KONTINUIRANE SLUČAJNE VARIJABLE

KONTINUIRANE SLUČAJNE VARIJABLE

UVOD

• Kontinuirana slučajna varijabla može poprimiti neprebrojivo (beskonačno) mnogo vrijednosti.

• Razlike diskretnih i kontinuiranih slučajnih varijabli:

- područje vrijednosti **diskontinuirane varijable** predstavlja konačno ili prebrojivo mnogo diskontinuiranih (diskretnih) vrijednosti
- područje vrijednosti **kontinuirane varijable** predstavlja neki interval na brojevnom pravcu ili čak čitav pravac

• Za razliku od diskretnih slučajnih varijabli gdje svaka vrijednost varijable ima neku konačnu vjerojatnost, svaka moguća vrijednost kontinuirane slučajne varijable imat će **infinitezimalno malenu vjerojatnost** (*npr: visina studenata ili temperatura otopine*).

• Stoga, kod **kontinuirane varijable** vjerojatnost možemo pridružiti **NEKOM INTERVALU**, ali pojedinačna vrijednost varijable ima **VJEROJATNOST NULA** !

DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE

(kratka digresija!)

- za diskretnu slučajnu varijablu koja može poprimiti vrijednosti x_1 , x_2 , … **funkcija vjerojatnosti** je funkcija za koju vrijedi:

$$f(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$$

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

- **kumulativna funkcija raspodjele** diskretne slučajne varijable *X* je funkcija sa sljedećim svojstvima

$$F(x_0) = \sum_{x_i \leq x_0} p(x_i)$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$$

ta funkcija pokazuje kolika je vjerojatnost da slučajna varijabla *x* poprimi bilo koju vrijednost manju od x_0 ili jednako x_0 **(kraj digresije!)**

FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI

- kod diskretne varijable govorili smo o funkciji raspodjele vjerojatnosti koja je svakoj vrijednosti varijable pridruživala određenu vjerojatnost
- kod **kontinuirane slučajne varijable** uvodimo **funkciju gustoće vjerojatnosti *f(x)*,** koja ima slijedeća svojstva**:**

1. $$f(x) \geq 0$$

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

- ukoliko područje vrijednosti kontinuirane slučajne varijable x nije čitav pravac, već samo određeni interval [a,b] te vrijedi da je *f(x)=0* za svaki vrijednost varijable izvan tog intervala, onda možemo pisati :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$$

3. $$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P\left(x_1 < x < x_2\right)$$

-pri tome su x_1 i x_2 bilo koje dvije vrijednosti varijable x koje zadovoljavaju nejednakost $x_1<x_2$

FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI

1. $$f(x) \geq 0$$

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

-ovo svojstvo je potrebno kako bi vjerojatnost bila normirana, odnosno ovim svojstvom se zadovoljava uvjet da **vjerojatnost sigurnog događaja bude 1** (odnosno to je vjerojatnost da varijabla poprimi bilo koju vrijednost iz područja svoje definicije)

FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI

3. $$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P(x_1 < x < x_2)$$

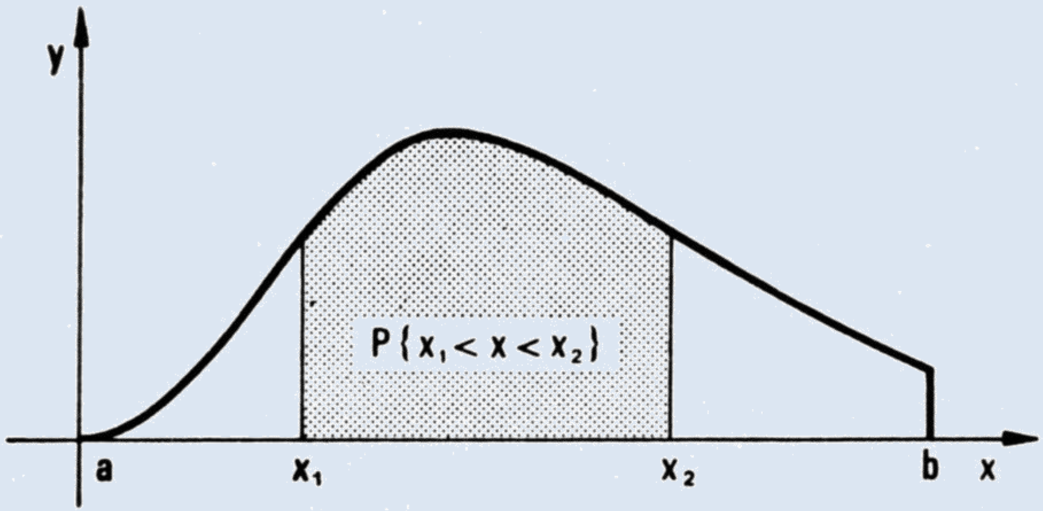
Vjerojatnost da kontinuirana slučajna varijabla poprimi vrijednost unutar segmenta $a \leq X \leq b$ je dana sa sljedećim integralom:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- nadalje, iz ovog uvjeta proizlazi jasno da je vjerojatnost pridružena točno određenoj vrijednosti x_i kontinuirane varijable x jednaka nuli (integral je nula)

FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI

- grafička interpretacija navedenih svojstava



Funkcija gustoće vjerojatnosti nije vjerojatnost već je to funkcija koja opisuje relativnu vjerojatnost da kontinuirana slučajna varijabla poprimi određenu vrijednost, odnosno to je funkcija koja određuje vjerojatnost da varijabla poprimi određenu vrijednost unutar određenog intervala.

f(x)dx – je **element vjerojatnosti** i predstavlja vjerojatnost da varijabla poprimi određenu vrijednost unutar intervala [x, x+dx]

Funkcija gustoće vjerojatnosti nije **vjerojatnost**, ali je tom funkcijom određena **vjerojatnost koja pripada određenom intervalu!**

KUMULATIVNA FUNKCIJA RASODJELE

Funkcija gustoće vjerojatnosti *f(x)* je derivacija **kumulativne funkcije raspodjele *F(x)***:

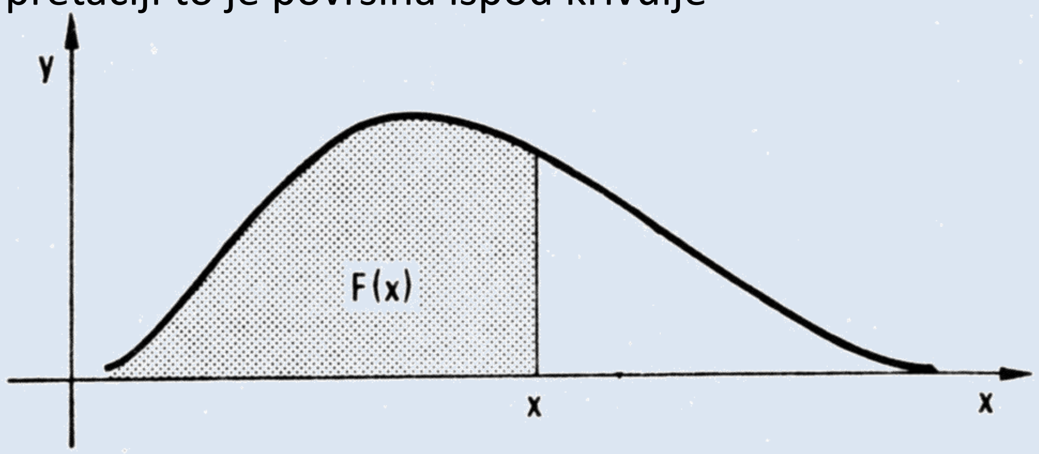
$f(x) = F'(x)$

Odnosno, **kumulativnu funkcija raspodjele *F(x)*** može se na ovaj način definirati iz **funkcije gustoće vjerojatnosti *f(x)***:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

- **vrijednost kumulativne funkcije raspodjele** *(F(x))* kontinuirane varijable x u nekoj točki x_0, ($F(x_0)$) predstavlja vjerojatnost da varijabla x poprimi vrijednost jednaku ili manju vrijednosti x_0

- u geometrijskoj interpretaciji to je površina ispod krivulje



KUMULATIVNA FUNKCIJA RASODJELE

Kumulativna funkcija raspodjele *(F)* je funkcija koja potpuno opisuje raspodjelu vjerojatnosti za kontinuiranu slučajnu varijablu *X*, a ima sljedeća svojstva:

1) ***F*** je monotono rastuća funkcija :

b ≥ a - F(b) ≥ F(a)

2) ***F*** je kontinuirana s desne strane: $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$

3) ***F*** je normirana i vrijedi:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

- **vrijednost kumulativne funkcije raspodjele *(F(x))* kontinuirane varijable *x* u nekoj točki x_0, (*F*(x_0)) predstavlja vjerojatnost da varijabla x poprimi vrijednost jednaku ili manju vrijednosti x_0**

KUMULATIVNA FUNKCIJA RASODJELE

• vrijednost funkcije ***F*** u točki *x* predstavlja vjerojatnost da slučajna varijabla *X* poprimi vrijednost manju ili jednaku *x*

$$x \mapsto F(x) = P(X \leq x)$$

• vjerojatnost da slučajna varijabla *X* poprimi vrijednost $a \leq X \leq b$ je:

$$\boldsymbol{P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)}$$

gdje se koristi činjenica da je $\{X \leq a\} \cup \{a \leq X \leq b\} = \{X \leq b\}$

