Kolegij Studentska natjecanja, ak. god. 2020./2021.
`http://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/snim_a`

Tema br. 8:

Preslikavanja matričnih algebri

Mateo Tomašević, 28.5.2021.

U ovom predavanju izlažemo neke rezultate o preslikavanjima matričnih algebri $M_n(\mathbb{R})$ ili $M_n(\mathbb{C})$ koja čuvaju nešto od (bogate) strukture tih algebri.

Za razumijevanje je dovoljno poznavanje elementarne linearne algebre.

Problemi se ističu svojom vrlo elementarnom i elegantnom formulacijom, dok dokazi najčešće također ne koriste neku pretjerano tešku teoriju nego se svode na niz elementarnih algebarskih manipulacija. Ideje ipak nipošto ne moraju biti trivijalne, što ovu temu kvalificira za izbor zadataka natjecateljskog karaktera.

1 Preserveri

$\mathbb{F}$ označava polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. **Preserver** u ovom kontekstu neformalno definiramo kao preslikavanje $M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ koje čuva neka svojstva vezana uz strukturu $M_n(\mathbb{F})$.

Linearni preserver je linearno preslikavanje $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ koje čuva dio strukture na $M_n(\mathbb{F})$. Primjeri nekih rezultata o linearnim preserverima su sljedeći atraktivni teoremi:

Teorem 1 (Frobenius)**.** *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ linearno preslikavanje koje zadovoljava*

$$\det \phi(A) = \det A, \quad \text{za sve } A \in M_n(\mathbb{C}).$$

Tada postoje matrice $M, N \in M_n(\mathbb{C})$ sa svojstvom $\det(MN) = 1$ takve da je

$$\phi(A) = MAN, \quad \text{za sve } A \in M_n(\mathbb{C})$$

ili

$$\phi(A) = MA^tN, \quad \text{za sve } A \in M_n(\mathbb{C}).$$

Označimo s $GL_n(\mathbb{F})$ grupu invertibilnih matrica u algebri $M_n(\mathbb{F})$.

Teorem 2 (Marcus, Purves)**.** *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ linearno preslikavanje koje zadovoljava $\phi(GL_n(\mathbb{C})) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$. Tada postoje invertibilne matrice $M, N \in M_n(\mathbb{C})$ takve da je*

$$\phi(A) = MAN, \quad \text{za sve } A \in M_n(\mathbb{C})$$

ili

$$\phi(A) = MA^tN, \quad \text{za sve } A \in M_n(\mathbb{C}).$$

Rezultate o linearnim preserverima često možemo svrstati u sljedeće tri neformalne i nedisjunktne kategorije:

Problem A. Neka je f funkcija s domenom $M_n(\mathbb{F})$ (i kodomenom $\mathbb{F}, M_n(\mathbb{F}), \mathcal{P}(\mathbb{F}), \ldots$). Promatramo **linearne preservere funkcije** f, tj. linearna preslikavanja $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ za koja vrijedi

$$f(\phi(A)) = f(A), \quad \text{za sve } A \in M_n(\mathbb{F}).$$

Primjeri funkcije f su determinanta, trag, rang, spektar, karakteristični polinom, minimalni polinom, norma, spektralni radijus, ...

Problem B. Neka je $S \subseteq M_n(\mathbb{F})$ podskup. Promatramo **linearne preservere skupa** S, tj. linearna preslikavanja $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ za koja vrijedi $\phi(S) \subseteq S$. Kažemo da je ϕ **jaki preserver za** S ako je $\phi(S) = S$.

Primjeri skupa S su regularne matrice, singularne matrice, nilpotentne matrice, hermitske matrice, unitarne matrice, idempotenti, ortogonalni projektori, matrice ranga 1,...

Problem C. Neka je $\sim$ relacija na $M_n(\mathbb{F})$. Promatramo **linearne preservere relacije** $\sim$, tj. linearna preslikavanja $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ takva da za sve $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi implikacija

$$A \sim B \implies \phi(A) \sim \phi(B).$$

Kažemo da je ϕ **jaki preserver za** $\sim$ ako za sve $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi ekvivalencija

$$A \sim B \iff \phi(A) \sim \phi(B).$$

Primjeri relacije $\sim$ su:

- komutativnost:
$$A \sim B \iff AB = BA.$$
- sličnost:
$$A \sim B \iff (\exists T \in GL_n(\mathbb{F})) \quad B = T^{-1}AT.$$
- ortogonalnost:
$$A \perp B \iff AB = BA = 0.$$
- jednakost slika:
$$A \sim B \iff \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B.$$

Ovi uvjeti se često kombiniraju s drugačijim uvjetima na preslikavanje ϕ kao što su surjektivnost, neprekidnost, multiplikativnost.

2 Algebre

Neka je A vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Pretpostavimo da je A opremljen binarnom operacijom množenja $\cdot : A \times A \to A$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:

(i) $a(bc) = (ab)c, \quad \forall a, b, c \in A$ (asocijativnost),

(ii) $(\alpha a)b = \alpha(ab), \quad \forall a, b \in A, \alpha, \in \mathbb{F}$ (homogenost u prvom argumentu),

(iii) $a(\alpha b) = \alpha(ab), \quad \forall a, b \in A, \alpha, \in \mathbb{F}$ (homogenost u drugom argumentu),

(iv) $(a + b)c = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in A$ (aditivnost u prvom argumentu),

(v) $a(b + c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in A$ (aditivnost u drugom argumentu).

Tada par $(A, \cdot)$ zovemo **algebra** nad poljem $\mathbb{F}$. (kratko: operacija množenja mora biti asocijativna i bilinearna).

Ako još vrijedi

$$ab = ba, \quad \forall a, b \in A$$

tada kažemo da je A **komutativna** algebra.

Jedinica u algebri A je element $1 \in A$ sa svojstvom

$$1a = a1 = a, \quad \forall a \in A.$$

Ako u algebri postoji jedinica, ona je jedinstvena. Algebre s jedinicom zovemo **unitalne algebre**.

Neka je A unitalna algebra. Za element $a \in A$ kažemo da je **invertibilan** ako postoji element $b \in A$ takav da

$$ab = ba = 1.$$

Element b je tada jedinstven, označavamo ga s a^{-1} i zovemo ga **inverz** elementa a. Skup svih invertibilnih elemenata algebre A označavamo s $A^\times$ te on tvori grupu uz operaciju množenja.

