Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2
Kolokvij 28.6.2022.

1. Za sljedeća linearna preslikavanja odredite jesu li distribucije, odnosno temperirane distribucije na $\mathbb{R}$:

   (a) (3.5 boda) $\langle T_1, \varphi\rangle = \int_0^\infty \mathrm{ch}(e^x)\varphi(x)dx$,

   (b) (3.5 boda) $\langle T_2, \varphi\rangle = \sum_{n=2}^\infty \ln n \cdot \varphi(n)$.

   Rješenje:

   (a) Vidimo da je T_1 zapravo pridruženo funkciji $\mathrm{ch}(e^x) \cdot H(x)$. Kako je ta funkcija neprekidna do na jedan prekid prve vrste, ona je u $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, pa je $T_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. S druge strane, za $x > 0$ je $e^x \geq \frac{x^2}{2}$, pa je

   $$\mathrm{ch}(e^x) \geq \frac{1}{2}e^{e^x} \geq \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}},$$

   pa kao u primjeru s vježbi testiranjem na $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$ vidimo da $T_1 \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

   (b) Za $\varphi \in \mathcal{S}$ imamo

   $$|\langle T_2, \varphi\rangle| \leq \sum_{n=2}^\infty \ln n \cdot |\varphi(n)| = \sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n^3}(n^3|\varphi(n)|) \leq \|\varphi\|_{3,0}\sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n^3},$$

   pa kako je $\ln n < n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, slijedi konvergencija zadnjeg reda i posljedično $T_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Posebno je onda i $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Neka je $Pf\frac{1}{x^2}$ distribucija dana s

   $$\langle Pf\frac{1}{x^2}, \varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\Big).$$

   (a) (2 boda) Dokažite da je $x^2 \cdot \mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2} = 1$ u smislu $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   (b) (2 boda) Dokažite da je $Pf\frac{1}{x^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

   (c) (2 boda) Odredite $\widehat{Pf\frac{1}{x^2}}$.

   Rješenje:

   (a) Za $\varphi \in \mathcal{D}$ imamo

   $$\begin{aligned}\langle x^2 Pf\frac{1}{x^2}, \varphi\rangle &= \langle Pf\frac{1}{x^2}, x^2\varphi\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{x^2\varphi(x)}{x^2}dx - 2\frac{(x^2\varphi)(0)}{\varepsilon}\Big) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\varphi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)dx\end{aligned}$$

(b) Vrijedi $Pf\frac{1}{x^2} = -(pv\frac{1}{x})'$, pa kako je $pv\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'$, slijedi da je i $Pf\frac{1}{x^2}$.

(c) Ponovno koristeći $Pf\frac{1}{x^2} = -(pv\frac{1}{x})'$ imamo

$$\widehat{Pf\frac{1}{x^2}} = -\widehat{pv\frac{1}{x}'} = -(2\pi i\xi)\widehat{pv\frac{1}{x}} = -2\pi i\xi \cdot (-i\pi\,\mathrm{sign}(\xi)) = -2\pi^2|\xi|.$$

3. (4 boda) Izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^3+x}dx.$$

Rješenje: Imamo

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^3+x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx,$$

gdje su

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R}), \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Primjenom Plancherelovog teorema slijedi

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}} \Big(\pi\cdot\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}\Big)\cdot(\pi e^{-2\pi|\xi|})d\xi = 2\pi^2\int_0^{\frac{1}{2\pi}} e^{-2\pi\xi}d\xi = \pi\Big(1-\frac{1}{e}\Big).$$

4. Neka su $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ te stavimo $f(x_1,x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$.

(a) (2 boda) Pokažite da je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

(b) (2 boda) Pokažite da je $\hat{f}(\xi_1,\xi_2) = \hat{f}_1(\xi_1)\hat{f}_2(\xi_2)$.

(c) (3 boda) Ako je $f_1(x) = e^{-x^2}$ i $f_2(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}$, riješite iduću zadaću na $\mathbb{R}^2 \times \langle 0,\infty\rangle$:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u(\cdot,0) = f. \end{cases}$$

Rješenje:

(a) Očito je f klase C^∞. Neka su $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2), \beta = (\beta_1,\beta_2) \in \mathbb{N}_0^2$. Tada je

$$\begin{aligned} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| &= |x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\partial_1^{\beta_1}\partial_2^{\beta_2}f(x_1,x_2)| \\ &= |x_1^{\alpha_1}f_1^{(\beta_1)}(x_1)| \cdot |x_2^{\alpha_2}f_2^{(\beta_2)}(x_2)| \\ &\leq \|f_1\|_{\alpha_1,\beta_1} \cdot \|f_2\|_{\alpha_2,\beta_2} < \infty. \end{aligned}$$

