

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Radulović, Borja Rukavina

Osnove matematičke analize

– skripta –

Zagreb, 16. svibnja 2024.

Sadržaj

1	Zasnivanje skupova \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^N	1
1	Skupovi \mathbb{N} , \mathbb{Z} i \mathbb{Q}	2
2	Skup \mathbb{R}	3
2	Nizovi u \mathbb{R}	17
1	Konvergencija nizova	18
3	Topologija prostora \mathbb{R}^n	27
1	Otvorene i zatvorene kugle	28
2	Zatvarač, interior i rub skupa	36

Poglavlje 1

Zasnivanje skupova \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{R}^N

1. Skupovi \mathbb{N} , \mathbb{Z} i \mathbb{Q}

Zadatak 1.1. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

a) $2^n > n$,

b) $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$.

Rješenje: Koristimo aksiom matematičke indukcije (P3):

a) Baza ($n = 1$): $2^1 > 1$

Korak: pretpostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$2^n > n. \quad (1.1)$$

Tada iz (1.1) slijedi da je $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n = n + n \geq n + 1$.

b) Baza ($n = 1$):

$$\sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2. \quad (1.2)$$

Korak: pretpostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2. \quad (1.3)$$

Tada je

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) + (2(n+1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \quad (1.4)$$

□

Zadatak 1.2. Dokažite da svaki neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima najmanji element, tj. $\exists s \in S$ takav da $s \leq k, \forall k \in S$.

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da tvrdnja ne vrijedi. Tada postoji neprazni podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ koji nema najmanji element. Neka je

$$R := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq s \text{ za svaki } s \in S\}. \quad (1.5)$$

Kako S nema najmanji element, jasno je da vrijedi $R \cap S = \emptyset$. Jasno je da je $1 \in R$ (aksiom (P1)). Pretpostavimo da je $k \in R$. Tada svaki prirodni broj manji ili jednak k mora također biti manji ili jednak s za svaki $s \in S$. Stoga je $1, 2, \dots, k \in R$. Iz činjenice da $R \cap S = \emptyset$, vidimo da vrijedi $1, 2, \dots, k \notin S$. Da je $k+1 \in S$, tada bi $k+1$ bio najmanji element skupa S . Ova činjenica implicira da $k+1 \in R$. Stoga, princip matematičke indukcije implicira da je $R = \mathbb{N}$. Tada je S prazan skup, što je kontradikcija s pretpostavkom da je S neprazan. Stoga, svaki neprazan skup prirodnih brojeva mora imati najmanji element. □

Zadatak 1.3. Dokažite da jednačba $q^2 = 2$ nema rješenja u skupu \mathbb{Q} .

Rješenje: Pretpostavimo da postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $q^2 = 2$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $q = \frac{m}{n}$, za $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ te da su m i n relativno prosti, tj. nemaju zajedničkog djelitelja različitog od -1 i 1 ("razlomak je maksimalno skraćen"). Tada je

$$\frac{m^2}{n^2} = 2, \quad (1.6)$$

odakle slijedi

$$m^2 = 2n^2, \quad (1.7)$$

pa je m^2 djeljiv s 2. Tada je i m djeljiv s 2, jer u slučaju da nije, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k + 1$ pa bi slijedilo da

$$m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1, \quad (1.8)$$

nije djeljiv s 2, što je kontradikcija. Dakle, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k$. Tada iz

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2, \quad (1.9)$$

slijedi

$$n^2 = 2k^2, \quad (1.10)$$

odakle slično vidimo da je i n djeljiv s 2, tj. postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $n = 2l$. Time smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da su m i n relativno prosti. \square

Domaća zadaća

1. Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

2. Dokažite da za svaka tri prirodna broja x, y i z vrijedi

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

3. Dokažite da su definicije zbrajanja i množenja cijelih i racionalnih brojeva „dobre”, tj. da ne ovise o izboru predstavnika klase.
4. Dokažite asocijativnost zbrajanja u skupu \mathbb{Q} .

2. Skup \mathbb{R}

Skup realnih brojeva \mathbb{R} definiramo pomoću aksioma:

1. Aksiomi zbrajanja (+)

$$(A1) \quad (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{asocijativnost})$$

$$(A2) \quad (\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x + 0 = 0 + x = x \quad (\text{neutralni element})$$

$$(A3) \quad (\forall x \in \mathbb{R})(\exists (-x) \in \mathbb{R}) \quad x + (-x) = (-x) + x = 0 \quad (\text{inverz})$$

$$(A4) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x + y = y + x \quad (\text{komutativnost})$$

$(\mathbb{R}, +)$ je abelova grupa.

2. Aksiomi množenja (\cdot)

$$(A5) (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (xy)z = x(yz) \text{ (asocijativnost)}$$

$$(A6) (\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall x \in \mathbb{R}) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \text{ (neutralni element)}$$

$$(A7) (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbb{R}) x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1 \text{ (inverz)}$$

$$(A8) (\forall x, y \in \mathbb{R}) xy = yx \text{ (komutativnost)}$$

$$(A9) (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) x(y + z) = xy + xz \text{ (distributivnost } \cdot \text{ prema } +)$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je polje.

Zadatak 2.1. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dokažite:*

$$a) x + y = x + z \Rightarrow y = z,$$

$$d) 0 \cdot x = 0,$$

$$b) -(-x) = x,$$

$$c) x \neq 0, x \cdot y = x \Rightarrow y = 1,$$

$$e) (-x) \cdot y = -(xy).$$

Rješenje:

$$a) y = (A2) = 0 + y = (A3) = ((-x) + x) + y = (A1) = (-x) + (x + y) = (\text{pretpostavka}) = (-x) + (x + z) = (A1) = ((-x) + x) + z = (A3) = 0 + z = (A2) = z,$$

$$b) (-x) + (-(-x)) = (A3) = 0 = (A3) = (-x) + x \Rightarrow (\text{koristimo a)}) -(-x) = x,$$

$$c) 1 = (A7) = x^{-1} \cdot x = (\text{pretpostavka}) = x^{-1} \cdot (xy) = (A5) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = (A7) = 1 \cdot y = (A6) = y,$$

$$d) 0 \cdot x = (A2) = (0 + 0) \cdot x = (A9) = 0 \cdot x + 0 \cdot x = 2 \cdot 0x \text{ (} 1 \cdot 0x = 2 \cdot 0x)$$

Pretpostavimo da vrijedi $0 \cdot x \neq 0$. Tada iz *c)* slijedi $1 = 2$ ($1 + 0 = 1 + 1$), odakle dobijemo (koristeći dio *a)*) $0 = 1$, što je kontradikcija s *(A6)*. ($1 \neq 0$)

$$e) -(xy) + xy = (A3) = 0 = (d)) = 0 \cdot y = (A3) = ((-x) + x) \cdot y = (A9) = (-x) \cdot y + xy.$$

Iz dijela *a)* imamo $(-x) \cdot y = -(xy)$.

□

3. Aksiomi uređaja

$$(A10) (\forall x, y, \in \mathbb{R}) (x \leq y) \vee (y \leq x) \text{ (linearnost)}$$

$$(A11) (\forall x, y, \in \mathbb{R}) ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (x = y) \text{ (antisimetričnost)}$$

$$(A12) (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z) \text{ (tranzitivnost)}$$

$$(A13) (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x \leq y) \Rightarrow x + z \leq y + z \text{ (usklađenost zbrajanja)}$$

$$(A14) (\forall x, y \in \mathbb{R}) ((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \Rightarrow x \cdot y \geq 0 \text{ (usklađenost množenja)}$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je totalno uređeno polje.

Zadatak 2.2. *Dokažite da za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

a) $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$,

c) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$,

b) $0 < 1$,

d) $0 \leq x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$.

Rješenje:

a) Iz $x \leq 0$ koristeći (A13) imamo $0 = (A3) = (-x) + x \leq (-x) + 0 = (A2) = -x$, iz čega slijedi $0 \leq -x$.

b) Zbog (A6) imamo $0 \neq 1$ pa vrijedi $0 < 1$ ili $1 < 0$. Pretpostavimo da vrijedi $1 < 0$. Iz a) imamo $-1 > 0$ pa iz (A14) dobivamo $(-1) \cdot (-1) > 0$.

S druge strane, koristeći tvrdnje b) i e) iz Zadatka 2.1 imamo $(-1) \cdot (-1) = -(1 \cdot (-1)) = -(-1 \cdot 1) = 1$, pa vrijedi $1 > 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $1 < 0$.

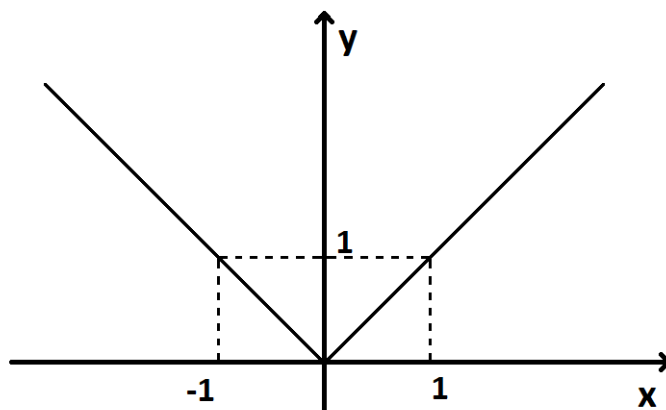
c) Koristeći tvrdnju e) iz Zadatka 2.1 dobivamo $(x - y)(x + y) = (A9) = (x - y)x + (x - y)y = (A9) = x^2 + (-y)x + xy + (-y)y = x^2 - xy + xy - y^2 = (A3) = x^2 + 0 - y^2 = (A2) = x^2 - y^2$.

d) $0 \leq x \leq y \Rightarrow x, y \geq 0$ i $y - x \geq 0$ pa imamo $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) \geq (A14) \geq 0$ (gdje je $y - x \geq 0$ i $y + x \geq y + 0 \geq 0 + 0 = 0$), dobivamo $y^2 \geq x^2$.

□

Definicija 2.1. *Apsolutna vrijednost je funkcija $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana sa*

$$|x| := \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$



Napomena 2.2. *Apsolutna vrijednost ima sljedeća svojstva:*

a) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

c) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$,

d) $||x| - |y|| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.3. Dokažite da za $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|. \quad (2.2)$$

Rješenje: Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.

