Poglavlje 2

Vektorski prostori

Definicija 2.1. Ako su na skupu $V \neq \emptyset$ definirane operacije $+ : V \times V \to V$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ sa svojstvima

(1) $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a,b,c \in V$,

(2) $\exists 0 \in V$ t.d. $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in V$,

(3) $\forall a \in V$ $\exists (-a) \in V$ t.d. $a+(-a) = -a+a = 0$,

(4) $a+b = b+a$, $\forall a,b \in V$,

(5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$,

(6) $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$,

(7) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall a,b \in V$,

(8) $1 \cdot a = a$, $\forall a \in V$,

kažemo da je $(V,+,\cdot)$ realni ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$), odnosno kompleksni ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) **vektorski prostor**. Ovo obično kratimo u: V je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

Uočimo sljedeće:

- činjenicu da je kodomena preslikavanja $+$ jednaka V možemo iskazati na ekvivalentan način: ako su $a,b \in V$ tada je $a+b \in V$. Ovo svojstvo nazivamo zatvorenost skupa V na zbrajanje
- činjenicu da je kodomena preslikavanja $\cdot$ jednaka V možemo iskazati na ekvivalentan način: ako su $\alpha \in \mathbb{F}$ i $a \in V$ tada je $\alpha a \in V$. Ovo svojstvo nazivamo zatvorenost skupa V na množenje skalarima.

Napomena 2.2. U svakom vektorskom prostoru još vrijedi

a) $\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ili $x = 0$

b) $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$

c) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$

d) $\alpha(x-y) = \alpha x - \alpha y$

Primjer 2.3 (Standardni primjeri).

a) $V^2(O)$ i $V^3(O)$ su vektorski prostori nad $\mathbb{R}$ s obzirom na zbrajanje radijvektora i množenje radijvektora skalarom kako smo prethodno definirali.

b) Sami skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ uz uobičajeno zbrajanje brojeva i množenje skalarom po koordinatama.

c) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ uz koordinatno zbrajanje i množenje skalarima (to jest, standardne operacije zbrajanja i množenje skalarima)

d) $M_{mn}(\mathbb{F})$ uz zbrajanje matrica i množenje matrica skalarima po elementima (standardne operacije zbrajanja i množenje skalarima)

e) $\mathcal{P}_n$ prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog od n uz standardne operacije zbrajanja polinoma i množenja polinoma skalarima

f) $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ prostor svih polinoma uz standardne operacije zbrajanja polinoma i množenja polinoma skalarima

g) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ skup svih realnih funkcija realne varijable uz operacije "po točkama":

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \tag{2.1}$$
$$(\alpha f)(t) = \alpha \cdot f(t). \tag{2.2}$$

Zadatak 2.1. Provjerite da je $\mathbb{C}^n$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ uz standardno definirane operacije. Oznaka: $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$.

Zadatak 2.2. Za svaki od sljedećih skupova navedite po tri njegova elementa, a zatim provjerite je li on realni vektorski prostor uz koordinatno zbrajanje i množenje skalarima.

a) $M = \mathbb{Q}^2$

b) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0\}$ (skicirati skup u ravnini)

c) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$ (skicirati skup u ravnini)

d) skup M svih točaka ravnine na pravcu $y = 2x$ (skicirati skup u ravnini, zapisati kao podskup od $\mathbb{R}^2$)

e) skup M svih točaka ravnine na pravcu $y = 2x + 1$ (skicirati skup u ravnini)

Rješenje (e) Uočimo da je $(0,1) \in M$, ali $2 \cdot (0,1) \notin M$.

Ili: pretpostavimo da postoji $(x_0, y_0) \in M$ takav da je $(x_0, y_0) + (x, y) = (x, y)$ za sve $(x,y) \in M$. To posebno vrijedi za $(x,y) = (0,1) \in M$, dakle $(x_0, y_0 + 1) = (0,1)$. Odavde slijedi $x_0 = y_0 = 0$, dakle $(x_0, y_0) = (0,0)$. Međutim, ovdje dolazimo do kontradikcije jer $(0,0) \notin M$.