Podskup $B \subseteq A$ je **podalgebra** od A ako je B algebra s obzirom na restrikcije operacija od A. Potprostor B od A je podalgebra od A ako i samo ako je zatvoren na operaciju množenja, tj. ako za sve $a, b \in A$ vrijedi implikacija

$$a, b \in B \implies ab \in B.$$

Za podalgebru B unitalne algebre A kažemo da je **unitalna podalgebra** ako B sadrži jedinicu algebre A. Moguće je da je B unitalna algebra, ali da nije unitalna podalgebra od A (primjer?).

Neka su A i B algebre nad $\mathbb{F}$. Za preslikavanje $\phi : A \to B$ kažemo da je **homomorfizam algebri** ako je ϕ linearno i multiplikativno, tj.

$$\phi(\alpha a + \beta b) = \alpha\phi(a) + \beta\phi(b), \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \quad \forall a, b \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Ako su A i B unitalne algebre s jedinicama 1_A i 1_B, tada za ϕ kažemo da je **unitalni homomorfizam** ako $\phi(1_A) = 1_B$ (primjer neunitalnog homomorfizma između unitalnih algebri?).

Injektivni homomorfizam zovemo **monomorfizam**, surjektivni homomorfizam zovemo **epimorfizam**, a bijektivni homomorfizam zovemo **izomorfizam**. Za algebre A i B kažemo da su **izomorfne** (pišemo $A \cong B$) ako postoji izomorfizam $\phi : A \to B$.

Primjeri:

- $\mathbb{F}^n$ s operacijama po točkama.
- Algebra kvadratnih matrica $M_n(\mathbb{F})$.
- Algebra gornjetrokutastih matrica $T_n(\mathbb{F})$.
- Algebra polinoma u jednoj varijabli $\mathbb{F}[x]$.
- Algebra neprekidnih funkcija na segmentu $C([0,1])$.
- Algebra formalnih redova potencija u jednoj varijabli $\mathbb{F}[[x]]$.
- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{F} \right\}$.

S LA2 dobro je poznat izomorfizam algebri $\Phi_{(b)} : L(\mathbb{F}^n) \to M_n(\mathbb{F})$ koji linearnom operatoru $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ pridružuje njegov matrični zapis $A_{(b,b)}$ u nekoj fiksiranoj bazi (b) prostora $\mathbb{F}^n$.

Ako poistovjetimo $L(\mathbb{F}^n) \cong M_n(\mathbb{F})$ tako da operator $A \in L(\mathbb{F}^n)$ poistovjetimo s njegovom matricom u standardnoj bazi $A_{(e,e)}$, tada dobivamo izomorfizam algebri $\phi_{(b)} : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ zadan s

$$\phi_{(b)}(A_{(e,e)}) = A_{(b,b)}$$

Ako je $T = I_{(b,e)}$ matrica prijelaza, dobivamo da je

$$\phi_{(b)}(A) = TAT^{-1}, \qquad \text{za sve } A \in M_n(\mathbb{F}).$$

Ono što je zanimljivo je da su *svi* nenul homomorfizmi $M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ upravo tog oblika.

Teorem 3 (Skolem-Noether)**.** *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ nenul homomorfizam algebri. Tada postoji invertibilna matrica $T \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je*

$$\phi(A) = TAT^{-1}, \qquad \textit{za sve } A \in M_n(\mathbb{F}).$$

Neka je A algebra nad poljem $\mathbb{F}$. Za potprostor I od A kažemo da je

- **lijevi ideal** u A ako za sve $a \in A$ i $b \in I$ vrijedi $ab \in I$.
- **desni ideal** u A ako za sve $a \in I$ i $b \in A$ vrijedi $ab \in I$.
- **obostrani ideal** (ili samo **ideal**) ako je I istovremeno i lijevi i desni ideal u A.

Ideali su upravo jezgre homomorfizama algebri.

Očito su $\{0\}$ i A ideali u A koje zovemo **trivijalni ideali**. Za algebru A kažemo da je **prosta** ako nema netrivijalnih ideala.

Za $1 \le i, j \le n$ označimo s $E_{ij} \in M_n(\mathbb{F})$ matricu koja ima jedinicu na mjestu (i, j) te sve ostale elemente 0. Matrice $\{E_{ij}\}_{1 \le i,j \le n}$ zajedno nazivamo **standardne matrične jedinice**. Za sve $1 \le i, j, k, l \le n$ i $A \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}, \quad E_{ij}AE_{kl} = A_{jk}E_{il}.$$

Propozicija 1. *$M_n(\mathbb{F})$ je prosta algebra.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{I} \neq \{0\}$ proizvoljan ideal u $M_n(\mathbb{F})$. Tada postoji $A \in \mathcal{I}$ s nenul elementom $A_{ij} \neq 0$.

Vrijedi

$$A_{ij}E_{ij} = E_{ii}AE_{jj} \in \mathcal{I}$$

pa množenjem s $\frac{1}{A_{ij}}$ dobivamo $E_{ij} \in \mathcal{I}$. Sada za sve $1 \leq k, l \leq n$ imamo

$$E_{kl} = E_{ki}E_{ij}E_{jl} \in \mathcal{I}$$

pa za svaku matricu $B \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi

$$B = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} B_{kl}E_{kl} \in \mathcal{I}.$$

Zaključujemo $\mathcal{I} = M_n(\mathbb{F})$. $\square$

Dokaz teorema Skolem-Noether. Uočimo da je $\ker\phi$ ideal u $M_n(\mathbb{F})$. Zaista, neka je $A \in \ker\phi$ te $B \in M_n(\mathbb{F})$ proizvoljan. Tada je $\phi(A) = 0$ pa je

$$\phi(AB) = \phi(A)\phi(B) = 0, \quad \phi(BA) = \phi(B)\phi(A) = 0$$

odakle slijedi $AB, BA \in \ker\phi$. Zbog $\phi \neq 0$ slijedi $\ker\phi \neq M_n(\mathbb{F})$ pa mora biti $\ker\phi = \{0\}$, odnosno ϕ je injekcija. Zbog konačnodimenzionalnosti od $M_n(\mathbb{F})$ je i surjekcija.