Baza: (n=1) $|x_1| \leq |x_1|$

Korak: Pretpostavimo da (2.2) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ (*). Neka su $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Tada iz Napomene 2.2 c) i pretpostavke (*):

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| + |x_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| + |x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|. \quad (2.3)$$

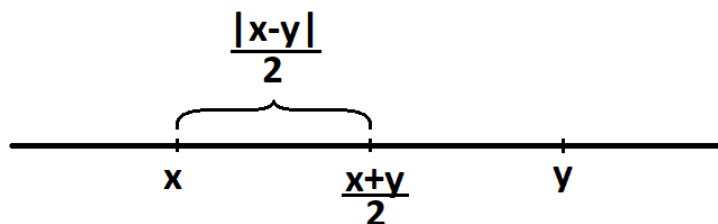
□

Zadatak 2.4. Dokažite da za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$a) \min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}, \quad b) \max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}.$$

Rješenje:

a) Grafički:



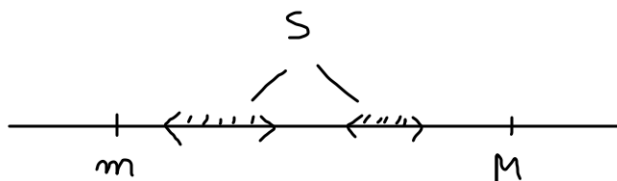
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \leq y$. Tada je $x - y \leq 0$, iz čega slijedi $|x - y| = -(x - y)$, pa je

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (-(x - y))}{2} = x = \min\{x, y\}. \quad (2.4)$$

b) Slično (domaća zadaća).

□

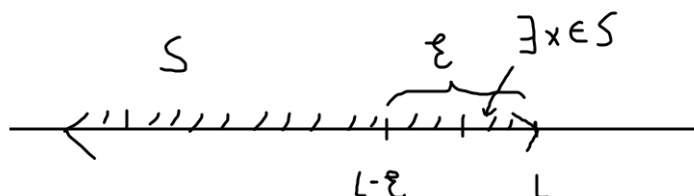
Definicija 2.3. Skup $S \subset \mathbb{R}$ je omeđen odozgo (odozdo) ako postoji $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) takav da $(\forall x \in S) x \leq M$ ($m \leq x$). Kažemo da je M (m) gornja (donja) meda skupa S .



Najmanju gornju među zovemo supremum, a najveću donju među zovemo infimum skupa S .
Pišemo: $\sup S$ i $\inf S$.

Ako je L gornja međa, tada je ona supremum ako i samo ako ne postoji manja gornja međa, odnosno $(\forall a \in \mathbb{R}, a < L) \exists x \in S$ t.d. $a < x$, odnosno

- i) $(\forall x \in S) x \leq L$,
- ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S) L - \varepsilon < x$.



Slično je donja međa L infimum skupa S ako i samo ako vrijedi $(\forall a \in \mathbb{R}, a > L) \exists x \in S$ t.d. $a > x$, odnosno

- i) $(\forall x \in S) x \geq L$,
- ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S) L + \varepsilon > x$.



$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ i $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ zadovoljavaju (A1)-(A14).

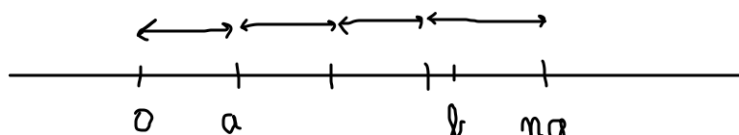
Uvodimo aksiom potpunosti:

(A15) Svaki neprazan i odozgo omeđen podskup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum u \mathbb{R} (tj. $\sup S \in \mathbb{R}$).

Napomena 2.4. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ne zadovoljava (A15).

Napomena 2.5. U skupu \mathbb{R} vrijedi Arhimedov aksiom:

(AA) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a > 0, b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) na > b$.



Definicija 2.6. Neka je $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $L := \sup S \in S$ ($L := \inf S \in S$), onda $\sup S$ ($\inf S$) zovemo maksimum (minimum) skupa S i pišemo $\max S := L$ ($\min S := L$).

Zadatak 2.5. Odredite infimum i supremum skupova:

$$a) A = \left\{ \frac{1}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad b) B = \left\{ \frac{x^2-4}{x^2+4} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Rješenje:

(a) Primijetimo da vrijedi:

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{0+1} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

iz čega slijedi da je 1 gornja međa skupa A . Nadalje, za $x = 0$ imamo

$$\frac{1}{x^2+1} = 1, \quad (2.6)$$

iz čega slijedi da je 1 maksimum skupa A . Dakle, $\sup A = \max A = 1$.

Nadalje, primijetimo da vrijedi:

$$\frac{1}{x^2+1} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

iz čega slijedi da je 0 donja međa skupa A .

Dokažimo da je $\inf A = 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\frac{1}{x^2+1} < 0 + \varepsilon, \quad (2.8)$$

to jest

$$x^2+1 > \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2.9)$$

Po Arhimedovom aksiomu za $a = \varepsilon$ i $b = 1$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n\varepsilon > 1. \quad (2.10)$$

Tada je za $x \geq n$

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon. \quad (2.11)$$

Dakle, $\inf A = 0$.

(b) Primijetimo da vrijedi:

$$\frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{x^2+4-4-4}{x^2+4} = 1 - \frac{8}{x^2+4}. \quad (2.12)$$

Nadalje, imamo:

$$1 - \frac{8}{x^2+4} < 1, \quad (2.13)$$

jer je $\frac{8}{x^2+4} > 0$, pa imamo da je 1 gornja međa skupa B . Tvrdimo da je $\sup B = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tražimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$1 - \frac{8}{x^2+4} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{8}{x^2+4} \Leftrightarrow (x^2+4)\varepsilon > 8. \quad (2.14)$$

Po Arhimedovom aksiomu sada za $a = \varepsilon$ i $b = 8$ imamo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \cdot \varepsilon > 8$, odakle je za $x \geq n$: $(x^2+4)\varepsilon \geq x^2\varepsilon \geq n^2\varepsilon \geq n\varepsilon > 8$.

Dakle, $\sup B = 1$.

S druge strane, primijetimo da vrijedi:

$$1 - \frac{8}{x^2 + 4} \geq 1 - \frac{8}{0 + 4} = 1 - 2 = -1, \quad (2.15)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je $x^2 \geq 0$.

Sada za $x = 0$ imamo $1 - \frac{8}{x^2 + 4} = 1 - \frac{8}{4} = -1$, te imamo $\inf B = \min B = -1$.

□

Definicija 2.7. Niz realnih brojeva je funkcija $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Umjesto $a(n)$ pišemo a_n . Niz označavamo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Kažemo da je (a_n) rastući (padajući) ako $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$). U slučaju stroge nejednakosti ($<$ ili $>$) kažemo da je (a_n) strogo rastući (strogo padajući).

Zadatak 2.6. Odredite infimum i supremum skupova:

$$a) S = \left\{ \frac{3n-2}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad b) S = \left\{ \frac{n^2+1}{2n^2+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rješenje:

(a) Imamo:

$$a_n = \frac{3n-2}{n+3} = \frac{3(n+3) - 3 \cdot 3 - 2}{n+3} = 3 - \frac{11}{n+3}. \quad (2.16)$$

Dakle, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je rastući niz, iz čega slijedi:

$$\inf S = \min S = a_1 = 3 - \frac{11}{4} = \frac{1}{4}. \quad (2.17)$$

Tvrdimo da je $\sup S = 3$. Vrijedi:

$$a_n = 3 - \frac{11}{n+3} \leq 3, \quad (2.18)$$

iz čega slijedi da je 3 gornja međa skupa S .

Neka je $\varepsilon > 0$. Imamo:

$$\begin{aligned} a_n > 3 - \varepsilon &\Leftrightarrow 3 - \frac{11}{n+3} > 3 - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{11}{n+3} \Leftrightarrow (n+3)\varepsilon > 11. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Po Arhimedovom aksiomu, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0\varepsilon > 11$ ($a = \varepsilon$, $b = 11$), pa je $(n_0 + 3)\varepsilon > 11$, odakle slijedi $a_{n_0} > 3 - \varepsilon$. Dakle, $\sup S = 3$.

(b) Imamo niz:

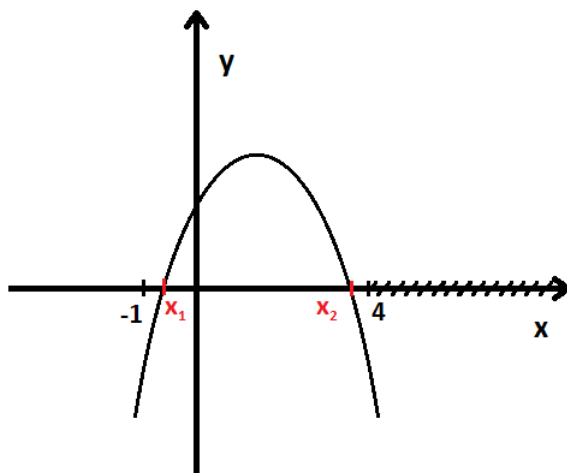
$$a_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n}. \quad (2.20)$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n} < \frac{(n+1)^2 + 1}{2(n+1)^2 + n + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n} < \frac{n^2 + 2n + 2}{2n^2 + 5n + 3} \\ &\Leftrightarrow (n^2 + 1)(2n^2 + 5n + 3) < (n^2 + 2n + 2)(2n^2 + n) \\ &\Leftrightarrow 2n^4 + 5n^3 + 5n^2 + 5n + 3 < 2n^4 + 5n^3 + 6n^2 + 2n \\ &\Leftrightarrow -n^2 + 3n + 3 < 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Vrijedi:

$$-x^2 + 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{-2} = \frac{3 \mp \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x_1 = -0.79 \quad x_2 = 3.79. \quad (2.22)$$



Dakle, (2.21) vrijedi za $n > x_2 \Leftrightarrow n \geq 4$. Tada je niz rastući. Imamo:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 < a_5 < a_6 < \dots \quad (2.23)$$

Slijedi da je $\inf S = \min S = a_4 = \frac{17}{36}$.

$\sup S = ?$. Imamo:

$$a_1 = \frac{1^2 + 1}{2 \cdot 1^2 + 1} = \frac{2}{3}. \quad (2.24)$$

Vrijedi:

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n} = \frac{1}{2} \frac{n^2 + 1}{n^2 + \frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \frac{n^2 + \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + 1}{n^2 + \frac{n}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\frac{n}{2} - 1}{n^2 + \frac{n}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{n-2}{4n^2 + 2n} \leq \frac{1}{2}, \quad n \geq 2. \quad (2.25)$$

Dakle, $\sup S = \max S = a_1 = \frac{2}{3}$. \square

Zadatak 2.7. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđeni skupovi. Dokažite:

- (a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,
 (b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Rješenje:

(a) Zbog

$$x + y \leq \sup A + \sup B, \quad \forall x \in A, y \in B, \quad (2.26)$$

je $\sup A + \sup B$ gornja međa skupa $A + B$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada

$$(\exists x_0 \in A)(\exists y_0 \in B) \quad x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } y_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.27)$$

Tada je $x_0 + y_0 \in A + B$ i $x_0 + y_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} + \sup B - \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \sup B - \varepsilon$.