Zadatak 2.3. Za svaki od sljedećih skupova navedite po tri njegova elementa, a zatim provjerite je li on realni vektorski prostor uz standarno definirane operacije zbrajanjai množenja skalarima.

a) skup svih polinoma s realnim koeficijentima stupnja barem 5 zajedno s nulpolinomom

b) skup svih polinoma s realnim koeficijentima neparnog stupnja zajedno s nulpolinomom

Zadatak 2.4. Dokažite da svaki (realni ili kompleksni) vektorski prostor $V \neq \{0\}$ sadrži beskonačno mnogo vektora.

Rješenje Uzmimo $x \neq 0$. Sada $\alpha \neq \beta$ povlači da je $\alpha x \neq \beta x$. Zaista,

$$\alpha x = \beta x \;\Rightarrow\; \alpha x - \beta x = 0 \;\Rightarrow\; (\alpha - \beta)x = 0 \;\Rightarrow\; \alpha - \beta = 0$$

što je kontradikcija.

Zadatak 2.5. Neka je V skup svih (beskonačnih) nizova realnih brojeva. Definirajmo

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) + (b_1, b_2, b_3, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots), \tag{2.3}$$
$$\alpha(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \ldots), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

(a) Provjerite je li V realan vektorski prostor uz ovako definirane operacije.

(b) Neka je $A \subset V$ skup svih aritmetičkih nizova. Je li A realan vektorski prostor uz iste operacije?

(c) Neka je $G \subset V$ skup svih geometrijskih nizova. Je li G realan vektorski prostor uz iste operacije?

Zadatak 2.6. U $\mathbb{R}^2$ ostavimo standardno zbrajanje i uvedemo novo množenje skalarom formulom $\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$. Je li to vektorski prostor?

Rješenje Ne. Prvi od aksioma koji ovdje nije zadovoljen je distributivnost u odnosu na skalarni faktor. Moralo bi biti $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$, $\forall \alpha, \beta, v$, odnosno

$$((\alpha + \beta)x, y) = (\alpha x, y) + (\beta x, y) = (\alpha x + \beta x, 2y), \quad \forall \alpha, \beta, x, y.$$

Čim je $y \neq 0$ gornja jednakost ne vrijedi. □

DZ 2.1. Provjerite da je $M_{mn}(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ realan vektorski prostor.

DZ 2.2. Za svaki od sljedećih skupova navedite po tri njegova elementa, a zatim provjerite je li on realni vektorski prostor.

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, y \geq 0\}$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$

d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

DZ 2.3. U $\mathbb{R}^2$ ostavimo standardno zbrajanje i uvedemo novo množenje skalarom formulom $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$. Je li to vektorski prostor?

2.1 Linearna nezavisnost

Definicija 2.4. Skup $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ u vektorskom prostoru V je **linearno nezavisan** ako vrijedi

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0. \tag{2.5}$$

U protivnom se kaže da je skup **linearno zavisan**.

Također, ako vektori $x_1, \ldots, x_k \in V$ zadovoljavaju (2.5), reći ćemo da su međusobno linearno nezavisni. Ako ne zadovoljavaju (2.5), reći ćemo da su međusobno linearno zavisni.

Činjenice 2.5. (a) Skup S je zavisan ako postoje $\alpha_i \in \mathbb{F}$, ne svi jednaki 0, takvi da je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$.

(b) Jednočlan skup $\{x\}$ je nezavisan ako i samo ako je $x \neq 0$.

(c) Podskup nezavisnog skupa je nezavisan.
(Ovo služi kao temelj definicije nezavisnosti za beskonačne skupove: kaže se da je beskonačan skup nezavisan ako je svaki njegov konačan podskup nezavisan.)

(d) Nadskup zavisnog skupa je zavisan. Posebno, svaki skup koji sadrži 0 je zavisan.

(e) Nezavisnost/zavisnost ne ovisi o poretku vektora.

(f) Niti jedan vektor osim 0 sam po sebi ne uzrokuje nezavisnost ili zavisnost skupa čiji je član. Primjer: $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, $\{\vec{i}, 2\vec{i}\}$.

(g) Skup $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je zavisan ako i samo ako postoji bar jedan element iz S koji je linearna kombinacija preostalih. Ako je S zavisan i $x_1 \neq 0$ (i pritom S smatramo uređenim), onda postoji bar jedan element iz S koji je linearna kombinacija svojih prethodnika u S.