Fiksirajmo par vektora $u, y \in \mathbb{F}^n$ takvih da je $uy^t \neq 0$. Zbog injektivnosti od ϕ, možemo odabrati $z \in \mathbb{F}^n$ takav da je $\phi(uy^t)z \neq 0$. Definirajmo linearan operator $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ formulom

$$Tx = \phi(xy^t)z, \quad x \in \mathbb{F}^n.$$

Zbog $Tu \neq 0$ imamo $T \neq 0$. Za proizvoljnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ imamo

$$TAx = \phi((Ax)y^t)z = \phi(A \cdot xy^t)z = \phi(A)\phi(xy^t)z = \phi(A)Tx$$

pa slijedi $TA = \phi(A)T$.

Neka je $w \in \mathbb{F}^n$ proizvoljan. Zbog surjektivnosti od ϕ, možemo odabrati matricu $B \in M_n(\mathbb{F})$ takvu da

$$TBu = \phi(B)Tu = w.$$

Slijedi da je T surjekcija pa je invertibilan operator. Zaključujemo

$$\phi(A) = TAT^{-1}, \quad \text{za sve } A \in M_n(\mathbb{F}).$$

$\square$

Neka je A algebra nad $\mathbb{F}$. **Centar** $Z(A)$ algebre A je skup svih elemenata u A koji komutiraju s cijelom algebrom:

$$Z(A) := \{a \in A : ax = xa, \forall x \in A\}.$$

Za unitalnu algebru A s jedinicom 1 kažemo da je **centralna** ako je $Z(A) = \mathbb{F}1$.

Propozicija 2. *$M_n(\mathbb{F})$ je centralna algebra.*

Dokaz. Evidentno je $\mathbb{F}I \subseteq Z(M_n(\mathbb{F}))$. Neka je $A \in Z(M_n(\mathbb{F}))$. Tada za sve $1 \leq i, j \leq n$ imamo $AE_{ij} = E_{ij}A$ pa za sve indekse $1 \leq k, l \leq n$ imamo

$$\delta_{ik}A_{jl} = \sum_{r=1}^{n}\delta_{ik}\delta_{jr}A_{rl} = \sum_{r=1}^{n}(E_{ij})_{kr}A_{rl} = (E_{ij}A)_{kl} = (AE_{ij})_{kl} = \sum_{r=1}^{n}A_{kr}(E_{ij})_{rl} = \sum_{r=1}^{n}A_{kr}\delta_{ir}\delta_{jl} = \delta_{jl}A_{ki}.$$

Specijalno, za proizvoljne $i \neq k$ te $j = l$ dobivamo $A_{ki} = 0$ pa zaključujemo da je A dijagonalna matrica.

Nadalje, za proizvoljne $j = l, i = k$ dobivamo $A_{ii} = A_{jj}$ pa slijedi $A \in \mathbb{F}I$. $\square$

3 Jordanovi homomorfizmi

Za linearno preslikavanje $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **Jordanov homomorfizam** ako zadovoljava uvjet

$$\phi(A^2) = \phi(A)^2, \quad \text{za sve } A \in M_n(\mathbb{F}).$$

Evidentno je svaki homomorfizam algebri $A \mapsto TAT^{-1}$ za $T \in GL_n(\mathbb{F})$ Jordanov homomorfizam. Također je transponiranje $A \mapsto A^t$ Jordanov homomorfizam.

Definirajmo tzv. **Jordanov produkt** i **Liejev produkt** sa

$$A \circ B := AB + BA, \quad [A, B] := AB - BA$$

za sve $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

Lema 1. *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ Jordanov homomorfizam. Tada vrijedi*

(a) $\phi(A \circ B) = \phi(A) \circ \phi(B), \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$.

(b) $\phi(ABA) = \phi(A)\phi(B)\phi(A), \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$.

(c) $\phi(ABC + CBA) = \phi(A)\phi(B)\phi(C) + \phi(C)\phi(B)\phi(A), \quad \forall A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$.

(d) $\phi([[A, B], C]) = [[\phi(A), \phi(B)], \phi(C)], \quad \forall A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$.

Dokaz. (a) Imamo

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

pa djelovanjem s ϕ dobivamo

$$\begin{aligned}
\phi(A)^2 + \phi(A)\phi(B) + \phi(B)\phi(A) + \phi(B)^2 &= (\phi(A) + \phi(B))^2 \\
&= (\phi(A + B))^2 \\
&= \phi((A + B)^2) \\
&= \phi(A^2 + AB + BA + B^2) \\
&= \phi(A)^2 + \phi(AB + BA) + \phi(B)^2
\end{aligned}$$

odakle slijedi $\phi(AB + BA) = \phi(A)\phi(B) + \phi(B)\phi(A)$.

(b) Imamo

$$A \circ (A \circ B) = A(AB + BA) + (AB + BA)A = A^2B + 2ABA + BA^2 = 2ABA + A^2 \circ B$$

pa djelovanje s ϕ daje

$$2\phi(A)\phi(B)\phi(A) + \phi(A)^2 \circ \phi(B) = \phi(A) \circ (\phi(A) \circ \phi(B)) = \phi(A \circ (A \circ B)) = 2\phi(ABA) + \phi(A)^2 \circ \phi(B).$$

Slijedi $\phi(ABA) = \phi(A)\phi(B)\phi(A)$.

(c) Ako s ϕ djelujemo na

$$(A + C)B(A + C) = ABA + ABC + CBA + CBC$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
\phi(A)\phi(B)\phi(A) + \phi(A)\phi(B)\phi(C) + \phi(C)\phi(B)\phi(A) + \phi(C)\phi(B)\phi(C) &= (\phi(A) + \phi(C))\phi(B)(\phi(A) + \phi(C)) \\
&= \phi(A + C)\phi(B)\phi(A + C) \\
&= \phi(ABA) + \phi(ABC + CBA) + \phi(CBC)
\end{aligned}$$

pa je $\phi(ABC + CBA) = \phi(A)\phi(B)\phi(C) + \phi(C)\phi(B)\phi(A)$.