- (b) Bez smanjenja općenitosti imamo $\sup A \leq \sup B$ (inače zamijenimo uloge A i B).
Vrijedi:

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ili } x \in B \Rightarrow x \leq \sup A \leq \sup B \text{ ili } x \leq \sup B. \quad (2.28)$$

Dakle, imamo:

$$(\forall x \in S = A \cup B) x \leq \sup B, \quad (2.29)$$

pa je $\sup B$ gornja međa skupa $A \cup B$. Dokažimo da je to i supremum. Neka je $\varepsilon > 0$.
Tada

$$(\exists x_0 \in B \subset A \cup B = S) x_0 > \sup B - \varepsilon. \quad (2.30)$$

Dakle, $\sup B$ je najmanja gornja međa skup $A \cup B$.

Slijedi da je $\sup B = \max\{\sup A, \sup B\}$ supremum skupa $A \cup B$.

□

Napomena 2.8. Slično se pokaže (DZ): Ako su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni skupovi, onda vrijedi:

$$(a) \inf(A + B) = \inf A + \inf B,$$

$$(b) \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Zadatak 2.8. Odredite infimum i supremum skupova:

$$(a) S = \left\{ \frac{m-n-1}{mn+4m+3n+12} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$(b) S = \left\{ (-1)^n \frac{n^2+2}{n^2+7} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rješenje:

(a) Vrijedi:

$$\frac{m-n-1}{mn+4m+3n+12} = \frac{m-n-1}{(m+3)(n+4)} = \frac{m+3-(n+4)}{(m+3)(n+4)} = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{m+3}. \quad (2.31)$$

Dakle, $S = A + B$, gdje je

$$A := \left\{ \frac{1}{n+4} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad (2.32)$$

$$B := \left\{ -\frac{1}{m+3} \mid m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vrijedi:

$$\sup A = \max A = \frac{1}{5} \quad (n = 1), \quad \sup B = 0, \quad (2.33)$$

$$\inf A = 0, \quad \inf B = \min B = -\frac{1}{4} \quad (m = 1).$$

Dakle, imamo:

$$\sup S = \sup A + \sup B = \frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{5} \quad (\text{nije maksimum}), \quad (2.34)$$

$$\inf S = \inf A + \inf B = 0 + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \quad (\text{nije minimum}).$$

(b) Definiramo $S := A \cup B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ (-1)^{2k} \frac{(2k)^2 + 2}{(2k)^2 + 7} \mid k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{4k^2 + 2}{4k^2 + 7} \mid k \in \mathbb{N} \right\}, \\ B &:= \left\{ (-1)^{2k-1} \frac{(2k-1)^2 + 2}{(2k-1)^2 + 7} \mid k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -\frac{(2k-1)^2 + 2}{(2k-1)^2 + 7} \mid k \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Skup A . Definiramo:

$$a_k = \frac{4k^2 + 2}{4k^2 + 7} = 1 - \frac{5}{4k^2 + 7} < 1. \quad (2.36)$$

Niz a_k je rastući pa vrijedi $\inf A = \min A = a_1 = \frac{6}{11}$.

Uočimo da je 1 je gornja međa skupa A . Dokažimo da je $\sup A = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} a_k > 1 - \varepsilon &\Leftrightarrow 1 - \frac{5}{4k^2 + 7} > 1 - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{4k^2 + 7} \Leftrightarrow (4k^2 + 7)\varepsilon > 5. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon$ i $b = 5$) postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0\varepsilon > 5$, pa vrijedi:

$$(4k_0^2 + 7)\varepsilon > (4k_0^2)\varepsilon > k_0^2\varepsilon \geq k_0\varepsilon > 5. \quad (2.38)$$

Dakle, $\sup A = 1$.

Skup B . Definiramo:

$$b_k = -\frac{(2k-1)^2 + 2}{(2k-1)^2 + 7} = -1 + \frac{5}{(2k-1)^2 + 7}. \quad (2.39)$$

Niz b_k je padajući pa vrijedi $\sup B = \max B = b_1 = -\frac{3}{8}$.

Uočimo da je -1 donja međa skupa B . Dokažimo da je $\inf B = -1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} b_k < -1 + \varepsilon &\Leftrightarrow -1 + \frac{5}{(2k-1)^2 + 7} < -1 + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{(2k-1)^2 + 7} \Leftrightarrow ((2k-1)^2 + 7)\varepsilon > 5. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon$ i $b = 5$) postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0\varepsilon > 5$ pa vrijedi:

$$((2k_0+1)^2 + 7)\varepsilon > (4k_0^2)\varepsilon > k_0^2\varepsilon \geq k_0\varepsilon > 5. \quad (2.41)$$

Dakle, $\inf B = -1$.

Sada imamo

$$\begin{aligned} \sup S &= \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} = \max\left\{1, -\frac{3}{8}\right\} = 1, \\ \inf S &= \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\} = \min\left\{\frac{6}{11}, -1\right\} = -1. \end{aligned} \quad (2.42)$$

□

Zadatak 2.9. Neka su $A, B \subset [0, \infty)$ odozgo omeđeni i neprazni. Definiramo:

$$A \cdot B = \{xy \mid x \in A, y \in B\}. \quad (2.43)$$

Dokažite

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

Rješenje: Ako je $\sup A = 0$, onda je $A = \{0\}$ pa je $A \cdot B = \{0\}$ i tvrdnja slijedi.

Pretpostavimo da je $\sup A > 0$. Vrijedi:

$$xy \leq \sup A \sup B, \quad \forall x \in A, \forall y \in B, \quad (2.44)$$

pa slijedi da je $\sup A \sup B$ gornja međa skupa $A \cdot B$.

Dokažimo da je supremum.

Prvi način: Neka je $0 < \varepsilon < \sup A \sup B$. Tada za:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon}{2 \sup B} > 0 \quad (\exists x \in A) \quad x > \sup A - \varepsilon_1, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon}{2 \sup A} > 0 \quad (\exists y \in B) \quad y > \sup B - \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Sada imamo:

$$xy > (\sup A - \varepsilon_1)(\sup B - \varepsilon_2) = \sup A \sup B - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4 \sup A \sup B} > \sup A \sup B - \varepsilon. \quad (2.46)$$

Drugi način: Stavimo oznaku $C = A \cdot B$. Već smo dokazali da je $\sup A \sup B$ gornja međa skupa $C = A \cdot B$. Kako je skup C odozgo ograničen, po aksiomu potpunosti, C ima supremum u \mathbb{R} , a kako je supremum najmanja gornja međa, vrijedi

$$\sup C \leq \sup A \sup B \quad (1)$$

Dokažimo sada da vrijedi i $\sup A \sup B \leq \sup C$. Vrijedi $ab \leq \sup C$ za sve $a \in A, b \in B$. Budući da smo pretpostavili $\sup A > 0$, postoji $a' \in A \setminus \{0\}$. Vrijedi $b \leq \frac{\sup C}{a'}$ za sve $b \in B$ pa je $\frac{\sup C}{a'}$ gornja međa skupa B , iz čega slijedi

$$\sup B \leq \frac{\sup C}{a'}.$$

Ukoliko je $\sup B = 0$, onda je $B = \{0\}$ pa je $C = \{0\}$ i onda tvrdnja očito vrijedi jer je u ovom slučaju $\sup C = \sup A \sup B = 0$. Ako je $\sup B > 0$, onda možemo zaključiti da je

$$a' \leq \frac{\sup C}{\sup B}$$

za sve $a' \in A \setminus \{0\}$, a zapravo vrijedi i

$$a \leq \frac{\sup C}{\sup B}$$

za sve $a \in A$. Stoga je $\frac{\sup C}{\sup B}$ gornja međa skupa A pa je

$$\sup A \leq \frac{\sup C}{\sup B},$$

odnosno

$$\sup A \sup B \leq \sup C. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi $\sup A \sup B = \sup C$. □

Napomena 2.9. Ako su $A, B \subset [0, \infty)$, vrijedi $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$ (domaća zadaća).

Napomena 2.10. Ako su $A, B \subset \mathbb{R}$ neprazni i omeđeni, tada je

$$\begin{aligned} \sup(A \cdot B) &= \max\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}, \\ \inf(A \cdot B) &= \min\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Zadatak 2.10. Odredite infimum i supremum skupova:

- (a) $S = \left\{ \frac{2n-1}{n} \frac{1+m}{m} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$,
- (b) $S = \left\{ \frac{n^2 x}{n^2 x + 2x + n^2 + 2} \mid n \in \mathbb{N}, x \geq 0 \right\}$.

Rješenje:

- (a) Neka je $S = A \cdot B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ \frac{2n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset [0, \infty), \\ B &:= \left\{ \frac{1+m}{m} \mid m \in \mathbb{N} \right\} \subset [0, \infty). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dobivamo da je $\sup A = 2$, $\inf A = \min A = 1$ (postiže se za $n = 1$) te $\sup B = \max B = 2$ (postiže se za $m = 1$) i $\inf B = 1$.

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} \sup S &= \sup A \cdot \sup B = 2 \cdot 2 = 4, \\ \inf S &= \inf A \cdot \inf B = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned} \quad (2.49)$$

- (b) Vrijedi

$$S = \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 2} \cdot \frac{x}{x + 1} \mid n \in \mathbb{N}, x \geq 0 \right\} = A \cdot B, \quad (2.50)$$

gdje je

$$A := \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq [0, \infty), \quad B := \left\{ \frac{x}{x + 1} \mid x \geq 0 \right\} \subseteq [0, \infty). \quad (2.51)$$

Lako dobivamo da je $\sup A = 1$ i $\inf A = \min A = \frac{1}{3}$ ($n = 1$).

Vrijedi

$$\frac{x}{x + 1} \geq 0$$

pa je 0 donja međa skupa B , a ujedno i minimum skupa B jer se dostiže za $x = 0$. Stoga je $\inf B = 0$.

Nadalje,

$$\frac{x}{x + 1} = 1 - \frac{1}{x + 1} < 1$$

za $x \geq 0$ pa je 1 gornja međa skupa B . Dokažimo da je $\sup B = 1$. Treba dokazati

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \geq 0)(1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{x + 1}),$$

što je ekvivalentno s $\varepsilon(x+1) > 1$. Primjenom Arhimedovog aksioma na ε i 1, dobivamo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\varepsilon n > 1$. Sada je

$$\varepsilon(n+1) > \varepsilon n > 1,$$

tj.