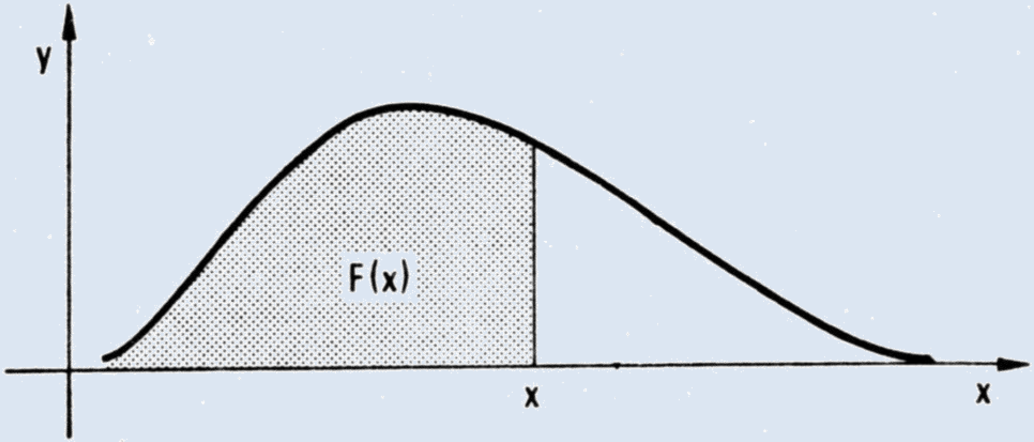
• podsjetnik - vjerojatnost da slučajna varijabla *X* poprimi točno određenu vrijednost *x* je:

$P(X = x) = 0$

KUMULATIVNA FUNKCIJA RASODJELE

•Vrijednost **kumulativne funkcije raspodjele *F*** u točki *x* predstavlja vjerojatnost da slučajna varijabla *X* poprimi vrijednost manju ili jednaku *x*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$



KOMPLEMENTARNA KUMULATIVNA FUNKCIJA RASPODJELE

•Vrijednost **komplementarne kumulativne funkcije *F_C*** raspodjele predstavlja vjerojatnost da slučajna varijabla *X* poprimi vrijednost **veću** od neke određene vrijednosti *x*:

$$F_C(x) = P(X > x) = 1 - F(x) = \int_{x}^{+\infty} f(x)dx$$

KONTINUIRANA SLUČAJNA VARIJABLA

sažetak

• Slučajna varijabla je **kontinuirana** ili ima **kontinuiranu raspodjelu** ako je njena (**kumulativna) funkcija raspodjele kontinuirana**.

• Raspodjela vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable se **ne može** prikazati funkcijom koja bi **različitim vrijednostima varijable** pridružila neku **određenu vjerojatnost**.

• Budući da **oko svake vrijednosti kontinuirane slučajne varijable** postoji neka okolina koja sadrži **neprebrojivo beskonačno mnogo vrijednosti**, zbroj tih svih vjerojatnosti ne bi bio konačan.

• Stvarno značenje imat će samo vjerojatnost da kontinuirana slučajna varijabla poprimi **vrijednost iz određenog intervala**.

MOMENTI
(očekivana vrijednost, varijancija, …)

- definiranje očekivane vrijednosti i varijancije slično je onome koje smo načinili kod diskretne slučajne varijable, s tom razlikom da smo ovdje **sumu** zamijenili **integralom**

općenito

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f(x)dx$$

- naziva se *i-tim* **ishodišnim momentom** (uz uvjet da navedeni integral apsolutno konvergira)

$$\mu'_i = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^i f(x)dx$$

- naziva se *i-tim* **središnjim (centralnim) momentom** (uz uvjet da navedeni integral apsolutno konvergira)

DIGRESIJA

DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE

• **srednja ili očekivana vrijednost** diskretne slučajne varijable je

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{x} = \sum_{i=1}^{r} f_i x_i$$

• zbroj udaljenosti svih slučajnih varijabli od njihove srednje vrijednosti jednak je nuli *(analogija sa osnovama statistike i srednjom vrijednosti gdje smo rekli da je srednja vrijednost ona za koju vrijedi da je oko nje suma odstupanja nula)*

$$\sum_{i=1}^{r} f_i \left(x_i - \overline{x} \right) = 0$$

Teorem $\overline{y} = a \cdot \overline{x} + b$

DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE

varijanca diskretne slučajne varijable

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{r} f_i\,(x_i - \overline{x})^2$$

varijanca govori o raspršenju slučajnih varijabli oko njihove srednje vrijednosti, a naziva se još i srednji kvadrat odstupanja

KRAJ DIGRESIJE

OČEKIVANA VRIJEDNOST

$$\mu = \mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

- **srednja ili očekivana vrijednost** kontinuirane slučajne varijable *x* s pridruženom funkcijom gustoće vjerojatnosti *f(x)*

$$\mu'_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu) f(x) dx = 0$$

- odstupanje od srednje odnosno očekivane vrijednosti (kao i kod diskretne varijable gdje smo definirali srednju vrijednost kao vrijednost za koju je suma odstupanja svih varijabli nula)