(d) Vrijedi
$$[[A,B],C] = ABC + CBA - (BAC + CAB)$$
pa imamo
$$\begin{aligned}\phi([[A,B],C]) &= \phi(ABC + CBA - (BAC + CAB)) \\ &= \phi(A)\phi(B)\phi(C) + \phi(C)\phi(B)\phi(A) - (\phi(B)\phi(A)\phi(C) + \phi(C)\phi(A)\phi(B)) \\ &= [[\phi(A), \phi(B)], \phi(C)].\end{aligned}$$

□

Lema 2. *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ Jordanov homomorfizam, neka je $P \in M_n(\mathbb{F})$ idempotent te $A \in M_n(\mathbb{F})$ takav da je $[P, A] = 0$. Tada je*
$$\phi(PA) = \phi(P)\phi(A) = \phi(A)\phi(P).$$

Specijalno,

- *ako je $PA = AP = A$, tada je $\phi(P)\phi(A) = \phi(A)\phi(P) = \phi(A)$,*
- *ako je $PA = AP = 0$, tada je $\phi(P)\phi(A) = \phi(A)\phi(P) = 0$.*

Dokaz. Imamo $\phi(P)^2 = \phi(P^2) = \phi(P)$ pa lagani račun pokazuje
$$0 = \phi([[P,A],P]) = [[\phi(P), \phi(A)], \phi(P)] = 2\phi(P)\phi(A)\phi(P) - \phi(A)\phi(P) - \phi(P)\phi(A).$$
Množenjem slijeva s $\phi(P)$ slijedi
$$\phi(A)\phi(P) = \phi(P)\phi(A)\phi(P),$$
a množenjem zdesna s $\phi(P)$ slijedi
$$\phi(P)\phi(A) = \phi(P)\phi(A)\phi(P).$$

S druge strane, zbog $PA = AP$ imamo
$$\phi(P)\phi(A)\phi(P) = \phi(PAP) = \phi(PA) = \phi(AP)$$
pa je $\phi(PA) = \phi(P)\phi(A) = \phi(A)\phi(P)$. □

Za algebru A kažemo da je **primarna** ako za sve $a, b \in A$ vrijedi implikacija
$$axb = 0, \forall x \in A \implies a = 0 \text{ ili } b = 0$$
odnosno $aAb = 0$ povlači $a = 0$ ili $b = 0$.

Iz činjenice da je $M_n(\mathbb{F})$ prosta algebra lako se pokaže da je i primarna. Zaista, pretpostavimo da za neke $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $AM_n(\mathbb{F})B = 0$ te pretpostavimo da je $A \neq 0$ i pokažimo da tada nužno slijedi $B = 0$. Imamo da je $M_n(\mathbb{F})AM_n(\mathbb{F})$ nenul ideal u $M_n(\mathbb{F})$ pa mora biti jednak $M_n(\mathbb{F})$. Slijedi da je
$$M_n(\mathbb{F})B = (M_n(\mathbb{F})AM_n(\mathbb{F}))B = M_n(\mathbb{F})(AM_n(\mathbb{F})B) = 0$$
pa je $B = 0$.

Za potprostor $\mathcal{I} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **Jordanov ideal** ako za sve $A \in \mathcal{I}, B \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $A \circ B \in \mathcal{I}$ (uočimo $A \circ B = B \circ A$).

Lema 3. *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ nenul Jordanov homomorfizam. Tada je ϕ bijekcija.*

Dokaz. Uočimo da je $\ker\phi$ Jordanov ideal. Zaista, neka je $A \in \ker\phi$ te $B \in M_n(\mathbb{F})$. Tada je $\phi(A) = 0$ pa imamo
$$\phi(A \circ B) = \phi(A) \circ \phi(B) = 0$$
odnosno $A \circ B \in \ker\phi$.

Neka su $A, B \in \ker\phi$. Lako se provjeri da za proizvoljan $X \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi

$$[A \circ B, X] = \underbrace{[A, X] \circ B}_{\in \ker\phi} + \underbrace{A \circ [B, X]}_{\in \ker\phi} \in \ker\phi$$

pa je odnosno $[A \circ B, X] \in \ker\phi$ za sve $X \in M_n(\mathbb{F})$.

Imamo i $A \circ B \in \ker\phi$ i onda $(A \circ B) \circ X \in \ker\phi$. Stoga je i

$$2(A \circ B)X = [A \circ B, X] + (A \circ B) \circ X \in \ker\phi$$

pa je $(A \circ B)X \in \ker\phi$ za sve $X \in M_n(\mathbb{F})$.

Za proizvoljan $Y \in M_n(\mathbb{F})$ imamo

$$\ker\phi \ni Y \circ ((A \circ B)X) = Y(A \circ B)X + \underbrace{(A \circ B)XY}_{\in \ker\phi}$$

pa je $Y(A \circ B)X \in \ker\phi$ za sve $X, Y \in M_n(\mathbb{F})$.

Kad bi bilo $A \circ B \neq 0$, tada bi $\mathcal{I} := M_n(\mathbb{F})(A \circ B)M_n(\mathbb{F})$ bio nenul ideal pa bi zbog prostosti od $M_n(\mathbb{F})$ slijedilo $\mathcal{I} = M_n(\mathbb{F})$. Međutim, $\mathcal{I} \subseteq \ker\phi$ pa slijedi $\phi = 0$, što je kontradikcija. Dakle, $A \circ B = 0$, odnosno $\circ$ svaka dva elementa iz $\ker\phi$ je 0.

Neka je sada $A \in \ker\phi$ proizvoljan. Imamo

$$0 = A \circ A = 2A^2$$

pa je $A^2 = 0$. Nadalje, za svaki $X \in M_n(\mathbb{F})$ je $A \circ X \in \ker\phi$ pa je

$$0 = A \circ (A \circ X) = A^2X + XA^2 + 2AXA = 2AXA$$

odnosno $AM_n(\mathbb{F})A = 0$. Iz primarnosti algebre $M_n(\mathbb{F})$ slijedi $A = 0$.

Zaključujemo $\ker\phi = \{0\}$ pa je ϕ injekcija. Zbog konačnodimenzionalnosti od $M_n(\mathbb{F})$ slijedi da je bijekcija. □

Teorem 4. *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ nenul Jordanov homomorfizam. Tada postoji invertibilna matrica $T \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je*

$$\phi(A) = TAT^{-1}, \qquad \textit{za sve } A \in M_n(\mathbb{F})$$

ili

$$\phi(A) = TA^tT^{-1}, \qquad \textit{za sve } A \in M_n(\mathbb{F}).$$

Dokaz.