(h) Neka su $a, b \neq 0$ proizvoljni vektori iz vektorskog prostora V. Tada je $\{a, b\}$ zavisan ako i samo ako je $b = \alpha a$ za neki $\alpha \in \mathbb{F}$.

Na predavanjima smo dokazali sljedeće:

(1) Dva nekolinearna vektora $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ bilo u $V^2(O)$, bilo u $V^3(O)$, čine nezavisan skup. Isto za tri nekomplanarna vektora u $V^3(O)$.

(2) Skup $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je nezavisan i u $\mathbb{R}^n$, i u $\mathbb{C}^n$.

(3) Skup $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ je nezavisan u $\mathcal{P}_n$.

(4) Skup $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ je nezavisan u M_{mn}.

Zadatak 2.7. Ispitajte nezavisnost skupa $\{a_1, a_2, a_3\}$ u $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ uz standardne operacije) ako je $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, $a_3 = (1, -2, 1)$.

Rješenje

Zadatak 2.8. Jesu li vektori $(1, 0, 0)$, $(i, 0, 0)$ nezavisni u $\mathbb{C}^3$? A u $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$?

Zadatak 2.9. Odredite nužan i dovoljan uvjet na kompleksne brojeve x i y tako da je skup $\{(1, x), (2, y)\}$ zavisan u $\mathbb{C}^2$.

Rješenje $y = 2x$

Zadatak 2.10. Odredite nužan i dovoljan uvjet na kompleksne brojeve x, y, z tako da su vektori $(1, x, x^2), (1, y, y^2), (1, z, z^2)$ međusobno linearno zavisni u $\mathbb{C}^3$.

Zadatak 2.11. Za sljedeće podskupove od $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ provjerite njihovu linearno (ne)zavisnost.

(a) $\{f, g, h\}$, gdje je $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ i $h(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$,

(b) $\{f, g, h\}$, gdje je $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ i $h(x) = \sin 2x$,

(c) $\{f, g, h\}$, gdje je $f(x) = (x-1)^2, g(x) = (x+2)^2, h(x) = (x-1)(x+2)$,

(d) $\{f, g, h\}$, gdje je $f(x) = a, g(x) = e^x, h(x) = e^{2x}$, a $a \in \mathbb{R}$ je konstanta,

Rješenje $\square$

Zadatak 2.12. Neka je V vektorski prostor i $n \in \mathbb{N}$, te neka je skup $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ linearno nezavisan. Provjerite linearnu nezavisnost skupova

$$A = \{x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \dots, x_{n-1} - x_n, x_n - x_1\},$$

$$B = \{x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \dots, x_{n-1} - x_n, x_n\}.$$

Rješenje $\square$

DZ 2.4. Provjerite jesu li sljedeći skupovi linearno nezavisni:

(a) $\{E_{ij} + E_{ji} : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ u M_{mn}.

(b) $\{(1, 9, 7), (2, 1, 1), (-1, 8, 6)\}$ u $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(1, 2, 1, 1), (1, 0, 1, 1)\}$ u $\mathbb{C}^4$.

(d) $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ u $\mathbb{R}^4$.

(e) $\{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$ u $\mathcal{P}_3$.

(f) $\{f_1, f_2, f_3\}$ u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1(x) = x^2 - 2x + 2$, $f_2(x) = x^2 + 2x - 7$, $f_3(x) = 3x - 9$.

DZ 2.5. Odredite nužan i dovoljan uvjet na vektore $v \in \mathbb{R}^4$ tako da skup $\{e_1, e_2, e_3, v\}$ bude linearno nezavisan.

DZ 2.6. Neka je $\{x, y\}$ linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru V. Neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$. Odredite nužan i dovoljan uvjet da skup $\{\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y\}$ bude nezavisan.

DZ 2.7. Neka je skup $\{x, y, z\}$ linearno nezavisan u V. Kakav je $\{x + y, y + z, z + x\}$?

2.2 Sustav (skup) izvodnica

Definicija 2.6. Skup $S \subset V$ je **sustav ili skup izvodnica (generatora)** za V ako vrijedi $[S] = V$. Kako je

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\},$$

ovo znači da se svaki vektor iz V može zapisati kao linearna kombinacija vektora iz S.

