



“ Rotacija u dvije dimenzije ”

[Sadržaj:]

Uvod

1. Centar mase
2. Rotacija krutog tijela
3. Moment impulsa
4. Očuvanje momenta impulsa

Zaključak

Literatura

[Uvod]

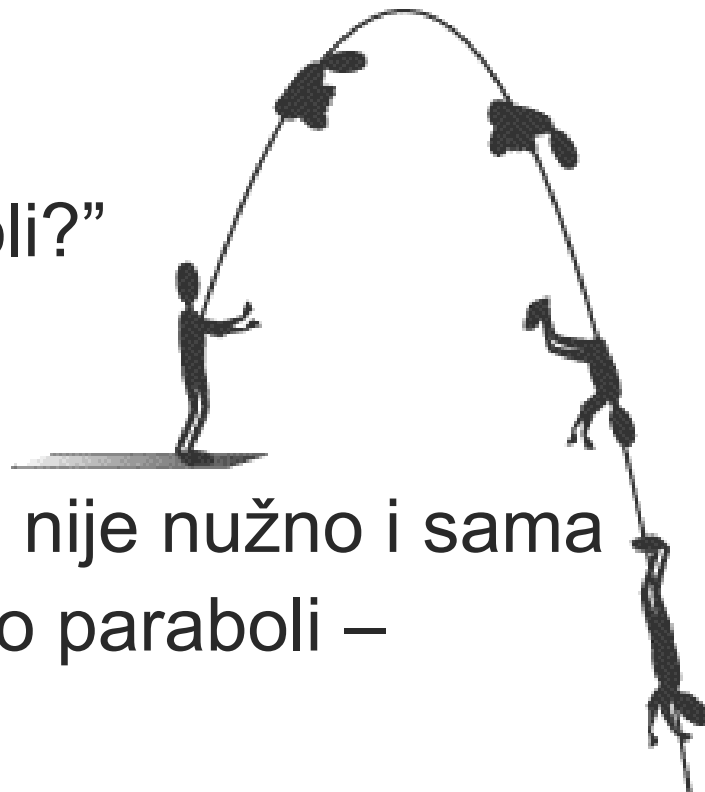
- Do sada smo promatrali mehaniku točke koja nema unutarnje strukture
- Sada promatramo nešto kompliciranije objekte, a najjednostavnije među njima je kruto tijelo koje se okreće oko neke osi dok je u gibanju
- Ova pojava može se objasniti jednostavnom primjenom kombinacija Newtonovih zakona

[1. Centar mase]

Bilo koji objekt proizvoljna oblika se nakon što je bačen giba po paraboli.

“Što se točno giba po paraboli?”

- postoji neka glavna točka (matematički definirana) koja nije nužno i sama materijalna i koja se kreće po paraboli –
TEOREM CENTRA MASE



[1.]

- objekt nam se sastoji od mnogo čestica
- Sila na i-tu česticu: $F_i = m_i (d^2 r_i / dt^2)$
- ...
- Ukupna sila jednaka je sumi sila po svim indeksima i jednaka je vanjskoj sili
(jer se unutarnje sile zbog 3. Newtonovog zakona poništavaju)

$$\sum_i F_i = F = d^2 (\sum_i m_i r_i) / dt^2$$

[1.]