Tvrdnja 1. *ϕ je bijekcija*

Dokaz. Slijedi iz Leme 3. □

Tvrdnja 2. *ϕ čuva jedinicu (identitetu): $\phi(I) = I$.*

Dokaz. Budući da je identiteta I idempotent koji komutira sa svim matricama, iz Leme 2 slijedi da za sve $A \in M_n$ vrijedi

$$\phi(A) = \phi(IA) = \phi(I)\phi(A) = \phi(A)\phi(I)$$

pa zbog surjektivnosti od ϕ slijedi da je $\phi(I)$ jedinica u M_n, odnosno $\phi(I) = I$. □

Tvrdnja 3. *ϕ čuva invertibilnost u oba smjera: $\phi(GL_n(\mathbb{F})) = GL_n(\mathbb{F})$.*

Dokaz. Ako je $AB = BA = I$, tada je $AB^2A = I$, odakle slijedi

$$\phi(A)\phi(B)^2\phi(A) = I$$

pa su $\phi(A)$ i $\phi(B)$ invertibilne matrice. Dakle, $\phi(GL_n(\mathbb{F})) \subseteq GL_n(\mathbb{F})$.

Obratna inkluzija slijedi iz činjenice da je ϕ^{-1} također Jordanov homomorfizam. □

Tvrdnja 4. *ϕ čuva spektar: za svaki $A \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $\sigma(\phi(A)) = \sigma(A)$.*

Dokaz. Imamo

$$\lambda \in \sigma(A) \iff A - \lambda I \notin GL_n(\mathbb{F}) \iff \phi(A - \lambda I) \notin GL_n(\mathbb{F}) \iff \phi(A) - \lambda I \notin GL_n(\mathbb{F}) \iff \lambda \in \sigma(\phi(A)).$$

□

Tvrdnja 5. *ϕ preslikava idempotente u idempotente. Ortogonalni idempotenti ($PQ = QP = 0$) se preslikavaju u ortogonalne idempotente.*

Dokaz. Neka je $P \in M_n(\mathbb{F})$ idempotent. Tada je $P^2 = P$ pa imamo

$$\phi(P)^2 = \phi(P^2) = \phi(P)$$

odakle vidimo da je $\phi(P)$ idempotent. Neka su $P, Q \in M_n(\mathbb{F})$ idempotenti takvi da je $PQ = QP = 0$. Tada iz Leme 2 slijedi

$$\phi(P)\phi(Q) = \phi(PQ) = 0, \quad \phi(Q)\phi(P) = \phi(QP) = 0$$

pa su $\phi(P)$ i $\phi(Q)$ ortogonalni idempotenti. □

Tvrdnja 6. *Postoji invertibilna matrica $T \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $\phi(E_{ii}) = TE_{ii}T^{-1}$ za sve $1 \leq i \leq n$.*

Dokaz. $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ su u parovima ortogonalni idempotenti pa su $\phi(E_{11}), \ldots, \phi(E_{nn})$ također u parovima ortogonalni idempotenti. Nadalje, imamo

$$E_{11} + \cdots + E_{nn} = I \implies \phi(E_{11}) + \cdots + \phi(E_{nn}) = I$$

pa slijedi

$$\operatorname{Im} \phi(E_{11}) \dotplus \cdots \dotplus \operatorname{Im} \phi(E_{nn}) = \mathbb{F}^n.$$

Svi $\phi(E_{ii})$ su nenul pa slijedi

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} \dim \operatorname{Im} \phi(E_{ii}) = n \implies \dim \operatorname{Im} \phi(E_{11}) = \cdots = \dim \operatorname{Im} \phi(E_{nn}) = 1.$$

Ako odaberemo bazu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ za $\mathbb{F}^n$ takvu da x_i razapinje $\operatorname{Im} \phi(E_{ii})$, tada je matrični prikaz operatora $\phi(E_{ii})$ upravo E_{ii}. Dakle, ako je T odgovarajuća matrica prijelaza, slijedi

$$\phi(E_{ii}) = TE_{ii}T^{-1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

□

Promotrimo preslikavanje $\psi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ dano sa $\psi(A) := T^{-1}\phi(A)T, \quad A \in M_n(\mathbb{F})$. Lako se provjeri da je ψ opet Jordanov homomorfizam. Nadalje, imamo

$$\psi(E_{ii}) = T^{-1}\phi(E_{ii})T = T(T^{-1}E_{ii}T)T^{-1} = E_{ii}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $\phi(E_{ii}) = E_{ii}$ za sve $1 \leq i \leq n$.

Tvrdnja 7. *Za sve $1 \leq i \neq j \leq n$ postoje skalari $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{F}$ od kojih je točno jedan jednak nula takvi da*

$$\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij}E_{ij} + \beta_{ij}E_{ji}.$$

Dokaz. Imamo

$$\phi(E_{ij}) = \phi(E_{ii}E_{ij}E_{jj} + E_{jj}E_{ij}E_{ii}) = E_{ii}\phi(E_{ij})E_{jj} + E_{jj}\phi(E_{ij})E_{ii} = \phi(E_{ij})_{ij}E_{ij} + \phi(E_{ij})_{ji}E_{ji}.$$

Dakle, jedini eventualno nenul članovi se nalaze na mjestima (i, j) i (j, i) pa postoje skalari $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{F}$ takvi da

$$\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij}E_{ij} + \beta_{ij}E_{ji}, \qquad \text{za sve } 1 \leq i, j \leq n.$$

Nadalje,

$$0 = \phi(E_{ij}^2) = \phi(E_{ij})^2 = \alpha_{ij}\beta_{ij}(E_{ii} + E_{jj})$$

pa je točno jedan od α_{ij} i β_{ij} jednak 0 (nisu oba zbog injektivnosti). □

Tvrdnja 8. *Za sve $1 \leq i \neq j \leq n$ su ili svi α_{ij} nenul, ili su svi β_{ij} nenul.*

Dokaz. Prvo ćemo tu tvrdnju pokazati u i-tom retku. Neka su $1 \leq i, j, k \leq n$ različiti indeksi te pretpostavimo da je $\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij}E_{ij}$ te $\phi(E_{ik}) = \beta_{ik}E_{ki}$. Imamo

$$0 = \phi(E_{ij}E_{ik} + E_{ik}E_{ij}) = \phi(E_{ij})\phi(E_{ik}) + \phi(E_{ik})\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij}\beta_{ik}(E_{ij}E_{ki} + E_{ki}E_{ij}) = \underbrace{\alpha_{ij}\beta_{ik}}_{\neq 0} E_{kj}$$

što je kontradikcija.

