f'(x,y)) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} > 0.$$

Dakle, $f'(x,y)$ je regularan operator na $\mathbb{R}^2$, pa po teoremu o inverznom preslikavanju f ima lokalni inverz u okolini svake točke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tada je $(f^{-1})'(f(x,y)) = [f'(x,y)]^{-1}$. Prepostavimo da je $\sin y \neq 0$. Inače bi vrijedilo $\cos y \neq 0$, a tada je postupak sličan. Računamo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} e^x\cos y & -e^x\sin y & 1 & 0 \\ e^x\sin y & e^x\cos y & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\frac{\cos y}{\sin y} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} e^x\cos y & -e^x\sin y & 1 & 0 \\ \frac{e^x}{\sin y} & 0 & \frac{\cos y}{\sin y} & 1 \end{array}\right)\cdot e^{-x}\sin y$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} e^x\cos y & -e^x\sin y & 1 & 0 \\ 1 & 0 & e^{-x}\cos y & e^{-x}\sin y \end{array}\right)\cdot(-e^x\cos y)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -e^x\sin y & 1-\cos^2 y & -\cos y\sin y \\ 1 & 0 & e^{-x}\cos y & e^{-x}\sin y \end{array}\right)\cdot -\frac{e^{-x}}{\sin y}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -e^{-x}\sin y & e^{-x}\cos y \\ 1 & 0 & e^{-x}\cos y & e^{-x}\sin y \end{array}\right),$$

Dakle

$$(f')^{-1}(f(x,y)) = \begin{pmatrix} e^{-x}\cos y & e^{-x}\sin y \\ -e^{-x}\sin y & e^{-x}\cos \end{pmatrix}.$$

□

Napomena 1.15. *U prethodnom zadatku f nije globalno invertibilna jer je periodična, tj. $f(x, y+2\pi) = f(x,y)$.*

Zadatak 1.14. *Neka je $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dana s $f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$. Odredite sve točke $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ u kojima f ima lokalni inverz i izračunajte $(f^{-1})'(f(x,y,z))$.*

Rješenje: Vrijedi

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix},$$

pa je Jacobijan jednak

$$(Jf)(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = -z\begin{vmatrix} z & x \\ y & 0 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} z & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = 2xyz.$$

Dakle, f ima lokalni inverz u točkama (x,y,z) takvima da je $xyz\neq 0$, što vrijedi ako i samo ako je $x,y,z\neq 0$. Također vrijedi $(f^{-1})'(f(x,y,z)) = [f'(x,y,z)]^{-1}$, te se dobiva

$$(f')^{-1}(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2yz} & \frac{1}{2z} & \frac{1}{2y} \\ \frac{1}{2z} & -\frac{y}{2xz} & \frac{1}{2x} \\ \frac{1}{2y} & \frac{1}{2x} & -\frac{z}{2xy} \end{pmatrix}.$$

□

2. Implicitno definirane funkcije

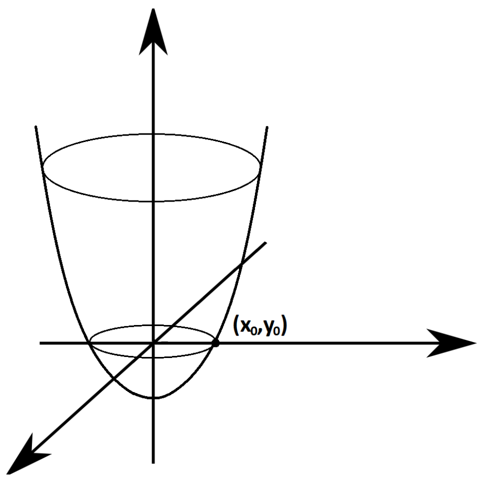
Teorem 2.1 (O implicitnoj funkciji). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ otvoren skup i $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ klase $C^1(\Omega)$. Neka je $(x_0, y_0) \in \Omega$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$ takvi da*

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad i \quad \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Tada postoje okoline $U \subseteq \mathbb{R}^n$ točke x_0 i $V \subseteq \mathbb{R}$ točke y_0 takve da je $U \times V \subseteq \Omega$ i postoji jedinstvena funkcija $f : U \longrightarrow V$ takva da $F(x, f(x)) = 0$, za svaki $x \in U$. Također, $f \in C^1(U)$ i vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, \quad x \in U.$$

Primjer 2.2. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$



Vrijedi $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y$, pa je $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0$. Sada po prethodnom teoremu postoje $U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ i $f : U \to V$ takvi da

$$0 \in U, \ 1 \in V, \ x^2 + f(x)^2 - 1 = 0.$$

Primijetimo da je $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ i da je najveći mogući interval U jednak $\langle -1, 1 \rangle$.

Za $(x_0, y_0) = (1, 0)$ je $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, pa funkcija iz teorema 2.1 ne postoji.

Zadatak 2.1. *Neka je $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = x + \sin y$. Dokažite da u okolini točke $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$ postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija f takva da $F(x, f(x)) = 0$ i $f(0) = 0$. Odredite f eksplicitno.*

Rješenje: Vrijedi $F(0, 0) = 0$ i $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = \cos 0 = 1 \neq 0$, dakle postoji funkcija f koja je diferencijabilna na okolini 0 takva da $F(x, f(x)) = 0$. Računamo:

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = -\frac{1}{\cos f(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\sin f(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

iz čega slijedi da je $f(x) = -\arcsin x$.

□

Zadatak 2.2. *Neka je* $F(x,y) = xy - \ln x + \ln y,\ x, y > 0$. *Dokažite da postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija* $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ *takva da* $F(x, f(x)) = 0$, *za svaki* $x > 0$. *Odredite lokalne ekstreme funkcije* f.

Rješenje: Neka je $x > 0$ fiksan. Tada je funkcija $h : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $h(y) = xy - \ln x + \ln y$ strogo rastuća i neprekidna, jer je

$$h'(y) = x + \frac{1}{y} > 0.$$

Tada zbog $\lim\limits_{y\to 0^+} h(y) = -\infty$, $\lim\limits_{y\to+\infty} h(y) = +\infty$ postoji jedinstveni $y > 0$ takav da $h(y) = 0$. Drugim riječima, postoji jedinstvena funkcija $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ takva da $F(x, f(x)) = 0$. Koristimo teorem 2.1 da bi dokazali da je f derivabilna. Primijetimo $F \in C^1(\langle 0, +\infty\rangle \times \langle 0, +\infty\rangle)$, i za $x > 0$ vrijedi

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) = x + \frac{1}{f(x)} > 0,$$

pa možemo primijeniti teorem o implicitnoj funkciji. Također imamo

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = \frac{f(x) - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{f(x)}} = -\frac{f(x)(xf(x) - 1)}{x(xf(x) + 1)}.$$

Zanimaju nas kritične točke. Vrijedi $f'(x) = 0$ ako i samo ako je $xf(x) = 1$. Iz

$$0 = xf(x) - \ln x + \ln f(x)$$

slijedi

$$0 = 1 - \ln x + \ln f(x),$$

što vrijedi ako i samo ako je $x = \sqrt{e}$.

□

Bibliografija