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Slijedi da je $\sup B = 1$ te $\inf B = \min B = 0$ ($x = 0$).

Sada vidimo da je $\sup S = \sup A \cdot \sup B = 1 \cdot 1 = 1$ te $\inf S = \inf A \cdot \inf B = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 = \min S$.

□

Domaća zadaća

1. Odredite supremume i infimume sljedećih skupa (ako postoje):

- a) $A = \left\{ (-1)^{n+1} \frac{2n^2-1}{n^2+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
- b) $B = \left\{ \frac{2m+2n-3}{2mn-2m-n+1} : m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$.
- c) $C = \left\{ (-1)^{n+m} \frac{mn+m}{2mn+n-2m-1} : m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$.
- d) $D = \left\{ (-1)^{n-m} \cdot \frac{2mn-m+6n-3}{mn+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- e) $E = \left\{ \frac{2nm^2+4nm-2n-3m^2-6m+3}{nm^2+2mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
- f) $F = \left\{ \frac{nx^2-4nx+2}{n} : n \in \mathbb{N}, x \in (0, 3] \right\}$
- g) $G = \left\{ \frac{n^2+1}{3n^2+n} (2 + \cos(m\pi)) : n, m \in \mathbb{N} \right\}$

2. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni skupovi. Dokažite:

- (a) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$,
- (b) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

3.* Neka su $A, B \subseteq [0, +\infty)$. Dokažite da je

$$\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

4. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni ograničeni skupovi. Vrijedi li nužno:

- a) Ako je $A \subsetneq B$, onda je $\sup A < \sup B$?
- b) Ako je $A \subsetneq B$, onda je $\inf A > \inf B$?
- c) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$?
- d) $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$?
- e) $\sup(A - B) = \sup(A) - \sup(B)$, gdje je $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$?
- f) $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$?

Ako neke od tih tvrdnji vrijede općenito, dokažite ih, a ako ne vrijede općenito, navedite kontraprimjer.

5. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažite:

a) $\langle a, b \rangle \sim [a, b] \sim \langle a, b \rangle \sim [a, b] \sim \mathbb{R}$.

b) $[a, +\infty) \sim \langle -\infty, a \rangle \sim \mathbb{R}$.

6. Dokažite da je skup iracionalnih brojeva neprebrojiv skup.

7.* Dokažite da je skup iracionalnih brojeva gust u \mathbb{R} , tj. da za svaki $x \in \mathbb{R}$ i za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\langle x - \epsilon, x + \epsilon \rangle \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

Poglavlje 2

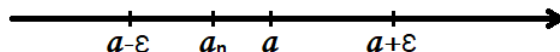
Nizovi u \mathbb{R}

1. Konvergencija nizova

Definicija 1.1. Niz realnih brojeva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira k realnom broju a ako vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0. \quad (1.1)$$

Pišemo: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.



Zadatak 1.1. Dokažite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0, \quad p > 0. \quad (1.2)$$

Rješenje: Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| &< \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n^p} &< \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \\ \Leftrightarrow n \cdot \varepsilon^{1/p} &> 1, \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon^{1/p}$ i $b = 1$) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $n_0 \varepsilon^{1/p} > 1$. \square

Teorem 1.2 (Teorem o sendviču). Neka su $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentni nizovi tako da vrijedi $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: L$. Ako je $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz takav da je $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, onda je i $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentan i $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$.

Zadatak 1.2. Izračunajte limese:

- | | |
|--|--|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 \cos(n) + 8n}{n^3 + 1}$, | d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, \quad a \geq 1$, |
| b) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n, \quad q \in \langle 0, 1 \rangle$, | e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$ |
| c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$, | f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n!}$. |

Rješenje:

a) Vrijedi:

$$0 \leq \left| \frac{5n^2 \cos n + 8n}{n^3 + 1} \right| \leq \frac{5n^2 |\cos n| + 8n}{n^3 + 1} \leq \frac{5 + \frac{8}{n}}{n + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Po Teoremu o sendviču slijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 \cos n + 8n}{n^3 + 1} = 0. \quad (1.5)$$

b) Vrijedi (koristimo binomni teorem):

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{q} - 1\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{q} - 1\right)^k \geq \binom{n}{1} \left(\frac{1}{q} - 1\right), \quad (1.6)$$

gdje smo iskoristili da je $\frac{1}{q} - 1 > 0$. Dakle, slijedi:

$$0 \leq q^n \leq \frac{1}{\frac{1}{q} - 1} \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Po Teoremu o sendviču slijedi da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \quad q \in (0, 1). \quad (1.8)$$

c) Vrijedi:

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt[n]{n} - 1)^k \geq 1 + \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2. \quad (1.9)$$

Sada dobivamo:

$$\begin{aligned} n &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \Rightarrow 1 \geq \frac{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.10)$$

za $n \geq 2$.

Po Teoremu o sendviču slijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad (1.11)$$

d) Vrijedi:

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}, \quad \forall n \geq a. \quad (1.12)$$

Znamo da $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$ po c) dijelu Zadatka, pa po Teoremu o sendviču imamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1. \quad (1.13)$$

e) Vrijedi:

$$4 = \sqrt[n]{0 + 0 + 4^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leq \sqrt[n]{4^n + 4^n + 4^n} \leq 4 \cdot \sqrt[n]{3}. \quad (1.14)$$

Znamo da $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$ po d) dijelu Zadatka, pa po Teoremu o sendviču vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = 4. \quad (1.15)$$

f) Vrijedi:

$$0 \leq \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n!} \leq \frac{\sqrt{n^2 + n^2}}{n!} \leq \frac{n\sqrt{2}}{n!} = \frac{\sqrt{2}}{(n-1)!} \leq \frac{\sqrt{2}}{n-1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.16)$$

Po Teoremu o sendviču vrijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n!} = 0. \quad (1.17)$$

□

Napomena 1.3. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1, \quad a > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q^n &= 0, \quad q \in \langle -1, 1 \rangle.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Teorem 1.4. Vrijedi:

- i) Ako je (a_n) rastući i odozgo omeđen, onda je konvergentan i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.
- ii) Ako je (a_n) padajući i odozdo omeđen, onda je konvergentan i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Zadatak 1.3. Izračunajte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}.\tag{1.19}$$

Rješenje: Definiramo:

$$a_n := \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}.\tag{1.20}$$

Tada je

$$a_{n+1} = \left(2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korijena}}\right)^{1/2}\tag{1.21}$$

Imamo: $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

Dokazati ćemo da je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rastući i odozgo omeđen pomoću matematičke indukcije.

Dokazujemo da je $(a_n)_n$ rastući, tj. da vrijedi

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.\tag{1.22}$$

Baza. ($n = 1$), $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$.

Korak. Pretpostavimo da je $a_n \leq a_{n+1}$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

Tada vrijedi (koristimo pretpostavku indukcije):

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}.\tag{1.23}$$

Dokazujemo da je $(a_n)_n$ odozgo omeđen s 2, tj. da vrijedi

$$a_n \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.\tag{1.24}$$

Baza. ($n = 1$), $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$.

Korak. Pretpostavimo da je $a_n \leq 2$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2.\tag{1.25}$$

Dakle, (a_n) je rastući i odozgo omeđen pa je po Teoremu 1.4 niz (a_n) konvergentan.

Označimo $L := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Tada iz

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (1.26)$$

dobijemo:

$$\begin{aligned} L = \sqrt{2 + L} &\Leftrightarrow L^2 = 2 + L \Leftrightarrow L^2 - L - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (L - 2)(L + 1) = 0 \Leftrightarrow L = 2 \text{ ili } L = -1. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Odbacujemo $L = -1$ jer iz $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ slijedi $L \geq 0$.

Dakle, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. □

Zadatak 1.4 (Domaća zadaća). *Dokažite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{12 + \sqrt{12 + \cdots + \sqrt{12}}}}_{n \text{ korijena}} = 4. \quad (1.28)$$

Zadatak 1.5. *Dokažite da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.*

Rješenje: Definiramo $a_n = \frac{n}{2^n}$. Tada je

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n} a_n. \quad (1.29)$$

Zbog

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n} < 1 \Leftrightarrow n > 1, \quad (1.30)$$

vidimo da je (a_n) padajući za $n \geq 2$. Očito je (a_n) odozdo omeđen s 0 pa je konvergentan.

Označimo $L := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Iz

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n} a_n \quad (1.31)$$

dobijemo $L = \frac{1}{2}L$, tj. $L = 0$. □

Definicija 1.5. *Niz $(b_n)_n$ je podniz niza $(a_n)_n$ ako postoji strogo rastuća funkcija $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takva da je $b_n = a_{p_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Lema 1.6. *Svaki niz u \mathbb{R} ima monoton podniz.*

Teorem 1.7 (Bolzano-Weierstrass). *Svaki omeđeni niz ima konvergentan podniz.*

Teorem 1.8. *Ako je niz (a_n) konvergentan s limesom $L \in \mathbb{R}$, onda je svaki njegov podniz konvergentan s istim limesom L .*

Definicija 1.9. *Kažemo da niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira $k + \infty$ ako*

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) a_n > M, \forall n \geq n_0. \quad (1.32)$$

Pišemo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Slično definiramo niz koji konvergira $k - \infty$.

Definiramo prošireni skup realnih brojeva s $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definicija 1.10. Kažemo da je $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ gomilište niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ako postoji podniz $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ niza $(a_n)_n$ takav da je:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha. \quad (1.33)$$

Napomena 1.11. Iz Leme 1.6 svaki niz ima barem jedno gomilište u $\overline{\mathbb{R}}$. Iz Bolzano-Weierstrassovog teorema 1.7 slijedi da svaki omeđeni niz ima barem jedno gomilište u \mathbb{R} .

Primjer 1.12.

a) Niz $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ima dva gomilišta: -1 i 1 , jer je

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1} + \frac{1}{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \rightarrow -1, \quad k \rightarrow \infty, \\ a_{2k} &= (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.34)$$

b) Niz $a_n = (-1)^n n$ nema gomilišta u \mathbb{R} , ali ima u $\overline{\mathbb{R}}$: $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (-1)^{2k} \cdot 2k = 2k \rightarrow \infty, \\ a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1} \cdot (2k-1) = -(2k-1) \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Definicija 1.13. Neka je (a_n) niz realnih brojeva i $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ skup svih gomilišta niza (a_n) . Definiramo limes superior i limes inferior niza (a_n) s:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup A \quad \text{i} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf A. \quad (1.36)$$

Napomena 1.14. Ako A nije odozgo/odozdo omeđeni, onda definiramo:

$$\sup A = \infty, \quad \inf A = -\infty. \quad (1.37)$$

Zadatak 1.6. Dokažite da je za $q > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty. \quad (1.38)$$

Rješenje: Neka je $M > 0$. Trebamo naći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$q^n > M, \quad \forall n \geq n_0. \quad (1.39)$$

Sada imamo (zbog $q - 1 > 0$ i binomnog teorema):

$$q^n = ((q-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (q-1)^k \geq n(q-1). \quad (1.40)$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = q - 1$ i $b = M$) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$n_0(q-1) > M, \quad (1.41)$$

pa je

$$q^n \geq n(q-1) \geq n_0(q-1) > M, \quad \forall n \geq n_0, \quad (1.42)$$

što je trebalo i dokazati. \square

Zadatak 1.7 (Domaća zadaća). Dokažite da je za $q > 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n} = \infty$. Uputa: slijediti rješenje prethodnog Zadatka s $k = 2$.