Analogno se tvrdnja pokazuje za j-ti stupac. Neka su $1 \leq i, j, k \leq n$ različiti indeksi te pretpostavimo da je $\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij}E_{ij}$ te $\phi(E_{kj}) = \beta_{jk}E_{jk}$. Imamo

$$0 = \phi(E_{ij}E_{kj} + E_{kj}E_{ij}) = \phi(E_{ij})\phi(E_{kj}) + \phi(E_{kj})\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij}\beta_{jk}(E_{ij}E_{jk} + E_{jk}E_{ij}) = \underbrace{\alpha_{ij}\beta_{ik}}_{\neq 0} E_{ik}$$

što je kontradikcija.

Neka su sada $1 \leq i \neq j \leq n$ i $1 \leq k \neq l \leq n$. Tvrdimo da je

$$\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij}E_{ij}, \quad \phi(E_{kl}) = \alpha_{kl}E_{kl}$$

ili je

$$\phi(E_{ij}) = \beta_{ij}E_{ji}, \quad \phi(E_{kl}) = \beta_{kl}E_{lk}.$$

Pretpostavimo da je $\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij}E_{ij}$. Tada to isto vrijedi u cijelom i-tom retku pa zaključujemo $\phi(E_{il}) = \alpha_{il}E_{il}$. To isto tada vrijedi u cijelom l-tom stupcu pa slijedi $\phi(E_{kl}) = \alpha_{kl}E_{kl}$, što smo i trebali dokazati.

Analogno ako $\phi(E_{ij}) = \beta_{ij}E_{ji}$. □

Pretpostavimo prvo da su $\alpha_{ij} \neq 0$ za sve $1 \leq i, j \leq n$ (ovdje smo stavili $\alpha_{ii} = 1$ za $1 \leq i \leq n$).

Tvrdnja 9. *ϕ je multiplikativan na matričnim jedinicama, odnosno za sve $1 \leq i, j, k, l \leq n$ vrijedi*

$$\phi(E_{ij}E_{kl}) = \phi(E_{ij})\phi(E_{kl}).$$

Dokaz. Prvo pokazujemo relaciju

$$\alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}, \qquad \text{za sve } 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\alpha_{ik}E_{ik} + \delta_{ik}E_{jj} &= \phi(E_{ik} + \delta_{ik}E_{jj}) \\
&= \phi(E_{ij}E_{jk} + E_{jk}E_{ij}) \\
&= \phi(E_{ij})\phi(E_{jk}) + \phi(E_{jk})\phi(E_{ij}) \\
&= \alpha_{ij}\alpha_{jk}E_{ij}E_{jk} + \alpha_{jk}\alpha_{ij}E_{jk}E_{ij} \\
&= \alpha_{ij}\alpha_{jk}E_{ik} + \delta_{ik}\alpha_{jk}\alpha_{ij}E_{jj}
\end{aligned}$$

pa usporedbom koeficijenata uz E_{ik} zaključujemo $\alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}$. Ovaj zaključak nije validan jedino kad je $E_{ik} = E_{jj}$ odnosno $i = j = k$, kada jednakost $\alpha_{ij}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}$ trivijalno vrijedi.

Sada za sve $1 \leq i, j, k, l \leq n$ imamo

$$\phi(E_{ij})\phi(E_{kl}) = \alpha_{ij}\alpha_{kl}E_{ij}E_{kl} = \alpha_{ij}\alpha_{kl}\delta_{jk}E_{il} = \alpha_{ij}\alpha_{jl}\delta_{jk}E_{il} = \alpha_{il}\delta_{jk}E_{il} = \delta_{jk}\phi(E_{il}) = \phi(E_{ij}E_{kl}).$$

□

Naposlijetku za sve $1 \leq i, j \leq n$ slijedi

$$\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij} E_{ij} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\alpha_{11}}, \ldots, \frac{1}{\alpha_{1n}}\right) E_{ij} \operatorname{diag}(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}).$$

Naime, kanonski vektor e_j se po desnoj strani redom preslikava u

$$e_j \mapsto \alpha_{1j} e_j \mapsto \alpha_{1j} e_j \mapsto \alpha_{1j} e_i \mapsto \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{1i}} e_i = \frac{\alpha_{1i}\alpha_{ij}}{\alpha_{1i}} e_i = \alpha_{ij} e_i$$

dok ostale kanonske vektore desna strana anulira. Slijedi da desna strana djeluje baš kao $\alpha_{ij} E_{ij} = \phi(E_{ij})$.

Po linearnosti slijedi

$$\phi(X) = T^{-1} X T, \qquad \text{za sve } X \in M_n$$

gdje je $T = \operatorname{diag}(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n})$ invertibilna matrica.

Ako su pak $\beta_{ij} \neq 0$ za sve $1 \leq i, j \leq n$, tada je preslikavanje $X \mapsto \phi(X^t)$ Jordanov homomorfizam koji spada pod prethodni slučaj pa slijedi da postoji invertibilna matrica $T \in M_n$ takva da vrijedi

$$\phi(X^t) = T^{-1} X T, \qquad \text{za sve } X \in M_n$$

odnosno

$$\phi(X) = T^{-1} X^t T, \qquad \text{za sve } X \in M_n.$$

$\square$

Teorem 5 (Šemrl)**.** *Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), n \geq 3$ neprekidno preslikavanje koje čuva spektar i komutativnost, tj. za sve $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi*

$$k_{\phi(A)} = k_A, \qquad AB = BA \implies \phi(A)\phi(B) = \phi(B)\phi(A).$$

Tada je ϕ Jordanov automorfizam.

4 Norme

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. **Norma** na V je funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:

(i) $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in V$ (pozitivnost),

(ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0, \quad \forall x \in V$ (definitnost),

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{F}$ (pozitivna homogenost),

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V$ (subaditivnost, nejednakost trokuta).

Vektorski prostor na kojemu je zadana norma nazivamo **normiran prostor**.