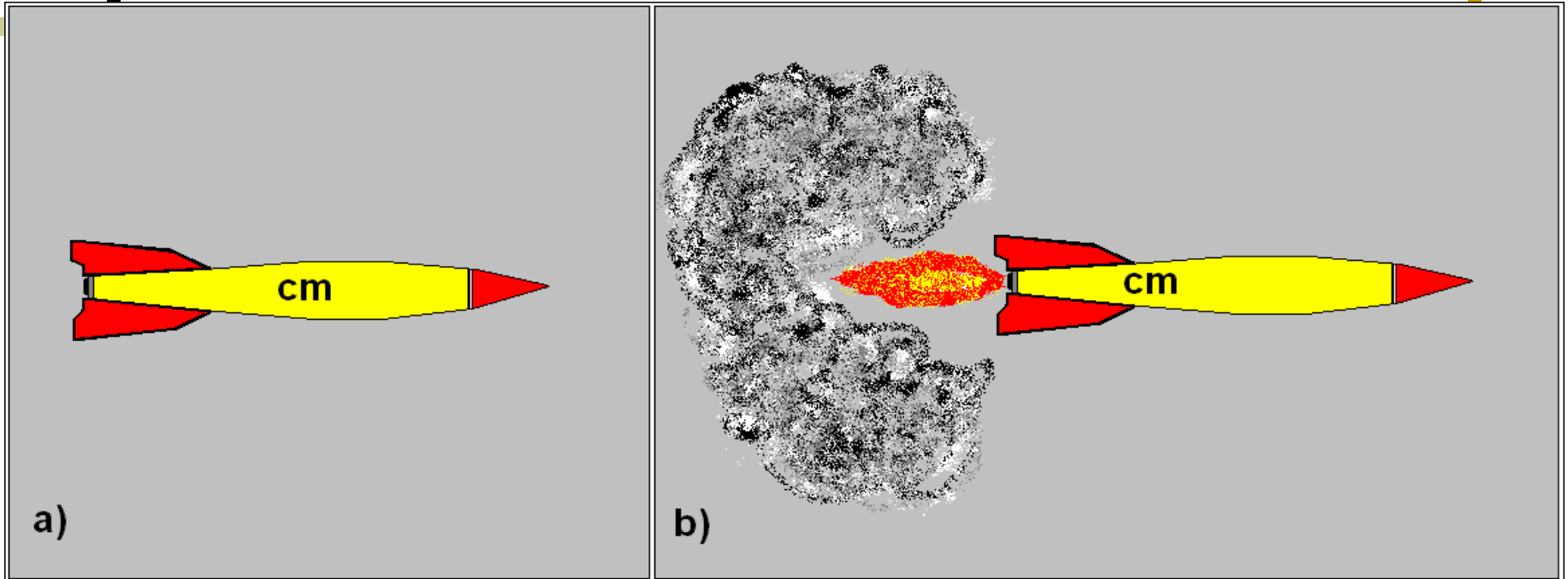
- Vanjska sila na objekt je suma svih sila koje djeluju na sastavne čestice objekta
- Označimo : M – ukupna masa (suma svih masa)

$$R = \sum_i (m_i r_i) / M , \text{ (vektor)}$$

$$F = d^2 (M R) / dt^2 = M (d^2 R / dt^2)$$

- Vanjska sila je umnožak ukupne mase i akceleracije u nekoj točki položaja R - ta točka je CENTAR MASE tijela

1. Primjer: pokretanje rakete



- početna brzina rakete je nula. Kada raketa izbaci gorivo na zadnjem kraju, to gorivo ide u jednom, a raketa u drugom smjeru, no centar mase je u ISTOJ TOČKI kao i prije izbacivanja goriva

[1.]

- Ako je vanjska sila nula, a objekt “pluta” u praznu prostoru centar mase se giba konstantnom brzinom. Ako objekt miruje, tada on nastavlja mirovati
- Za daljnja promatranja, važno je da se centar mase može tretirati posebno od unutarnjih gibanja u objektu pa ga u našoj daljnjoj raspravi o rotaciji možemo ignorirati

[2. Rotacija krutog tijela]

- promatramo rotaciju nestvarnog idealnog objekta kojega zovemo kruto tijelo
- Rotacija – kutna promjena položaja tijela od jednog trenutka do drugog
- možemo usporediti gibanje u jednodimenzionalnu sustavu s rotacijom u dvodimenzionalnu sustavu

2. Usporedba linearnog gibanja i rotacije

■ Gibanje u 1D

s – udaljenost (koliko daleko je tijelo otišlo)

$v = ds/dt$ – brzina
(koliko daleko tijelo odmakne u sekundi)

$a = dv/dt$ – akceleracija
(promjena brzine u vremenu)

■ Rotacija u 2D

θ – kut (koliko se tijelo zaokrenulo)

$\omega = d\theta/dt$ – kutna brzina (kolika je promjena kuta u sekundi)

$\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$ –
(kutna akceleracija)