VARIJANCIJA

$$\sigma^2 = \mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1)^2 f(x) dx$$

- **varijancija (ili drugi središnji moment)** kontinuirane slučajne varijable *x* s pridruženom funkcijom gustoće vjerojatnosti *f(x)*

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

- **standardna devijacija** – pozitivna vrijednost drugog korijena varijancije

NEKE KONTINUIRANE RASPODIJELE

KONTINUIRANA JEDNOLIKA (PRAVOKUTNA) RAZDIOBA

Neka je ***x* varijabla** definirana na intervalu [a, b], a funkcija ***f(x)*** pripadajuća **funkcija gustoće vjerojatnosti** za koju vrijedi da **na intervalu [a, b]** ima vrijednost ***f(x)=C*** (C je konstanta)*,* dok za **vrijednosti izvan intervala** [a, b] vrijedi ***f(x)*=0**.

S obzirom na prethodno navedena svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti, mora vrijediti:

$$C = \frac{1}{b-a}$$

Za navedenu kontinuiranu slučajnu varijablu *x* s pripadajućom funkcijom gustoće ***f(x)=1/(b-a)*** kažemo da ima **pravokutnu ili jednoliku raspodjelu.**

Odnosno, kontinuirana slučajna varijabla ima **kontinuiranu jednoliku (pravokutnu) raspodjelu** na intervalu [a, b] ako je njena funkcija gustoće vjerojatnosti na tom segmentu konstantna, a izvan njega jednaka 0.

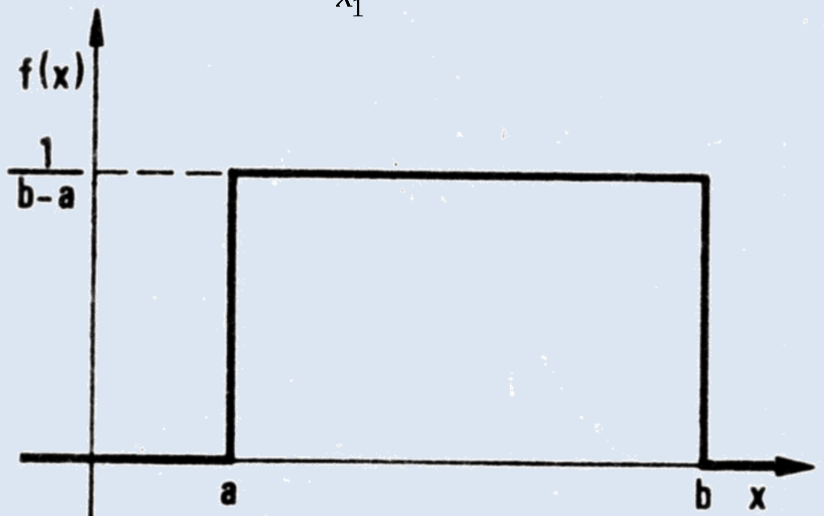
KONTINUIRANA JEDNOLIKA (PRAVOKUTNA) RAZDIOBA

Kolika vjerojatnost pripada intervalu [x_1, x_2] slučajne kontinuirane varijable x raspodijeljene po jednolikoj (pravokutnoj) raspodjeli?

općenito: $$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P(x_1 < x < x_2)$$

konkretno: $$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$$

- grafička interpretacija:



NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA

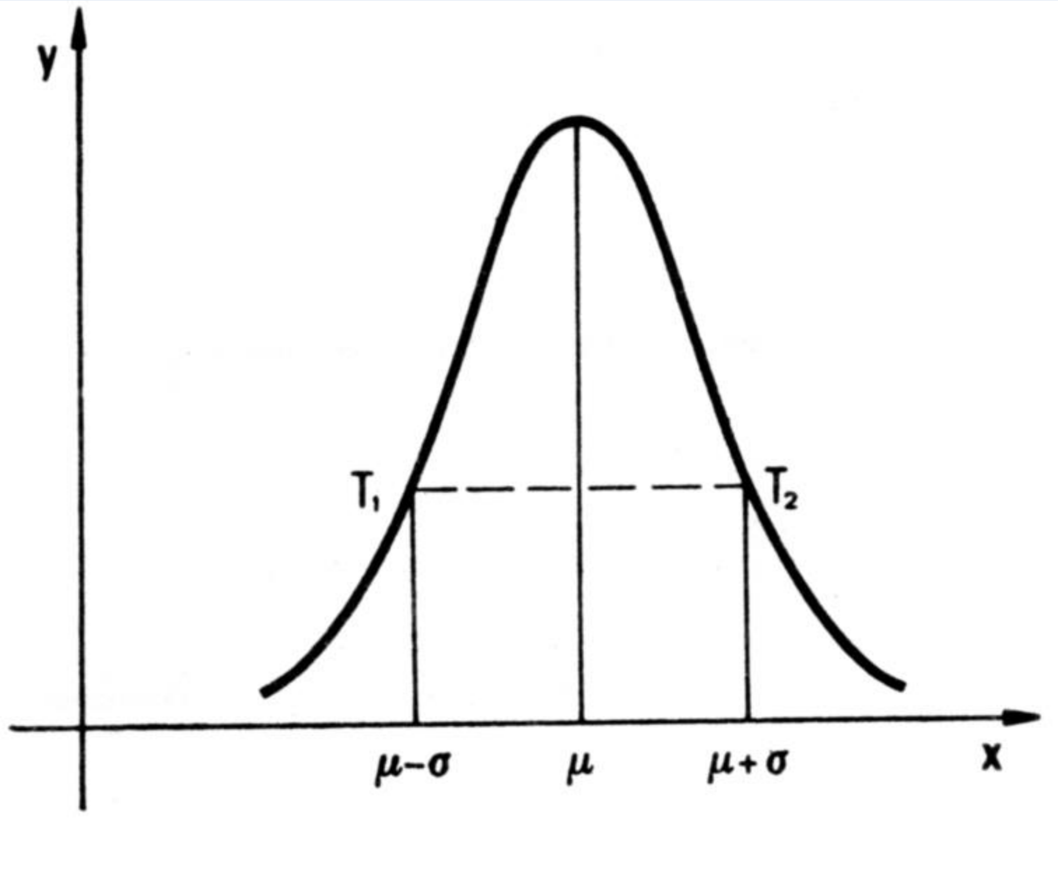
Za kontinuiranu slučajnu varijablu *x* vrijedi da ima **Gaussovu** ili **normalnu raspodjelu** ukoliko je njena funkcija gustoće vjerojatnosti:

$$f(x;\sigma,\mu) = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Pripadajuća kumulativna funkcija raspodjele u tom slučaju je :