Primjeri:

- $\mathbb{F}$ sa standardnom apsolutnom vrijednosti $|\cdot|$.
- $\mathbb{F}^n$ s p-normom za $p \in [1, +\infty\rangle$ i ∞-normom:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}, \qquad \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

- Neprekidne funkcije $C([0,1])$ s p-normom za $p \in [1, +\infty\rangle$ i ∞-normom:

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \qquad \|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Na normiranom prostoru V možemo prirodno definirati standardne pojmove iz matematičke analize u $\mathbb{R}$ tako da ulogu apsolutne vrijednosti $|\cdot|$ u $\mathbb{R}$ ovdje preuzima norma $\|\cdot\|$.

- Konvergencija niza: za niz $(x_n)_n$ u V kažemo da konvergira u $x \in V$ ako $\|x_n - x\| \to 0$ u $\mathbb{R}$, odnosno ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \implies \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

- Neprekidnost funkcije: za funkciju $f : V \to V$ kažemo da je neprekidna u točki $x_0 \in V$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in V) \quad \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

- Topologija: otvoreni skupovi su proizvoljne unije otvorenih kugala

$$K(x_0, r) = \{x \in V : \|x - x_0\| < r\}, \quad x_0 \in V, r > 0.$$

Može se pokazati da na fiksnom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru sve norme induciraju istu topologiju, tj. definiraju iste pojmove konvergencije i neprekidnosti. To općenito nije istina u beskonačnoj dimenziji.

Normirana algebra je algebra A nad poljem $\mathbb{F}$ na kojoj je zadana norma koja zadovoljava

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \quad \forall a, b \in A \text{ (submultiplikativnost).}$$

Nadalje, ako je A unitalna algebra s jedinicom 1 i ako je $\|1\| = 1$, tada kažemo da je A **unitalna normirana algebra**.

Promotrimo neke primjere normi na algebri $M_n(\mathbb{F})$ uz koje ona postaje normirana algebra.

- Neka su $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_Y$ dvije norme na prostoru $\mathbb{F}^n$. Definiramo **operatorsku normu**

$$\|A\|_{X,Y} := \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

  Kao specijalan slučaj, **spektralnu normu** $\|\cdot\|_{2,2}$ dobivamo ako za obje norme uzmemo euklidsku normu $\|\cdot\|_2$ na $\mathbb{F}^n$. Može se pokazati da za hermitske matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi

$$\|A\|_{2,2} = \sup_{\|x\|_2 = 1} |\langle Ax, x\rangle| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

- **Frobeniusova norma** (ili Hilbert-Schmidtova norma):

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^* A)}.$$

  Inducirana je skalarnim produktom $\langle A, B\rangle := \operatorname{Tr}(B^* A)$. Uočimo da $\|I\|_F = \sqrt{n}$ pa $(M_n(\mathbb{F}), \|\cdot\|_F)$ nije unitalna normirana algebra.

Ako je $\|\cdot\|$ proizvoljna submultiplikativna norma na $M_n(\mathbb{F})$, tada za svaku matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi da je njen spektar $\sigma(A)$ sadržan u disku $\overline{K}(0, \|A\|)$ oko ishodišta radijusa $\|A\|$.

5 Zadaci za zadaću

Za uspješno rješavanje zadaće dovoljno je riješiti 5 zadataka.

Zadatak 1. Na algebri $M_n(\mathbb{R})$ ima smisla gledati i realnu i kompleksnu spektralnu normu. Za $A \in M_n(\mathbb{R})$ promotrimo

$$\|A\|_{\mathbb{R}} = \sup\{\|Ax\|_2 : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}, \quad \|A\|_{\mathbb{C}} = \sup\{\|Ax\|_2 : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1\}.$$

Dokažite da je $\|A\|_{\mathbb{R}} = \|A\|_{\mathbb{C}}$.

Zadatak 2. (a) Neka je $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ homomorfizam algebri koji čuva operaciju adjungiranja, tj. vrijedi $\phi(X^*) = \phi(X)^*$ za sve $X \in M_n(\mathbb{F})$. Dokažite da postoji unitarna matrica $U \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $\phi(X) = UXU^*$ za sve $X \in M_n(\mathbb{F})$.

(b) Neka je $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ homomorfizam algebri koji dodatno zadovoljava

$$\|\phi(X)\| \leq \|X\|, \quad \text{za sve } X \in M_n(\mathbb{F})$$

gdje je $\|\cdot\|$ spektralna norma. Dokažite da ϕ čuva operaciju adjungiranja. *Uputa:* Pokažite da ϕ čuva unitarne matrice. Alternativno, pokažite da ϕ čuva (ortogonalne, tj. hermitske) projektore.

Zadatak 3. Neka je $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ Jordanov homomorfizam. Bez korištenja Teorema 4 pokažite da vrijedi

- $\phi(A^k) = \phi(A)^k$ za sve $A \in M_n(\mathbb{F}), k \in \mathbb{N}$.
- $\phi([A, B]^2) = [\phi(A), \phi(B)]^2$ za sve $A, B \in M_n(\mathbb{F})$.
- ϕ čuva komutativnost: ako za matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $[A, B] = 0$, tada je i $[\phi(A), \phi(B)] = 0$.

Pokažite primjerom da preslikavanje $\psi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ koje zadovoljava $\psi(A^2) = \psi(A)^2, \forall A \in M_n(\mathbb{F})$ ne mora biti neprekidno, a kamoli linearno.

Zadatak 4. Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ linearno preslikavanje koje čuva idempotente. Dokažite da je ϕ Jordanov homomorfizam.

Zadatak 5. Neka je $\psi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ neprekidno preslikavanje koje čuva spektar, tj. vrijedi $\sigma(\psi(A)) = \sigma(A)$ za sve $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dokažite da ψ čuva karakteristični polinom tj. vrijedi

$$k_{\psi(A)} = k_A, \quad \text{za sve } A \in M_n(\mathbb{C})$$

gdje je $k_A(x) = \det(xI - A)$.

