Prva zadaća

Rok predaje: 10.5.2024.

1. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Definiramo niz funkcija $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ s
$$\varphi_n(x) = n \cdot \left[\varphi\big((1+1/n)x\big) - \varphi(x)\right].$$
Pokažite da (φ_n) konvergira u $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2. Definiramo preslikavanje na prostoru $C_c^\infty(\mathbb{R})$ s
$$\langle T, \varphi\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\big(\varphi(1/n) - \varphi(-1/n)\big).$$
   (a) Dokažite da je T distribucija reda 1.
   (b) Pokažite da je $\operatorname{supp} T = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

3. Definiramo preslikavanje $Pf\frac{1}{x^2} : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ s
$$\langle Pf\frac{1}{x^2}, \varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right].$$
   a) Dokažite da je $Pf\frac{1}{x^2}$ dobro definirano preslikavanje.
   b) Dokažite da je distribucija reda 2.
   c) Dokažite da vrijedi $(p.v.\frac{1}{x})' = -Pf\frac{1}{x^2}$.

4. Odredite limese sljedećih nizova u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:
   (a) $A_n = \cos(n^2 x)$,
   (b) $B_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{1/n}$.

5. Neka je $T \in M_d(\mathbb{R})$ invertibilna matrica, te neka je $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dokažite
$$\widehat{(f \circ T)} = |\det T|^{-1} \hat{f} \circ (T^*)^{-1}.$$
Posebno, Fourierova transformacija je invarijantna na rotacije, tj. ako je T ortogonalna matrica takva da je $\det T = 1$, vrijedi $\widehat{f \circ T} = \hat{f} \circ T$.

6. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \neq 0$. Dokažite da ne postoji otvoreni interval $I \in \mathbb{R}$ takav da je $\hat{\varphi}\big|_I \equiv 0$.