$$F(x;\sigma,\mu) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA

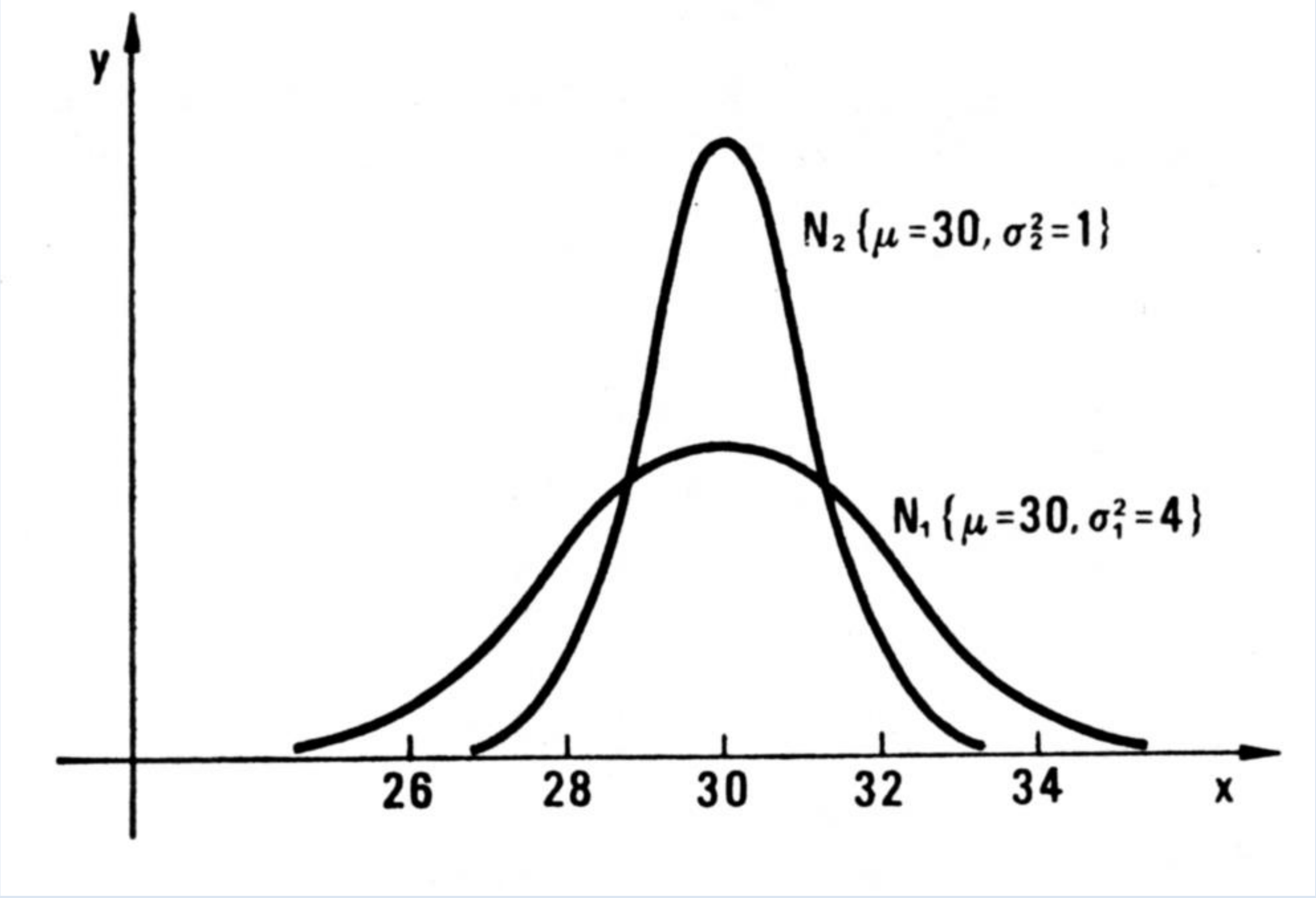


- Gaussova raspodjela je **simetrična** s obzirom na pravac $x=\mu$

- krivulja je zvonolika oblika s **dvije točke infleksije** T_1 (μ-σ) i T_2 (μ+σ), što implicira da će krivulja biti to uža (a time i viša jer je normirana na 1) što je σ manja (slijedeća slika)

- asimptotski se približava osi x

NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA



NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA

Ukoliko uvedemo novu varijablu:

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Dobit ćemo pojednostavljeni izraz:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^{2}}$$

NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA

Gaussova raspodjela je centrirana u nuli i za σ=1 dobijemo ***jediničnu*** ili ***standardnu normalnu raspodjelu:***

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma}\phi(u)$$

za koju su pripadajuće vrijednosti tabelirane.

Pripadajuća kumulativna raspodjela ili **Gaussov integral pogreške:**

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

Iz standardne normalne raspodijele jednostavno izračunamo ogovarajuće vrijednosti za inicijalnu funkciju *f(x)*: $f(x) = \frac{1}{\sigma}\phi(u)$

NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA

Notacija :

Gaussova ili normalna raspodjela sa srednjom vrijednosti μ i varijancijom σ^2:

$N(\mu, \sigma^2)$

Slučajna varijabla X ima Gaussovu ili normalnu raspodjelu:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(jedinična) standardna Gaussova ili normalna raspodjela

$N(0, 1)$

NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA

Ako je $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$, tada je $\mathbf{(X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)}$.

Ako je $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$, tada je $\boldsymbol{aX + b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)}$.

Ako su X_1 i X_2 neovisne slučajne varijable koje imaju normalne raspodjele: $\boldsymbol{X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)}$ i $\boldsymbol{X_2 \sim N(\mu_1, \sigma_2^2)}$

onda vrijedi da su $(X_1 + X_2)$ te $(X_1 - X_2)$ također normalne raspodijele:

$X_1 + X_2 \boldsymbol{\sim N(\mu_1+\mu_1, \sigma_1^2+\sigma_2^2)}$

$X_1 - X_2 \boldsymbol{\sim N(\mu_1-\mu_1, \sigma_1^2-\sigma_2^2)}$

NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA

vjerojatnost

- neka je x kontinuirana slučajna varijabla čija je funkcija gustoće vjerojatnosti

Gaussova raspodjela: **x ~ *N*(*μ*, *σ*²)**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- vjerojatnost da ta varijabla poprimi neku vrijednost iz intervala (x_1, x_2) jest:

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

- uvedemo supstituciju : $u = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODJELA
vjerojatnost

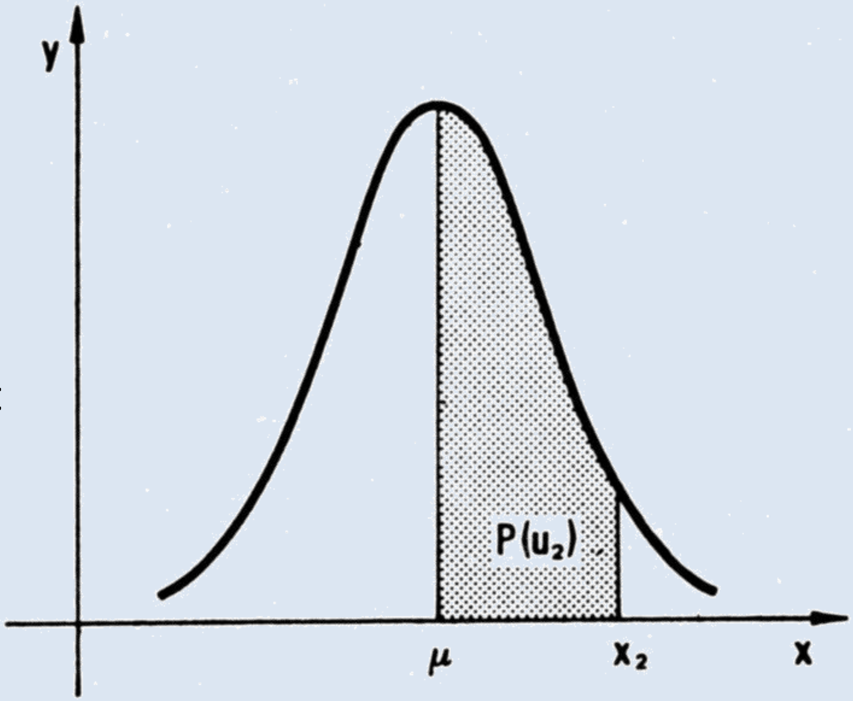
- i dobijemo jediničnu Gaussovu raspodjelu za varijablu *u* (***u~N (0, 1)***) te je pripadajuća vjerojatnost :