Činjenice 2.7. (a) Nadskup sustava izvodnica je također sustav izvodnica.

(b) Trivijalno je $[V] = V$; umijeće je naći čim manji skup izvodnica.

(c) Primjer: dva nekolinearna vektora u $V^2(O)$, tri nekomplanarna vektora u $V^3(O)$.

(d) Primjer: $\{e_1, \dots, e_n\}$ za $\mathbb{R}^n$ (isto za $\mathbb{C}^n$).

(e) Ako je S sustav izvodnica za V i ako se neki vektor iz S može prikazati kao linearna kombinacija ostalih članova iz S, onda je i $S \setminus \{x\}$ sustav izvodnica za V.

(f) Biti sustav izvodnica za V nije ni u kakvoj uzročno posljedičnoj vezi s linearnom nezavisnošću/zavisnošću.

Primjer: tri vektora u $V^2(O)$, dva nekolinearna vektora u $V^3(O)$.

(g) Po definiciji kažemo da je V **konačnodimenzionalan** ako postoji bar jedan konačan sustav izvodnica za V. Naši standardni primjer su takvi, uočimo da $\mathcal{P}$ nije (nije niti $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, niti $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$). Još uočimo da je i $\{0\}$ konačnodimenzionalan na trivijalan način.

Zadatak 2.13. U vektorskom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ odredite, ako postoji, konačan skup S takav da je

(a) $[S] = M_2(\mathbb{R})$,

(b) $[S] = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\}$,

(c) $[S] = \{\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Rješenje

Zadatak 2.14. Pokažite da skup $S = \{(a, b, c, b) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ nije sustav izvodnica za $\mathbb{R}^4$. Nađite, ako postoji, element $v \in \mathbb{R}^4$ takav da je skup $S \cup \{v\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^4$. Je li takav v jedinstven?

Rješenje

Zadatak 2.15. Neka je S podskup vektorskog prostora V. Dokažite da je $[[S]] = [S]$.

Rješenje Očito je $[S] \subseteq [[S]]$. Pokažimo da je $[[S]] \subseteq [S]$. Elementi iz $[[S]]$ su linearne kombinacije elemenata iz $[S]$, dakle linearne kombinacije linearnih kombinacija elemenata iz S. Trebamo pokazati da smo na taj način dobili linearne kombinacije elemenata iz S. Zbog jednostavnijeg zapisa pokažimo da se linearna kombinacija **dva** (analogno za više, objasniti razliku) elemenata iz $[S]$ može prikazati kao linearna kombinacija elemenata iz S.

Neka su $x, y \in [S]$. Tada je $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ i $y = \sum_{j=1}^{l} \beta_j y_j$ za neke skalare α_i, β_j i te $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_l$ elemente iz S. Tada je

$$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{k} \alpha \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{l} \beta \beta_j y_j = (\text{lin komb elemenata iz S}),$$

dakle element iz $[S]$.

Zadatak 2.16. Neka su S_1 i S_2 podskupovi vektorskog prostora V. Dokažite da je $[S_1] = [S_2]$ ako i samo ako je $S_1 \subseteq [S_2]$ i $S_2 \subseteq [S_1]$.

Rješenje

Pretpostavimo $[S_1] = [S_2]$. Tada iz $S_1 \subseteq [S_1]$ slijedi $S_1 \subseteq [S_2]$, a iz $S_2 \subseteq [S_2]$ slijedi $S_2 \subseteq [S_1]$. Obratno, po prethodnom zadatku, iz $S_1 \subseteq [S_2]$ slijedi $[S_1] \subseteq [S_2]$, a iz $S_2 \subseteq [S_1]$ imamo $[S_2] \subseteq [S_1]$. Dakle $[S_1] = [S_2]$.

Zadatak 2.17. Dokažite da je $[S_1] = [S_2]$, ako su S_1 i S_2 podskupovi od $\mathbb{R}^3$ zadani kao

$$S_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 4, 2)\}, \quad S_2 = \{(1, 2, 1), (1, 0, -1)\}.$$

Rješenje Koristimo prethodni zadatak ...

Zadatak 2.18. Neka je $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$. Odredite $[S]$.