2. Kinematika

dvodimenzionalne rotacije

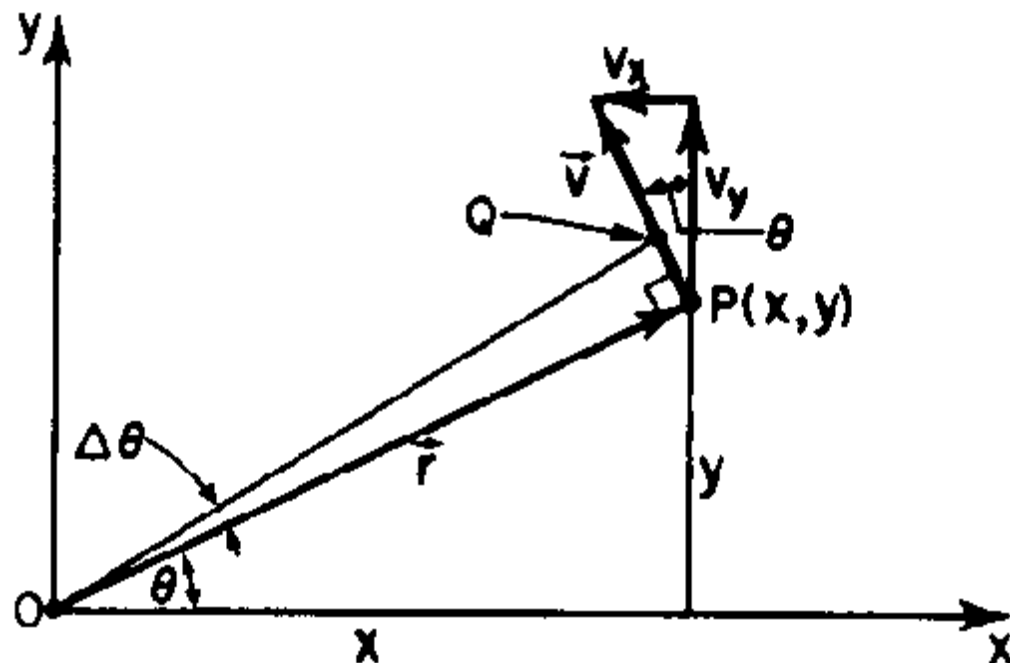
- opis gibanja neke čestice kada ona ima neku kutnu brzinu

P – početni položaj

r – radijus

$\Delta\theta$ – promjena kuti

Q – položaj nakon vremena



[2.]

- promjene položaja Δx i Δy

$$\Delta x = - PQ \sin\theta = - r\Delta\theta(y/r) = -y\Delta\theta$$

$$\Delta y = x\Delta\theta$$

- Iznos brzine $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \omega^2(x^2 + y^2) \rightarrow v = \omega r$$

2. Dinamika rotacije

– moment sile

- uvodimo veličinu τ - to je veličina koja tjera objekt da se vrti

<ul style="list-style-type: none"> • <u>1D gibanje</u> 	<ul style="list-style-type: none"> • <u>2D rotacija</u>
<p>F – sila (uzrokuje</p>	<p>τ – moment sile (uzrokuje</p>

gibanje vrtnju tijela)
 - moment sile je zadan oko neke
 tijela) osi; ako promijenimo os, moment sile

[2.]

- ako objekt okrećemo za mali kut , rad koji smo izvršili je: $\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y$