Zadatak 1.8. Izračunajte:

$$a) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n \cos(\frac{n\pi}{2})}{2n+1}, \quad b) \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+(-1)^n)^n + n \cos(n\pi)}{2n+1}.$$

Rješenje:

a) Neka je

$$a_n = \frac{1 + n \cos(\frac{n\pi}{2})}{2n + 1}. \quad (1.43)$$

Sada imamo:

$$\cos(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & n = 2k - 1 \ (1, 3, 5, 7, \dots) \\ 1, & n = 4k \ (0, 4, 8, \dots) \\ -1, & n = 4k - 2 \ (2, 6, \dots) \end{cases} \quad (1.44)$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= \frac{1 + (2k - 1) \cdot 0}{2(2k - 1) + 1} = \frac{1}{4k - 1} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ a_{4k} &= \frac{1 + 4k}{2 \cdot 4k + 1} = \frac{1 + 4k}{8k + 1} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty, \\ a_{4k-2} &= \frac{1 + (4k - 2) \cdot (-1)}{2 \cdot (4k - 2) + 1} = \frac{-4k + 3}{8k - 3} \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Dakle, $A = \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ pa je $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A = \frac{1}{2}$.

b) Neka je

$$a_n = \frac{(1 + (-1)^n)^n + n \cos(n\pi)}{2n + 1}. \quad (1.46)$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{(1 + (-1)^{2k})^{2k} + 2k \cdot \cos(2k\pi)}{2 \cdot 2k + 1} = \frac{2^{2k} + 2k}{4k + 1} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty, \\ a_{2k-1} &= \frac{(1 + (-1)^{2k-1})^{2k-1} + (2k - 1) \cdot (-1)}{2 \cdot (2k - 1) + 1} = \frac{-2k + 1}{4k - 1} \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Dakle, $A = \{-\frac{1}{2}, \infty\}$ pa je $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf A = -\frac{1}{2}$. □

Teorem 1.15. Niz (a_n) je konvergentan u $\overline{\mathbb{R}}$ ako i samo ako

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad (1.48)$$

Napomena 1.16. Za $q < -1$ niz $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nije konvergentan. Naime,

$$\begin{aligned} q^{2k} &= (q^2)^k \rightarrow \infty \quad (q^2 > 1), \\ q^{2k-1} &= \frac{1}{q}(q^2)^k \rightarrow -\infty \quad (\frac{1}{q} < 0), \end{aligned} \quad (1.49)$$

jer je

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} q^n = -\infty \neq \infty = \limsup_{n \rightarrow \infty} q^n. \quad (1.50)$$

Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \text{ne postoji, } & q \leq -1, \\ 0, & -1 < q < 1, \\ 1, & q = 1, \\ \infty, & q > 1. \end{cases} \quad (1.51)$$

Zadatak 1.9. *Neka je*

$$a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} + (1+a) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \quad (1.52)$$

Odredite $a \in \mathbb{R}$ tako da niz (a_n) bude konvergentan.

Rješenje: Odredi skup gomilišta A :

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{3^{2k} + (-2)^{2k}}{3^{2k+1} + (-2)^{2k+1}} + (1+a) \cdot 0 = \frac{3^{2k} + 2^{2k}}{3^{2k+1} - 2^{2k+1}} \rightarrow \frac{1}{3}, \quad k \rightarrow \infty, \\ a_{4k-1} &= \frac{3^{4k-1} + (-2)^{4k-1}}{3^{4k} + (-2)^{4k}} + (1+a) \cdot (-1) = \frac{3^{4k-1} - 2^{4k-1}}{3^{4k} + 2^{4k}} - (1+a) \rightarrow \frac{1}{3} - 1 - a, \quad k \rightarrow \infty, \\ a_{4k-3} &= \frac{3^{4k-3} + (-2)^{4k-3}}{3^{4k-2} + (-2)^{4k-2}} + (1+a) \cdot 1 = \frac{3^{4k-3} - 2^{4k-3}}{3^{4k-2} + 2^{4k-2}} + 1 + a \rightarrow \frac{1}{3} + 1 + a. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Dakle, $A = \{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} - a, \frac{4}{3} + a\}$.

Da bi (a_n) bio konvergentan, treba vrijediti:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad (1.54)$$

pa skup A treba biti jednočlan skup, tj.

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - a = \frac{4}{3} + a, \quad (1.55)$$

odakle je $a = -1$. □

Definicija 1.17. *Kažemo da je niz realnih brojeva (a_n) Cauchyjev ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) |a_n - a_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0. \quad (1.56)$$

Teorem 1.18 (Potpunost skupa \mathbb{R}). *Niz (a_n) u \mathbb{R} je konvergentan akko je Cauchyjev.*

Zadatak 1.10. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{3^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.57)$$

Je li (x_n) konvergentan?

Rješenje: Dokazati ćemo da je (x_n) Cauchyjev. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Imamo:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)| \leq \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq \frac{1}{3^{m-1}} + \frac{1}{3^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{m-n-1}\right) = \\ &= \frac{1}{3^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{3}} \leq \frac{3}{2} \frac{1}{3^n}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

gdje je $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{m-n} \leq 1$. Dakle,

$$|x_n - x_m| \leq \frac{3}{2} \frac{1}{3^n}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \geq n. \quad (1.59)$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n \geq n_0. \quad (1.60)$$

Zbog nejednakosti (1.59) je dovoljno pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da

$$\frac{3}{2} \frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon \Leftrightarrow 3^{n_0} \varepsilon > \frac{3}{2}. \quad (1.61)$$

Zbog $3^{n_0} = (1 + 2)^{n_0} = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} 2^k \geq n_0 \cdot 2$ i Arhimedovog aksioma (za $a = 2\varepsilon$ i $b = \frac{3}{2}$) vidimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$3^{n_0} \varepsilon \geq n_0 \cdot 2\varepsilon > \frac{3}{2}. \quad (1.62)$$

□

Domaća zadaća

1. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje (ako je tvrdnja istinita, dokažite je, a ako je lažna, navedite kontraprimjer):

a) Neka je $(a_n)_n$ konvergentni niz realnih brojeva takav da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Tada u skupu $[0, 1)$ postoji beskonačno mnogo članova niza.

b) Neka je $(a_n)_n$ niz realnih brojeva takav da za svaki $a \in \mathbb{R}$ postoji $\epsilon > 0$ takav da interval $\langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$ sadrži konačno mnogo članova niza $(a_n)_n$. Tada je niz $(a_n)_n$ neograničen.

c) Neka je $(a_n)_n$ konvergentni niz realnih brojeva takav da je $a_n < 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i neka je

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Tada je $a \leq 0$.

d) Svaki niz u intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ ima podniz koji konvergira k nekom broju iz $\langle 0, 1 \rangle$.

e) Svaki niz u segmentu $[0, 1]$ ima podniz koji konvergira k nekom broju iz $[0, 1]$.

f) Ako niz realnih brojeva a_n konvergira k 5, onda izvan intervala $\langle 3, 6 \rangle$ postoji beskonačno mnogo elemenata niza.

g) Neka je $(b_n)_n$ niz realnih brojeva takav da za svaki $b \in \mathbb{R}$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da interval $\langle b - \frac{1}{m}, b + \frac{1}{m} \rangle$ sadrži konačno mnogo članova niza $(b_n)_n$. Tada je niz $(b_n)_n$ neograničen.

h) Neka su $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$ nizovi realnih brojeva takvi da je $a_n \leq b_n \leq c_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i neka je x gomilište nizova $(a_n)_n$ i $(c_n)_n$. Tada je x nužno gomilište niza $(b_n)_n$.

2. a) Nađite primjer niza kojemu je skup gomilišta $\{-8, 0, 8\}$.

b) Odredite limes inferior i limes superior niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadanog sa

$$a_n = \frac{n^4 \cos(\pi \sin(\frac{n\pi}{2})) + 10n^4 \sin(\frac{n\pi}{2}) + n^2}{(n^2 - 1)(n^2 + 1)}.$$

3. a) Dokažite da je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadan formulom

$$a_n = \frac{n^3 \sin(\sin(n^{2023})) + 7n \cos(\cos(n^{2023}))}{(-n)^5 + (-n)^3}$$

konvergentan.

- b) Ispitajte je li niz zadan rekurzivno s

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

konvergentan te ako je, odredite mu limes.

4. a) Odredite, ako postoji, limes niza:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 7}, \quad n \in \mathbb{N},$$

- b) Odredite skup gomilišta niza:

$$b_n = \frac{n^4 + 4^n \cos(n\pi) + 3^n}{n^4 + 3 \cdot 4^n + 2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Odredite sve parametre $b \in \mathbb{R}$ tako da niz

$$b_n = \frac{2^{3n+5} + n^5 + 17}{n^8 + 2^{3n+1}} + (b^2 - 9) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

bude konvergentan.

Poglavlje 3

Topologija prostora \mathbb{R}^n

1. Otvorene i zatvorene kugle

Definicija 1.1. Neka je $X \neq \emptyset$. Preslikavanje $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ je metrika ako vrijedi:

(M1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ (pozitivnost)

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (strogost)

(M3) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ (simetričnost)

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ (nejednakost trokuta)

Uredeni par (X, d) zovemo metrički prostor.

Zadatak 1.1. Neka je (X, d) metrički prostor. Definiramo:

$$d'(x, y) := \alpha d(x, y) + \beta, \quad (1.1)$$

za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kakve uvjete moraju zadovoljavati α i β tako da bi (X, d') bio metrički prostor?

Rješenje: Provjeravamo svojstva metrike:

(M3) Vrijedi za d' (jer (M3) vrijedi za d).

(M2) Treba vrijediti: $d'(x, x) = \alpha d(x, x) + \beta = \beta \Rightarrow \beta = 0$.

S druge strane, sada imamo da $0 = d'(x, y) = \alpha d(x, y) \Rightarrow x = y$ (jer (M2) vrijedi za d).