(b) Primjenom Fubinijevog teorema dobivamo

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi_1,\xi_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x_1)f_2(x_2)e^{-2\pi(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}dx_1dx_2 \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}} f_1(x_1)e^{-2\pi x_1\xi_1}dx_1\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} f_2(x_2)e^{-2\pi x_2\xi_2}dx_2\Big) \\ &= \hat{f}_1(\xi_1)\hat{f}_2(\xi_2). \end{aligned}$$

(c) Primjenom F.T. po x na zadaću dobivamo sljedeći problem

$$\begin{cases} \hat{u}_t + 4\pi^2|\xi|^2\hat{u} = 0, \\ \hat{u}(\cdot, 0) = \hat{f}. \end{cases}$$

Rješenje ODJ-a je dano s

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

Koristeći (b) dio zadatka imamo

$$\hat{f}(\xi) = \widehat{f_1}(\xi_1)\widehat{f_2}(\xi_2) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi_1^2} \cdot \sqrt{4\pi}e^{-4\pi^2\xi_2^2}.$$

Uvrštavanjem u izraz za $\hat{u}$ slijedi

$$\hat{u}(\xi, t) = 2\pi e^{-\pi^2(1+4t)\xi_1^2 - 4\pi^2(1+t)\xi_2^2},$$

odakle primjenom inverzne F.T. konačno dobivamo ponovnim korištenjem (b) dijela zadatka

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{1}{(1+t)(1+4t)}}e^{-\frac{x_1^2}{1+4t} - \frac{x_2^2}{4(1+t)}}.$$

5. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i ograničen.

(a) (2 boda) Pokažite da postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $u \in C_c^\infty(\Omega)$ vrijedi

$$\|D^2u\|_{L^2}^2 := \sum_{i,j=1}^{d} \|\partial_i\partial_j u\|_{L^2}^2 \leq C\|\Delta u\|_{L^2}^2.$$

(b) (4 boda) Pokažite da su na $H_0^2(\Omega)$ ekvivalentne norme $u \mapsto \|u\|_{H^2}$ i $u \mapsto \|\Delta u\|_{L^2}$.

Rješenje:

(a) Za $u \in C_c^\infty(\Omega)$ koristeći $(*)$ Schwartzov teorem i dvije parcijalne integracije (tj. prebacivanje derivacija bez rubnog člana) dobijemo za $i, j \in \{1, \ldots, d\}$

$$\|\partial_i\partial_j u\|_{L^2}^2 = \int_\Omega u_{x_i x_j}^2 = \int_\Omega u_{x_i x_j}u_{x_i x_j} \overset{(*)}{=} \int_\Omega u_{x_i x_i}u_{x_j x_j}.$$

Stoga je

$$\sum_{i,j=1}^{d} \|\partial_i\partial_j u\|_{L^2}^2 = \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega u_{x_i x_i}u_{x_j x_j} = \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{d} u_{x_k x_k}\Big)^2 = \|\Delta u\|_{L^2}^2.$$

(b) Jednu nejednakost jednostavno dobijemo na sljedeći način:

$$\|\Delta u\|_{L^2}^2 \leq \|D^2u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|D^2u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H^2}^2.$$

Za drugu nejednakost, prvo za $u \in C_c^\infty(\Omega)$ možemo primijeniti Poincareovu nejednakost i na sam u, kao i na sve derivacije prvog reda, da bismo zaključili

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq C_p \|D^2 u\|_{L^2}, \quad \|u\|_{L^2} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2} \leq C_p^2 \|D^2 u\|_{L^2}.$$

Korištenjem tvrdnje (a) dijela onda dobivamo

$$\|u\|_{H^2}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|D^2 u\|_{L^2}^2 \leq (C_p^2 + C_p + 1) \|\Delta u\|_{L^2}^2.$$

Tvrdnja za sve $u \in H_0^2(\Omega)$ slijedi uzimanjem niza $(u_n)_n \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ takvog da $u_n \xrightarrow{H^2} u$ te puštanjem limesa u prethodnoj nejednakosti koristeći direktnu posljedicu konvergencije u H^2:

$$\nabla u_n \xrightarrow{L^2} \nabla u, \qquad \Delta u_n \xrightarrow{L^2} \Delta u.$$