- uvrstimo jednadžbe za Δx i Δy

$$\Delta W = (x F_y - y F_x) \Delta \theta$$

- dobili smo da je rad umnožak promjene kuta i τ

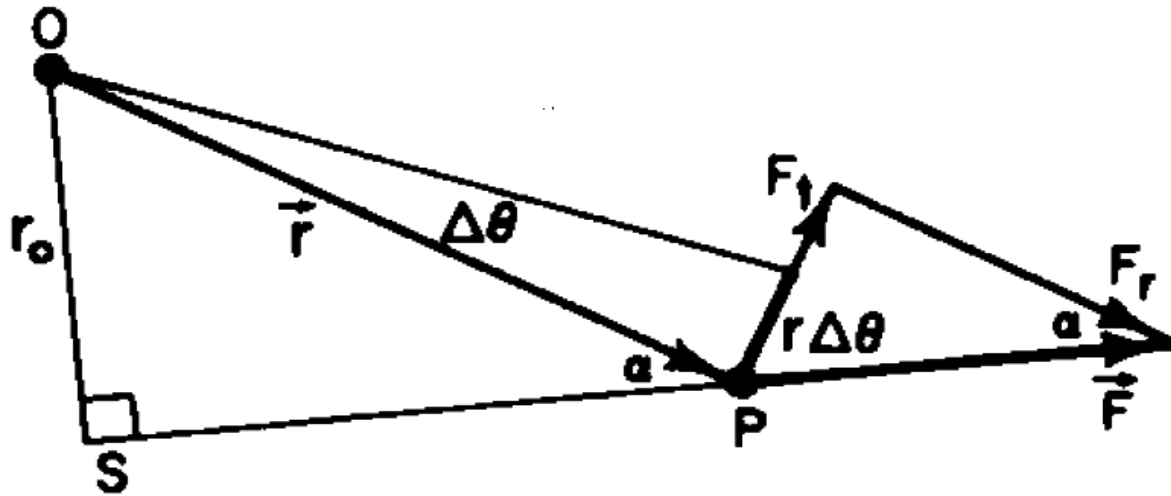
$$\tau_i = x_i F_{yi} - y_i F_{xi} , \quad \tau = \sum \tau_i$$

- imamo moment sile izražen silama

[2. Stanje ravnoteže]

- ako je suma svih sila (translacijskih i rotacijskih) na tijelo jednaka nuli, tada je i ukupni moment sile jednak nuli jer nema rada
- Dva uvjeta za ravnotežni položaj:
 - - suma svih sila jednaka je 0
 - - suma svih momenata sile jednaka je 0

2. Moment sile proizveden silom F

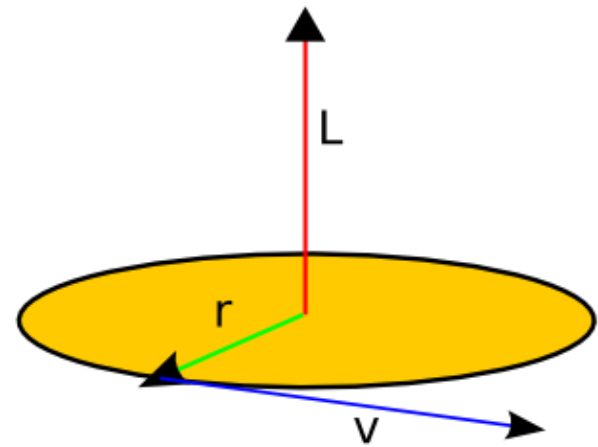


$$\tau = F \times r$$

moment sile = sila koja djeluje na česticu •
radijus

3. Moment impulsa (kutne količine gibanja)

- uvodimo novu veličinu – moment impulsa L



$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \times \mathbf{r}$$

$$\tau = x F_y - y F_x$$

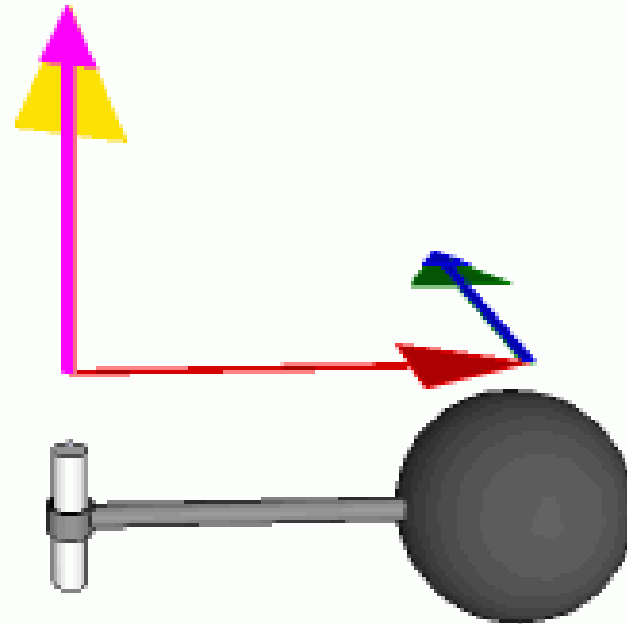
$$F_x$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times$$

$$m\mathbf{v}$$

$$L = x p_y - y p_x$$

[3.]