(M1) Vrijedi:

$$0 \leq d'(x, y) = \alpha d(x, y) \Leftrightarrow \alpha > 0. \quad (1.2)$$

(M4) Vrijedi:

$$d'(x, y) = \alpha d(x, y) \leq \alpha(d(x, z) + d(z, y)) = d'(x, z) + d'(z, y). \quad (1.3)$$

Dakle, da bi d' bila metrika, treba vrijediti $\alpha > 0$ i $\beta = 0$.

□

Promatramo slučaj n -dimenzionalnog Euklidskog prostora:

$$X = \mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}, \quad n \geq 1 \quad (1.4)$$

Definiramo preslikavanja:

$$d_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}, \quad (1.5)$$

$$d_\infty: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\},$$

za $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Zadatak 1.2. Dokažite da je (\mathbb{R}^n, d_∞) metrički prostor.

Rješenje:

(M1) Vrijedi pozitivnost:

$$d_\infty(x, y) \geq 0. \quad (1.6)$$

(M2) Vrijedi strogost:

$$\begin{aligned} d_\infty(x, y) = 0 &\Leftrightarrow |x_1 - y_1| = \dots = |x_n - y_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n \Leftrightarrow x = y. \end{aligned} \quad (1.7)$$

(M3) Vrijedi simetričnost:

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max\{|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|\} = d_\infty(y, x). \quad (1.8)$$

(M4) Za sve $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi nejednakost trokuta:

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y), \quad (1.9)$$

odakle dobijemo:

$$d_\infty(x, y) \leq d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y). \quad (1.10)$$

□

Zadatak 1.3. a) *Dokažite Cauchy-Schwarzovu nejednakost:*

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.11)$$

b) *Dokažite da je (\mathbb{R}^n, d_2) metrički prostor.*

Rješenje:

a) Neka je $f(t) := \sum_{i=1}^n (|x_i|t + |y_i|)^2$, $t \in \mathbb{R}$. Tada je:

$$f(t) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)t^2 + 2t \sum_{i=1}^n |x_i y_i| + \sum_{i=1}^n y_i^2 = At^2 + Bt + C, \quad (1.12)$$

gdje je

$$A = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad B = 2 \sum_{i=1}^n |x_i y_i|, \quad C = \sum_{i=1}^n y_i^2. \quad (1.13)$$

Zbog činjenice da vrijedi $f(t) = \sum_{i=1}^n (|x_i|t + |y_i|)^2 \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, diskriminanta mora biti nepozitivna, tj.

$$0 \geq D = B^2 - 4AC = \left(2 \sum_{i=1}^n |x_i y_i|\right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}. \quad (1.14)$$

b)(M1) Vrijedi pozitivnost:

$$d_2(x, y) \geq 0. \quad (1.15)$$

(M2) Vrijedi strogost:

$$0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \Leftrightarrow |x_1 - y_1|^2 = \cdots = |x_n - y_n|^2 = 0 \Leftrightarrow x = y. \quad (1.16)$$

(M3) Vrijedi simetričnost:

$$d_2(x, y) = d_2(y, x). \quad (1.17)$$

(M4) Vrijedi nejednakost trokuta (koristimo Cauchy–Schwartzovu nejednakost (1.11)):

$$\begin{aligned} d_2^2(x, y) &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| |z_i - y_i| + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 = \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \right)^2 = (d_2(x, z) + d_2(z, y))^2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

□

Napomena 1.2. \mathbb{R}^n je također unitaran prostor sa skalarnim produktom:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (1.19)$$

Tada za normu induciranu tim skalarnim produktom

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (1.20)$$

vrijedi

$$\|x - y\| = d_2(x, y). \quad (1.21)$$

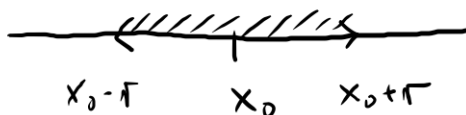
Zadatak 1.4 (Domaća zadaća). Dokažite da je (\mathbb{R}^n, d_1) metrički prostor, ako je

$$d_1(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|. \quad (1.22)$$

Definicija 1.3. Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Otvorena kugla sa središtem u x_0 i radijusom r je skup

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}. \quad (1.23)$$

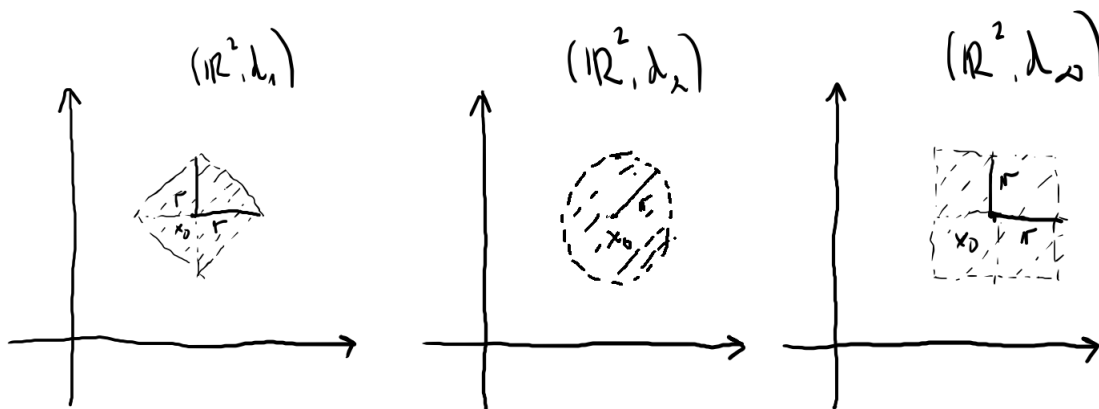
Primjer 1.4. a) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ je metrički prostor.



Sada je

$$K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} = \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle. \quad (1.24)$$

b) Imamo:



Definicija 1.5. Podskup $U \subset X$ metričkog prostora X je otvoren ako se može prikazati kao unija otvorenih kugala u X .

Primjer 1.6. $K(x_0, r)$ je otvoren skup.

Teorem 1.7.

$$U \text{ je otvoren} \Leftrightarrow (\forall x_0 \in U)(\exists r > 0) K(x_0, r) \subset U. \quad (1.25)$$

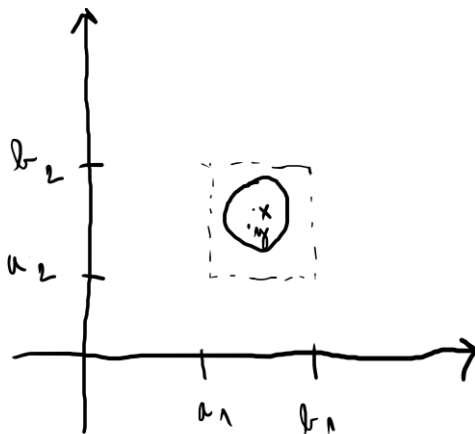


Zadatak 1.5. Dokažite da je skup

$$U = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle \quad (1.26)$$

otvoren u (\mathbb{R}^n, d_2) .

Rješenje: Skiciramo u \mathbb{R}^2 :



Primijetimo da je $U = \{y \in \mathbb{R}^n : a_i < y_i < b_i, \forall i = 1, \dots, n\}$. Neka je $x \in U$.

Definiramo:

$$r := \min\{x_i - a_i, b_i - x_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}. \quad (1.27)$$

Tada je za $y \in K(x, r)$ te $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$|y_i - x_i| \leq d_2(x, y) < r, \quad (1.28)$$

pa je

$$\begin{aligned} y_i - x_i < r \leq b_i - x_i &\Rightarrow y_i < b_i, \\ x_i - y_i < r \leq x_i - a_i &\Rightarrow y_i > a_i. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Slijedi da vrijedi:

$$a_i < y_i < b_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.30)$$

pa je $y \in U$. Dakle,

$$K(x, r) \subset U. \quad (1.31)$$

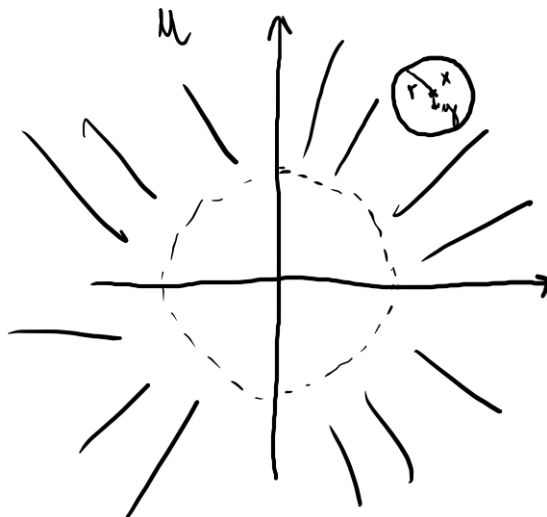
Po Teoremu je U otvoren. □

Zadatak 1.6. Dokažite da je

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 > 4\}, \quad (1.32)$$

otvoren u (\mathbb{R}^2, d_2) .

Rješenje: Skiciramo:



Neka je $x \in U$. Tada je $x_1^2 + x_2^2 > 4$. Neka je $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2$. Dokažimo da je $K(x, r) \subset U$.

Neka je $y \in K(x, r)$. Tada je (koristimo nejednakost trokuta):

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = d(x, 0) &\leq d(x, y) + d(y, 0) < r + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ \Leftrightarrow 2 < \sqrt{y_1^2 + y_2^2} &\Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 > 4 \Leftrightarrow y \in U. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Dakle, $K(x, r) \subset U$, pa je po Teoremu 1.7 U otvoren. \square

Definicija 1.8. Topologija na skupu $X \neq \emptyset$ je familija τ podskupova od X koja zadovoljava sljedeća svojstva:

(T1) $\emptyset, X \in \tau$

(T2) Ako je $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset \tau$ proizvoljna familija iz τ , tada je $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

(T3) Za $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \dots, U_n \in \tau$ slijedi da je $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

Teorem 1.9. U metričkom prostoru (X, d) familija

$$\tau := \{U \subseteq X \mid U \text{ otvoren}\} \tag{1.34}$$

je topologija na X .

Zadatak 1.7. Neka je $X \neq \emptyset$ i $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{1.35}$$

a) Dokažite da je d metrika.

b) Odredite familiju otvorenih skupova τ .