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \qquad u_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \qquad u_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

- pretpostavimo da je $x_1=\mu$ (time je $u_1=0$), pripadajuća vjerojatnost je tada:

$$P(u_2) = P(\eta < x < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{u_2} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

- sa slike vidimo kolika je pripadajuća vjerojatnost



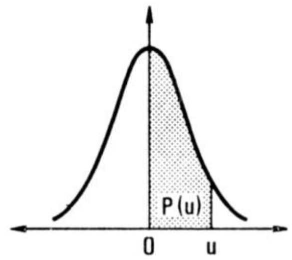
<u>NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA</u>
vjerojatnost

- postoje tablice s tabeliranim vrijednostima vjerojatnosti za različite vrijednosti u_2

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	39795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	4997674									
4,0	4999683									
4,5	4999966									
5,0	499999713									

- zbog simetričnosti Gaussove raspodijele u tablici se nalaze samo pozitivne vrijednosti *u*

Površine ispod normalne krivulje



$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

TABLICA V

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	39795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	4997674									
4,0	4999683									
4,5	4999966									
5,0	499999713									

Svakoj vrijednosti u ovoj tablici prethodi decimalni zarez; tako je npr.: $P(1{,}71) = 0{,}45637$

Ordinate jedinične normalne razdiobe

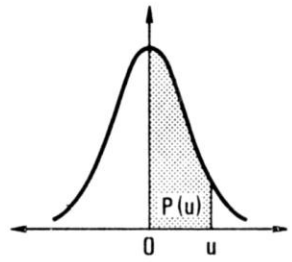
$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

TABLICA IV

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06439	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01889	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00471	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014

Svakoj vrijednosti u ovoj tablici prethodi decimalni zarez; tako je npr.: $\varphi(1,33) = 0,16474$

Površine ispod normalne krivulje



$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

TABLICA V

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	39795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	4997674									
4,0	4999683									
4,5	4999966									
5,0	499999713									

Svakoj vrijednosti u ovoj tablici prethodi decimalni zarez; tako je npr.: $P(1{,}71) = 0{,}45637$

NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA
vjerojatnost

Primjer:

$x \sim N(\mu=20, \sigma^2=4)$, izračunajte:

a) vjerojatnost da je slučajna kontinuirana varijabla *x* veća od 17 i manja od 21,5.
b) vjerojatnost da *x* poprimi bilo koju vrijednost manju od 21,5
c) vjerojatnost da poprimi vrijednost veću od 21,5.

RJEŠENJE:

a) tražena vjerojatnost je $P(17 < x < 21{,}5) = P(u_1) + P(u_2)$

jer se tražene vrijednosti varijable nalaze s lijeve i s desne strane očekivane vrijednosti

izvršimo supstituciju i izračunamo:

$u_1 = (|17-20|)/2 = 1{,}50$; $u_2 = (|21{,}5-20|)/2 = 0{,}75$

iz tablice očitamo:

$P(u_1) = P(1{,}50) =$ **0,43319**

$P(u_2) = P(0{,}75) =$ **0,27337**

$P(17 < x < 21{,}5) = P(u_1) + P(u_2) = 0{,}43319 + 0{,}27337 = \mathbf{0{,}70656}$

b) $P(x < 21{,}5) = \mathbf{0{,}5} + P(u_2) = \mathbf{0{,}77337}$

koristimo činjenicu da je Gaussova raspodjela simetrična te je vjerojatnost da je x varijabla negativna jednaka 0,5.