$$\tau = r \times F$$

$$L = r \times p$$

3. Veza između L i τ

TM:

Vanjska sila je promjena veličine impulsa sustava čestica ($F = dp / dt$). Analogno tome, vanjski moment sile je vremenska promjena veličine L koju zovemo moment impulsa sustava čestica.

$$\tau = \sum \tau_i = \sum dL_i/dt = dL/dt$$

4. Zakon očuvanja momenta impulsa

- Ako nema vanjskih momenata sile na sustav čestica, moment impulsa ostaje konstantan

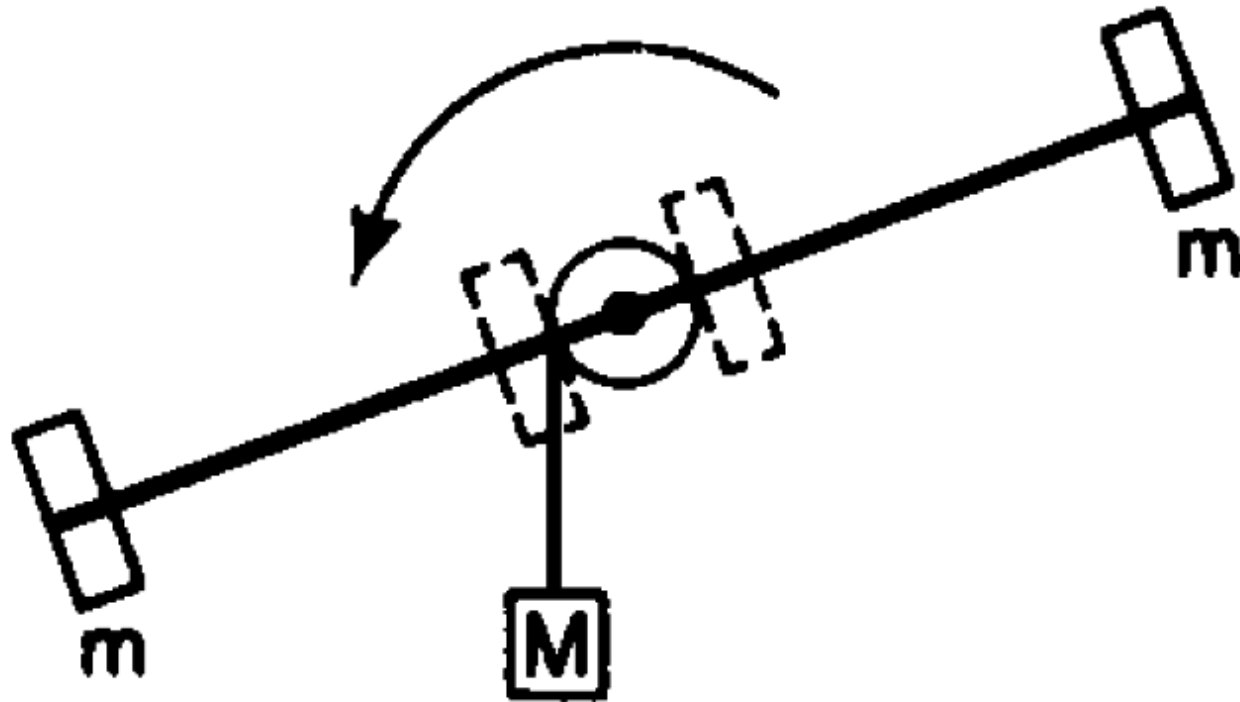
$$\tau = 0 \quad \rightarrow \quad L - \text{konstantan}$$