Rješenje:

a)(M1) Vrijedi pozitivnost:

$$d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X. \quad (1.36)$$

(M2) Vrijedi strogost:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y. \quad (1.37)$$

(M3) Vrijedi simetričnost:

$$d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X. \quad (1.38)$$

(M4) Neka je $x, y, z \in X$. Vrijedi nejednakost trokuta:

$$x = y \Rightarrow d(x, y) = 0 \leq d(x, z) + d(z, y), \quad (1.39)$$

jer je $d(x, z) \geq 0$ i $d(z, y) \geq 0$. Nadalje, vrijedi:

$$x \neq y \Rightarrow z \neq x \text{ ili } z \neq y \Rightarrow d(z, x) + d(z, y) \geq 1 = d(x, y). \quad (1.40)$$

b) Vrijedi:

$$K(x, 1) = \{y \in X : d(x, y) < 1\} = \{x\}. \quad (1.41)$$

Neka je $A \subseteq X$ proizvoljan. Tada je

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} = \bigcup_{x \in A} K(x, 1), \quad (1.42)$$

pa je po definiciji A otvoren.

Stoga je $\tau = \mathcal{P}(X)$. (svaki podskup $A \subseteq X$ je otvoren)

□

Napomena 1.10. Metrika iz Zadatka 1.7 se zove diskretna metrika.

Definicija 1.11. Podskup A metričkog prostora je zatvoren ako je $A^c = X \setminus A$ otvoren.

Zadatak 1.8. (Ovaj zadatak se radio na predavanjima) Dokažite da su sljedeći skupovi zatvoreni u metričkom prostoru (X, d) :

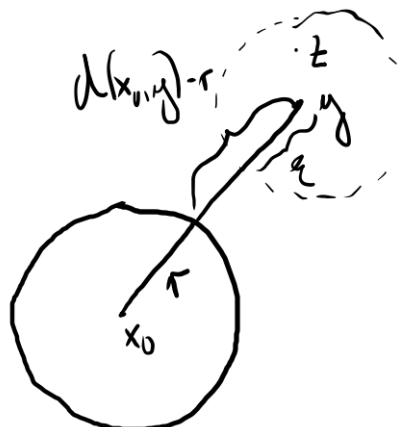
a) zatvorena kugla: $\overline{K}(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}$,

b) $\{x\}$, $x \in X$.

Rješenje:

a) Trebamo dokazati da je $\overline{K}(x_0, r)^c$ otvoren.

Neka je $y \in \overline{K}(x_0, r)^c$. Uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2}(d(x_0, y) - r)$.



Neka je $z \in K(y, \varepsilon)$. Imamo:

$$z \in K(y, \varepsilon) \Rightarrow d(z, y) < \frac{1}{2}(d(x_0, y) - r) \Rightarrow r + 2d(z, y) < d(x_0, y) \leq d(x_0, z) + d(z, y). \quad (1.43)$$

jer $d(z, y) \geq 0$, sada je $d(x_0, z) > r$, dakle $z \in \overline{K}(x_0, r)^c$. Jer je $z \in K(y, \varepsilon)$ bio proizvoljan zaključujemo $K(y, \varepsilon) \subset \overline{K}(x_0, r)^c$.

Slijedi da je $K(y, \varepsilon) \subset \overline{K}(x_0, r)^c$ pa je po Teoremu 1.7 $\overline{K}(x_0, r)^c$ otvoren.

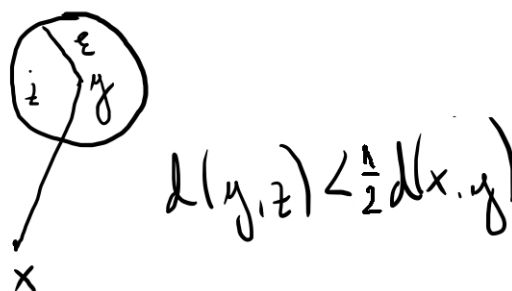
- b) Neka je $x \in X$ i $A := \{x\}$. Tada za $y \notin A$ slijedi da je $y \neq x$, pa za $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$ vrijedi:

$$z \in K(y, \varepsilon) \Rightarrow d(y, z) < \varepsilon < d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad (1.44)$$

pa imamo

$$d(x, z) \geq d(x, y) - d(y, z) > d(x, y) - \frac{1}{2}d(x, y) = \frac{1}{2}d(x, y) > 0, \quad (1.45)$$

tj. $x \neq z$, pa je $z \notin A$. ($K(y, \varepsilon) \subset A^c$)



Dakle, $K(y, \varepsilon) \subset A^c$ pa je po Teoremu 1.7 A^c otvoren.

□

2. Zatvarač, interior i rub skupa

Definicija 2.1. Neka je A podskup metričkog prostora X . Definiramo:

- **zatvarač skupa A :** $\text{Cl } A = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ zatvoren}}} F$ (druga oznaka : \bar{A})
- **interior skupa A :** $\text{Int } A = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ otvoren}}} U$
- **rub skupa A :** $\partial A = \text{Cl } A \cap \text{Cl } (A^C)$

Napomena 2.2.

- 1) $\text{Cl } A$ i ∂A su zatvoreni skupovi.
- 2) $\text{Int } A$ je otvoren skup.
- 3) Skup A je zatvoren ako i samo ako vrijedi $A = \text{Cl } A$.
- 4) $\text{Int } A \subseteq A \subseteq \text{Cl } A$

Primjer 2.3. Promatramo metrički prostor (\mathbb{R}, d_2) .

- a) $A = \langle 0, 1 \rangle$: $\text{Int } A = \langle 0, 1 \rangle$, $\text{Cl } A = [0, 1]$, $\partial A = \{0, 1\}$
- b) $\text{Int } \mathbb{Z} = \emptyset$, $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, $\partial \mathbb{Z} = \text{Cl } \mathbb{Z} \cap \text{Cl } (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$
- c) $\text{Int } \mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\text{Cl } \mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\partial \mathbb{R} = \mathbb{R} \cap \text{Cl } \emptyset = \emptyset$

Zadatak 2.1. Neka je (X, d) metrički prostor. Dokažite:

- a) $\text{Cl } A = \text{Int } A \cup \partial A$,
- b) $\text{Int } A \cap \partial A = \emptyset$,
- c) $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$.

Rješenje:

- a) Trebamo pokazati dvije skupovne inkluzije. Uočimo da je jedna inkluzija očita jer je, po definiciji,

$$\partial A = \text{Cl } A \cap \text{Cl } (A^C) \subseteq \text{Cl } A, \quad \text{Int } A \subseteq A \subseteq \text{Cl } A$$

pa je $\text{Int } A \cup \partial A \subseteq \text{Cl } A$.

Dokažimo sada obratnu inkluziju. Pretpostavimo da je $x \in \text{Cl } A$. Treba dokazati da je $x \in \text{Int } A \cup \partial A$. Ako je $x \in \partial A$, onda je $x \in \text{Int } A \cup \partial A$. Pretpostavimo sada da $x \notin \partial A = \text{Cl } A \cap \text{Cl } (A^C)$. Tada, pošto je $x \in \text{Cl } A$, slijedi $x \notin \text{Cl } (A^C)$, odnosno $x \in (\text{Cl } (A^C))^C$. Uočimo da je $(\text{Cl } (A^C))^C$ otvoren skup (jer je $\text{Cl } (A^C)$ zatvoren). Osim toga, vrijedi $A^C \subseteq \text{Cl } A^C$ pa je $A \supseteq (\text{Cl } (A^C))^C$, odnosno $(\text{Cl } (A^C))^C$ je otvoren skup sadržan u A pa je $(\text{Cl } (A^C))^C \subseteq \text{Int } A$, odnosno $x \in \text{Int } A$, a onda je $x \in \text{Int } A \cup \partial A$. Time je i druga inkluzija dokazana.

- b) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $x \in \text{Int } A \cap \partial A$. Pošto je $x \in \partial A = \text{Cl } A \cap \text{Cl}(A^C)$, slijedi $x \in \text{Cl}(A^C)$. Nadalje, pošto je $\text{Int } A \subseteq A$, iz toga slijedi da je $(\text{Int } A)^C \supseteq A^C$. Kako je $\text{Int } A$ otvoren skup, iz toga slijedi da je $(\text{Int } A)^C$ zatvoren skup koji sadrži A^C , a onda je $\text{Cl } A^C \subseteq (\text{Int } A)^C$. Dakle, $x \in (\text{Int } A)^C$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $x \in \text{Int } A \cap \partial A$.
- c) Iz b) imamo da je unija $\text{Int } A \cup \partial A$ disjunktna, pa iz a) slijedi $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$.

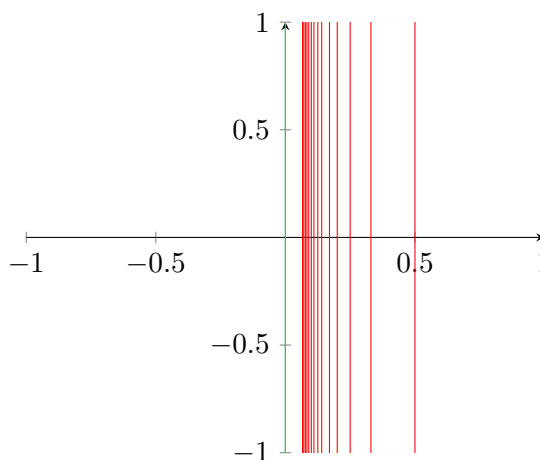
□

Zadatak 2.2. *Odredite interior, zatvarač i rub sljedećih skupova*

- a) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R}$ u \mathbb{R}^2 ,
- b) $B = \{(x, y) : x \in \langle 1, 2 \rangle \cup \{5\}, y \in \mathbb{R}\}$ u \mathbb{R}^2 ,
- c) $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, 0) = \frac{1}{n}\}$.

Rješenje:

- a) Tvrdimo da je $\text{Int } A = \emptyset$. U suprotnom postoji $x = (x_1, x_2) \in \text{Int } A$, a onda, pošto je $\text{Int } A$ otvoren skup, postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq \text{Int } A \subset A$. Međutim, unutar $K(x, r)$ sigurno postoji točka koja nije u A , npr. točka $y = (y_1, x_2)$, gdje je y_1 bilo koji iracionalni broj iz intervala $\langle x_1 - r, x_1 + r \rangle$ (takav y_1 postoji jer je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gust u \mathbb{R}). Zaista, $d(y, x) = |y_1 - x_1| < r$ pa je $y \in K(x, r)$, a pošto je y_1 iracionalan, $y \notin A$. Stoga je $\text{Int } A = \emptyset$.