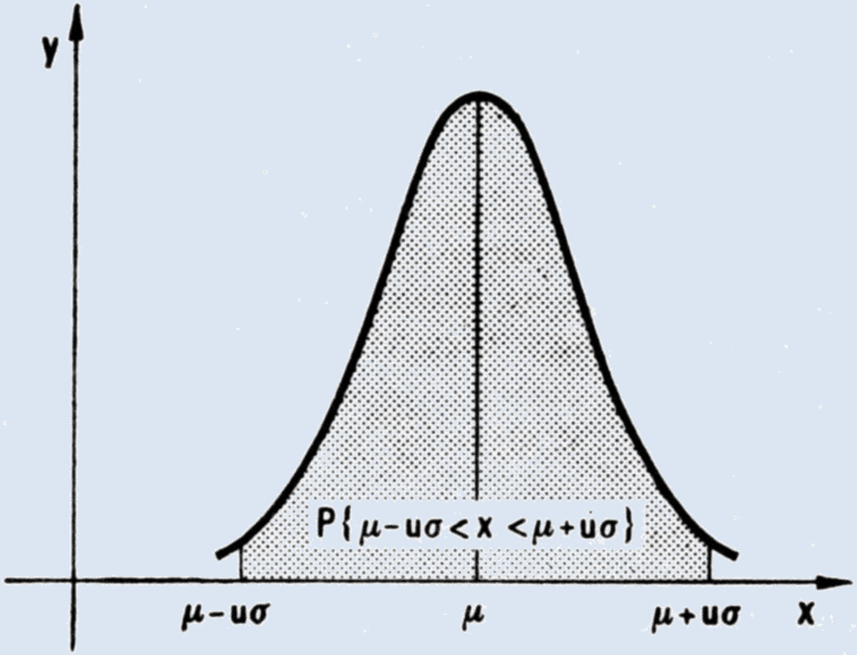
c) $P(x > 21{,}5) = \mathbf{0{,}5} - P(u_2) = \mathbf{0{,}22663}$

NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA
vjerojatnost

- u primjeni se često nailazi na slučajeve u kojima se traži vjerojatnost za intervale poput:

($\mu - u \cdot \sigma < x < \mu + u \cdot \sigma$)

u	$P\{\mu - u\sigma < x < \mu + u\sigma\}$
0,6745	0,5000
1,00	0,6827
1,96	0,9500
2,00	0,9545
3,00	0,9973



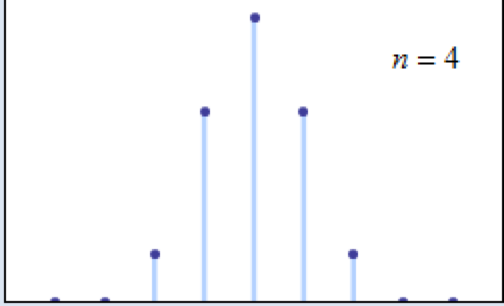
-iz tablice vidimo da pri normalnoj raspodijeli 95,45 % vrijednosti varijable *x*

zadovoljava nejednakost: $\mu - 2 \cdot \sigma < x < \mu + 2 \cdot \sigma$ (99,73 % za $\mu - 3 \cdot \sigma < x < \mu + 3 \cdot \sigma$)

NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA
SREDIŠNJI GRANIČNI TEOREM

Teorem: Zadano je **N** međusobno nezavisnih slučajnih varijabli, opisanih proizvoljnim gustoćama vjerojatnosti. Ako od tih varijabli napravimo novu slučajnu varijablu oblika zbroja ($\bar{X}_1$=1/N(X_1+X_2+⋯+X_N), tada je raspodjela gustoće vjerojatnosti te nove varijable dana Gaussovom raspodjelom. Ova je tvrdnja utoliko točnija što je **N** veći broj (ukoliko populacija osnovne varijable nije raspodijeljena po Gaussovoj raspodijeli poželjno je da je N barem veći od 30).

TEOREM: Neka je dana populacija sa srednjom vrijednošću μ i standardnom devijacijom σ. Neka je *x srednja vrijednost od n slučajno odabranih* nezavisnih opservacija iz te populacije. Distribucija uzorkovanja srednje vrijednosti približava se normalnoj sa očekivanjem μ i standardnom devijacijom $\sigma \cdot (n)^{-1/2}$ kada $n \to \infty$



NORMALNA (GAUSSOVA) RASPODIJELA
SREDIŠNJI GRANIČNI TEOREM

Ovaj se teorem naziva **središnji (centralni) granični teorem**. Njime Gaussova raspodjela dobiva iznimno važno mjesto u statističkoj teoriji. Prvi ga je postavio Laplace 1812, a strogi dokaz daoje Lyapunov 1901.

- pri tome je **srednja vrijednost srednjih vrijednosti uzoraka** jednaka je **srednjoj vrijednosti populacije**: $\mu_{\bar{x}} = \mu$

- **standardna devijacija srednjih vrijednosti uzoraka** je manja od **standardne devijacije populacije**, a jednaka je **standardnoj devijaciji populacije podijeljenoj s drugim korijenom ukupnog broja podataka u uzorku**: $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$