Zadatak 6. Neka je $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ linearno preslikavanje koje čuva trag:

$$\operatorname{Tr} \phi(X) = \operatorname{Tr} X, \quad \text{za sve } X \in M_n(\mathbb{F}).$$

Dokažite da postoji $m \in \mathbb{N}$ te matrice $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m \in M_n(\mathbb{F})$ takve da je $\sum_{i=1}^m B_i A_i = I$ te

$$\phi(X) = \sum_{i=1}^m A_i X B_i, \quad \text{za sve } X \in M_n(\mathbb{F}).$$

Pokažite da za $n \geq 2$ općenito ne možemo postići $m = 1$, tj. da $\phi(X) = AXA^{-1}, \forall X \in M_n(\mathbb{F})$ za neku invertibilnu matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Zadatak 7. Odredite sve homomorfizme algebri $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ (tj. linearne multiplikativne funkcionale) gdje je $\mathcal{A}$ podalgebra od $M_n(\mathbb{F}), n \geq 2$ zadana s:

(a) $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{F})$.

(b) $\mathcal{A} = T_n(\mathbb{F})$, algebra svih $n \times n$ gornjetrokutastih matrica.

(c) Ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$ fiksna matrica, $\mathcal{A}$ je unitalna podalgebra od $M_n(\mathbb{F})$ generirana s A, tj.

$$\mathcal{A} = \mathbb{F}[A] = \{p(A) : p \in \mathbb{F}[x]\}.$$

Možete bez dokaza koristiti skoro očiglednu činjenicu da je evaluacija u matrici A

$$\mathbb{F}[x] \to M_n(\mathbb{F}), \quad p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \mapsto p(A) := \sum_{i=0}^m a_i A^i$$

dobro definiran homomorfizam algebri.

Zadatak 8. U ovom zadatku promatra se univerzalno svojstvo determinante koje determinantu karakterizira kao preslikavanje preko kojeg se faktoriziraju sva multiplikativna preslikavanja iz matrične algebre u polje.

(a) Neka je $\phi : GL_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^\times$ homomorfizam grupa (tj. multiplikativno preslikavanje). Dokažite da postoji jedinstveni homomorfizam $f : \mathbb{F}^\times \to \mathbb{F}^\times$ grupa takav da vrijedi $\phi(X) = f(\det X)$ za sve $X \in GL_n(\mathbb{F})$.

(b) Neka je $\phi : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ multiplikativno preslikavanje. Dokažite da postoji jedinstveno multiplikativno preslikavanje $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ takvo da vrijedi $\phi(X) = f(\det X)$ za sve $X \in M_n(\mathbb{F})$.

(c) Ako za preslikavanje ϕ u (a) dodatno pretpostavimo da je neprekidno, dokažite da je $f \equiv 1$ ili je nužno oblika $f(x) = |x|^p$ ili $f(x) = (\operatorname{sgn} x)|x|^p$ za neki $p \in \mathbb{R}^\times$. Ako za preslikavanje ϕ u (b) dodatno pretpostavimo da je neprekidno, dokažite da je f istog oblika uz $p > 0$.

Uputa: Pogledajte kako se ϕ ponaša na tzv. elementarnim matricama, tj. matricama koje reprezentiraju elementarne transformacije. Onda se sjetite da se svaka regularna matrica može prikazati kao produkt elementarnih matrica.

Zadatak 9. Neka je $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ linearno preslikavanje koje čuva rang. Dokažite da postoje invertibilne matrice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ takva da je $T(X) = AXB$ za sve $X \in M_n(\mathbb{C})$ ili $T(X) = AX^tB$ za sve $X \in M_n(\mathbb{C})$.

Uputa: Jedna linija dokaza ide ovako:

1. Dokažite da za sve $A \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi
$$A^2 = A \iff r(I - A) = n - r(A).$$
Zakključite da ϕ čuva idempotente.

2. Pokažite da ϕ čuva ortogonalnost idempotenata, tj. ako su $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$ idempotenti takvi da je $PQ = QP = 0$, tada je i $\phi(P)\phi(Q) = \phi(Q)\phi(P) = 0$.

3. Za $1 \le i \le n$ definirajmo $\mathcal{S}_i$ kao skup svih matrica koje žive samo u i-tom retku ili i-tom stupcu, tj.
$$\mathcal{S}_i = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A_{jk} = 0, \forall 1 \le j, k \le n, j \ne i\} \cup \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A_{jk} = 0, \forall 1 \le j, k \le n, k \ne i\}.$$
Dokažite da za sve $A \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi
$$A \in \mathcal{S}_i \iff r(A + \lambda E_{ii}) = 1, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$
Zaključite $\phi(\mathcal{S}_i) \subseteq \mathcal{S}_i$.

4. Dokažite da za sve $1 \le i, j \le n$ postoji nenul skalar $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ takav da $\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij}E_{ij}$ ili postoji nenul skalar $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$ takav da $\phi(E_{ij}) = \beta_{ij}E_{ji}$.

5. Dokažite da za sve $1 \le i, j \le n$ postoji nenul skalar $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ takav da $\phi(E_{ij}) = \alpha_{ij}E_{ij}$ ili za sve $1 \le i, j \le n$ postoji nenul skalar $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ takav da $\phi(E_{ij}) = \beta_{ij}E_{ji}$.

6. Završite dokaz slično kao što je učinjeno u dokazu Teorema 4.

Zadatak 10. Dokažite Frobeniusov teorem (Teorem 1).

Uputa: Jedna ideja:

1. Prvo pokažite da je ϕ bijekcija pa uočite da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\phi(I) = I$.

2. Pokažite da ϕ čuva rang. Naime, ako je $A \in M_n(\mathbb{C})$ ranga m, tada postoje invertibilne matrice $S, T \in M_n(\mathbb{C})$ takve da je $A = SI_mT$ gdje je $I_m = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ranga m. Promotrite polinom $\lambda \mapsto \det(ST + \lambda A)$.

3. Pozovite se na Zadatak 9.

Literatura

[1] Ilja Gogić, *Odabrana poglavlja teorije operatorskih algebri.* PMF-MO, Zagreb, 2017., interna skripta

[2] Peter Šemrl, *Maps on matrix spaces.* Linear Algebra and its Applications 413 (2006) 364–393, 2006.

[3] Chi-Kwong Li, Stephen Pierce, *Linear Preserver Problems.* The American Mathematical Monthly 108(7), 2001.

[4] Tatjana Petek, Peter Šemrl, *Characterization of Jordan homomorphisms on M_n using preserving properties.* Linear Algebra and its Applications 269 (1998) 33-46, 1998.