- krutno tijelo koje rotira oko fiksirane osi

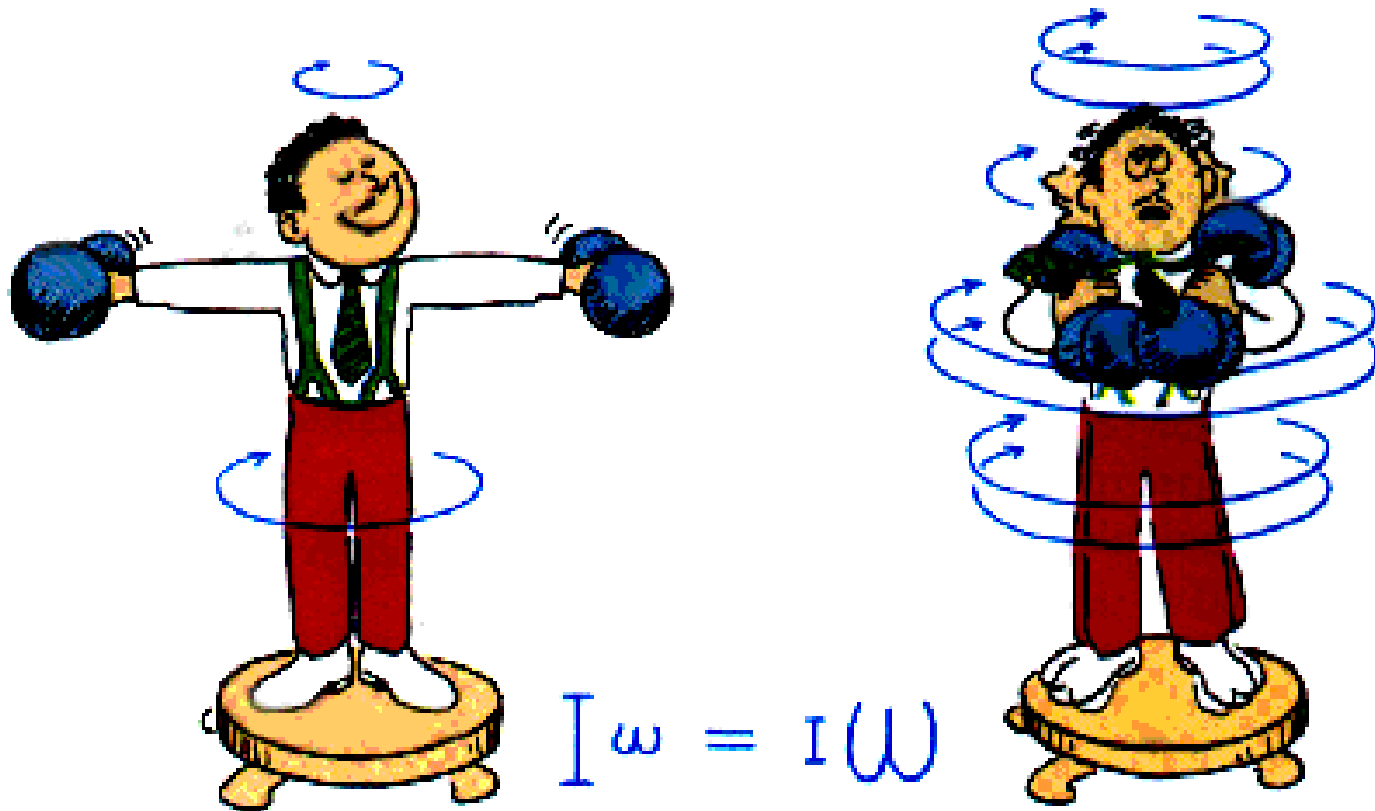
$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega \quad \rightarrow \quad L = I \omega$$

$$I = \sum m_i r_i^2 - \text{moment inercije (analogno masi)}$$

masama već i o njihovoj udaljenosti od osi zakretanja – što je masa udaljenija inercija će biti veća



- $L = I \omega$ – konstanta, dakle, ako smanjimo moment inercije moramo povećati kutnu brzinu



[Zaključak]

- R – točka centra mase $F = M (d^2R / dt^2)$
- Moment sile $\tau = F \times r$
- Moment impulsa ~~$L = r \times p = r \times mv$~~
 $\tau = dL / dt$
- ZOMI : $\tau = 0 \quad \rightarrow \quad L = I\omega - \text{konst.}$

[Literatura]

1. Feynman; *Lectures on physics volume 1*
2. Kittel, Knight, Ruderman; *Mechanics, Berkeley Physics Course – volume 1*
3. Wikipedia; *Angular momentum*