Tvrdimo da je $\text{Cl } A = A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$. Najprije uočimo da je $A \subseteq \text{Cl } A$ po definiciji. Nadalje, za $x_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(0, x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, x_2 \right).$$

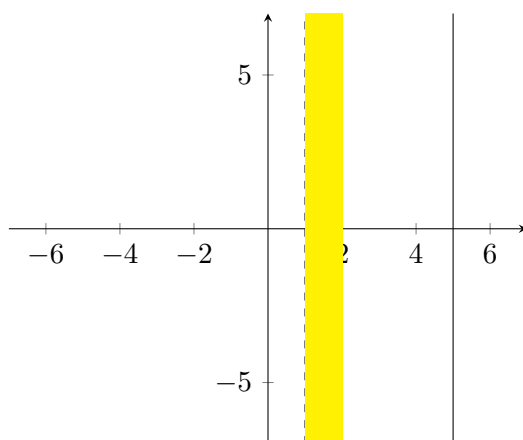
Pošto je niz $(\frac{1}{n}, x_2)_n$ niz u A , po teoremu s predavanja slijedi da je njegov limes $(0, x_2) \in \text{Cl } A$. Sada smo pokazali da je $A \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \subset \text{Cl } A$. Da bismo dokazali obratnu inkluziju, dovoljno je dokazati da je $A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ zatvoren skup (jer je to onda zatvoren skup koji sadrži A , a onda mora sadržavati i $\text{Cl } A$). Uočimo da je

$$(A \cup (\{0\} \times \mathbb{R}))^C = \left(\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right\rangle \right) \times \mathbb{R},$$

a to je otvoren skup u \mathbb{R}^2 pa je $A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ zatvoren skup u \mathbb{R}^2 . Dakle, $\text{Cl } A = A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

Po prethodnom zadatku je $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A = A \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

- b) Tvrdimo da je $\text{Int } B = \langle 1, 2 \rangle \times \mathbb{R}$. Skup $\langle 1, 2 \rangle \times \mathbb{R}$ je otvoren skup sadržan u B pa je $\langle 1, 2 \rangle \times \mathbb{R} \subseteq \text{Int } B$. Nadalje, znamo da je $\text{Int } B \subseteq B$. Dokažimo sada da je $\text{Int } B \subseteq \langle 1, 2 \rangle \times \mathbb{R}$. Neka je $x = (x_1, x_2) \in \text{Int } B \subseteq B$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq \text{Int } B \subseteq B$. Ako je $x_1 = 5$, onda je točka $y = (5 + \frac{r}{2}, x_2) \in K(x, r) \subseteq \text{Int } B \subseteq B$, tj. $(5 + \frac{r}{2}, x_2) \in B$, a to nije istina. Dakle, $\text{Int } B \subseteq \langle 1, 2 \rangle \times \mathbb{R}$. Ako je $x_1 = 2$, onda je točka $y = (2 + \frac{r}{2}, x_2) \in K(x, r) \subseteq \text{Int } B \subseteq \langle 1, 2 \rangle \times \mathbb{R}$, ali to očito nije istina pa je $\text{Int } B \subseteq \langle 1, 2 \rangle \times \mathbb{R}$. Time smo dokazali obje inkluzije pa je $\text{Int } B = \langle 1, 2 \rangle \times \mathbb{R}$.



Tvrdimo da je $\text{Cl } B = ([1, 2] \cup \{5\}) \times \mathbb{R}$. Uočimo da je

$$\begin{aligned} (([1, 2] \cup \{5\}) \times \mathbb{R})^C &= (\langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 2, 5 \rangle \cup \langle 5, +\infty \rangle) \times \mathbb{R} \\ &= (\langle -\infty, 1 \rangle \times \mathbb{R}) \cup (\langle 2, 5 \rangle \times \mathbb{R}) \cup (\langle 5, +\infty \rangle \times \mathbb{R}), \end{aligned}$$

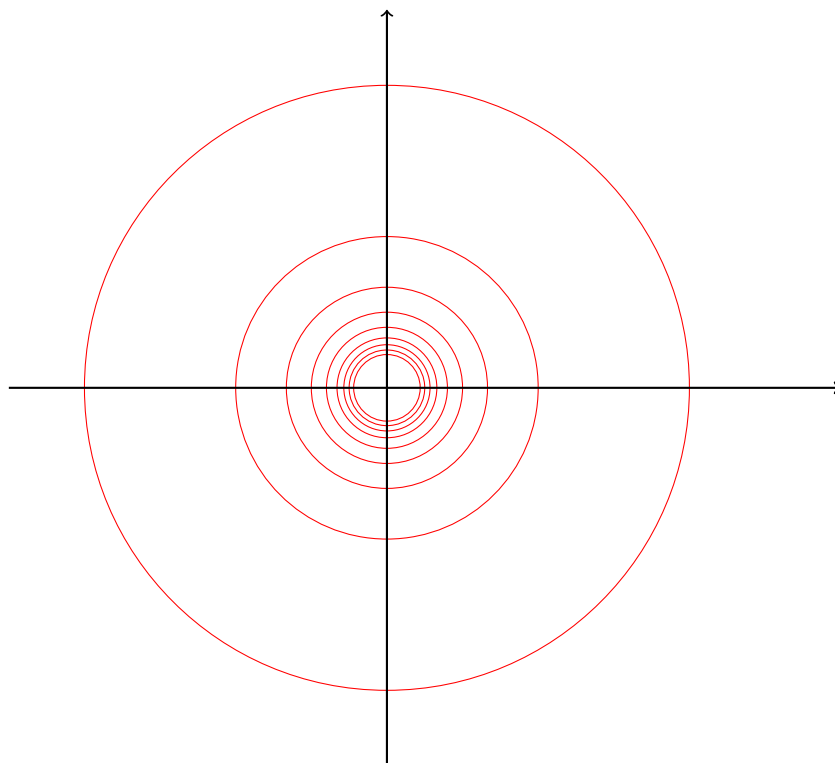
a to je otvoren skup pa je $([1, 2] \cup \{5\}) \times \mathbb{R}$ zatvoren skup koji sadrži B pa je $\text{Cl } B \subseteq ([1, 2] \cup \{5\}) \times \mathbb{R}$. Po definiciji vrijedi $([1, 2] \cup \{5\}) \times \mathbb{R} = B \subseteq \text{Cl } B$. Preostaje još dokazati da je $\{1\} \times \mathbb{R} \in \text{Cl } B$. Uočimo da je za $x_2 \in \mathbb{R}$

$$(1, x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}, x_2 \right).$$

Pošto je $((1 + \frac{1}{n}, x_2))_n$ niz u B , to znači da je $(1, x_2) \in \text{Cl } B$. Dokazali smo $\text{Cl } B = ([1, 2] \cup \{5\}) \times \mathbb{R}$.

Vrijedi $\partial B = \text{Cl } B \setminus \text{Int } B = \{1, 2, 5\} \times \mathbb{R}$.

- c) Tvrdimo da je $\text{Int } C = \emptyset$. U suprotnom postoji $x = (x_1, x_2) \in \text{Int } C$, a onda, pošto je $\text{Int } C$ otvoren skup, postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq \text{Int } C \subseteq C$. Međutim, unutar $K(x, r)$ sigurno postoji točka koja nije u C , npr. točka $y \in K(x, r)$ takva da je $d(y, (0, 0))$ iracionalan broj. Stoga je $\text{Int } C = \emptyset$.



Tvrdimo da je $\text{Cl} C = C \cup \{(0, 0)\}$. Uočimo da je $C \subseteq \text{Cl} C$ po definiciji zatvarača. Nadalje, vrijedi

$$(0, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, 0 \right).$$

Pošto je $\left(\frac{1}{n}, 0\right)_n$ niz u C to znači da je $(0, 0) \in \text{Cl} C$. Dokazali smo $C \cup \{(0, 0)\} \subseteq \text{Cl} C$. Da bismo dokazali obratnu inkluziju, dovoljno je dokazati da je $C \cup \{(0, 0)\}$ zatvoren skup (jer će onda, pošto sadrži C , slijediti $\text{Cl} C \subseteq C \cup \{(0, 0)\}$). Uočimo da je komplement tog skupa jednak

$$\overline{K}((0, 0), 1)^C \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(K \left((0, 0), \frac{1}{n} \right) \cap \left(\overline{K} \left((0, 0), \frac{1}{n+1} \right)^C \right) \right).$$

Uočimo da je $\overline{K}((0, 0), 1)^C$ otvoren skup (vidi zadatak od prije), a i

$$K \left((0, 0), \frac{1}{n} \right) \cap \left(\overline{K} \left((0, 0), \frac{1}{n+1} \right)^C \right)$$

je otvoren skup za svaki $n \in \mathbb{N}$ (presjek dvaju otvorenih skupova). Stoga je i $(C \cup \{(0, 0)\})^C$ otvoren skup, odnosno $C \cup \{(0, 0)\}$ je zatvoren skup.

Vrijedi $\partial C = \text{Cl} C \setminus \text{Int} C = C \cup \{(0, 0)\}$.

□

Domaća zadaća

1. a) Neka je $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana s

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \frac{|x_1 - y_1|}{2} + \frac{|x_2 - y_2|}{5}$$

Je li d metrika na \mathbb{R}^2 ?

- b) Neka je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana s

$$d(x, y) = \sqrt[3]{|y^3 - x^3|}.$$

Je li d metrika na \mathbb{R} ?

- c) Dokažite da je (\mathbb{R}^n, d_1) metrički prostor, gdje je

$$d_1(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

- d) Neka su $d_1, d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dvije metrike. Je li funkcija $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dana s

$$d(x, y) = \max\{2d_1(x, y), d_2(x, y)\}$$

metrika na \mathbb{R}^n ?

2. Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq B \subseteq X$. Dokažite da je $A' \subseteq B'$ i $\text{Cl } A \subseteq \text{Cl } B$.

3. Neka je (X, d) metrički prostor i A i B podskupovi od X . Dokažite:

a) $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$

b) $\text{Cl}(A \cap B) \subseteq \text{Cl } A \cap \text{Cl } B$. Vrijedi li obratna inkluzija?

4. Neka je $A = [0, 1] \times [1, 5]$. Dokažite da je A zatvoren skup.

5. Za sljedeće skupove odredite interior, zatvarač i rub:

a) $A = \{(x, 1) : x > 2\}$ u \mathbb{R}^2 ,

b) $B = \langle 2, 4 \rangle \times [5, +\infty)$ u \mathbb{R}^2 ,

c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \langle -2, 3 \rangle, y > 0\}$ u \mathbb{R}^3 ,

d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z \in [-1, 1)\}$ u \mathbb{R}^3 ,

6. Dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ zatvoren u (\mathbb{R}^n, d_2) .

7. Dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i < 1, i = 1, \dots, n\}$ otvoren u (\mathbb{R}^n, d_2) .

- 8.* Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazni skupovi i stavimo $A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^n \mid a \in A, b \in B\}$. Ako su A i B otvoreni skupovi u euklidskom prostoru \mathbb{R}^n , onda je i $A + B$ otvoren skup. Dokažite!

Bibliografija