Rješenje Uočimo da je $S_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,-1)\}$ podskup skupa S. Lako vidimo da je $[S_1] = \mathbb{R}^3$ pa po prethodnom zadatku....

Zadatak 2.19. Neka je $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$. Odredite $[S]$.
Rješenje $\square$

Domaća zadaća

DZ 2.8. Neka je V vektorski prostor te $a,b,c \in V$ takvi da vrijedi $a+b+c=0$. Dokažite da je

$$[\{a,b\}] = [\{b,c\}] = [\{a,c\}] = [\{a,b,c\}].$$

DZ 2.9. Je li skup $\{(1,1,0),(1,0,0)\}$ nezavisan/sustav izvodnica za $\mathbb{R}^3$?
Isto pitanje za skup $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0),(1,-1,1)\}$.

DZ 2.10. Odredite konačan skup S takav da je

a) $[S] = \{\begin{bmatrix} a+b & 2b-c \\ a-2b+c & 3a+5c \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$,

b) $[S] = \{(a+2b+c, a-b) : a,b,c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$,

c) $[S] = \{(a+\overline{a}+b, b) : a,b \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ (uputa: $a = x+iy, b = u+iv; x,y,u,v \in \mathbb{R}$),

d) $\{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\} \subseteq P_2(\mathbb{R})$.

DZ 2.11. Pokaži:

a) $(1,0,3) \in [\{(1,0,0),(0,1,2),(0,2,1)\}] \subseteq \mathbb{R}^3$

b) $1+t \notin [\{t^2+t+2, t^2+2t\}] \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$,

c) $(3+i, 1+i) \in [\{(1+i,2),(1-i,i)\}] \subseteq \mathbb{C}^2$,

d) $(3+i, 1+i) \notin [\{(1+i,2),(1-i,i)\}] \subseteq \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.

DZ 2.12. Vrijede li jednakosti:

a) $[\{(1,3),(2,5)\}] = [\{(5,13),(1,2)\}]$ u $\mathbb{R}^2$,

b) $[\{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, 2\vec{i}-\vec{j}\}] = [\{3\vec{i}+\vec{k}, 3\vec{j}+2\vec{k}\}]$ u $V^3(O)$,

c) $[\{1+t, 2t^2+t+3\}] = [\{t^2+1, t^2+t+1\}]$ u $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

DZ 2.13. Je li

a) $\{1+i, 1-i\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$,

b) $\{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ sustav izvodnica za $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$,

c) $\{(1,2,3),(1,0,1),(1,1,0)\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^3$?

2.3 Baza i dimenzija

Definicija 2.8. (Konačan) linearno nezavisan sustav izvodnica naziva se **baza**.

Činjenice 2.9.

(h) Svaki konačnodimenzionalan prostor osim $\{0\}$ ima (konačnu) bazu.

(i) Baza nije jedinstvena; primjer: *svaka* dva nekolinearna vektora u $V^2(O)$ čine bazu.

(j) Sve baze za V su jednakobrojne. Taj broj nazivamo **dimenzija prostora** V, oznaka: $\dim V$.

(k) Ako je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ bilo koja baza za V, onda svaki vektor $v \in V$ ima jedinstven prikaz u obliku $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$.

(l) Svaki konačan sustav izvodnica za V može se reducirati do baze.

(m) Svaki linearno nezavisan skup u V može se nadopuniti do baze (Primjer: dva nekolinearna vektora u $V^3(O)$).

(n) Neka je $n = \dim V$.

Linearno nezavisni skupovi u V imaju $\leq n$ elemenata. Linearno nezavisan skup od n elemenata je nužno baza.

Sustavi izvodnica za V imaju $\geq n$ elemenata. Sustav izvodnica od n elemenata je nužno baza.

Na predavanjima:

(a) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je baza za $\mathbb{R}^n$, također i za $\mathbb{C}^n$, $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{C}^n = n$.

(b) $\{1, t, \ldots, t^n\}$ je baza za $\mathcal{P}_n$, $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

(c) $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ je baza za M_{mn}, pri čemu je E_{ij} matrica koja na mjestu (i, j) ima 1, a sve ostalo su 0. Zato je $\dim M_{mn} = mn$.

Zadatak 2.20. Provjerite da je skup $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$ baza za $\mathbb{R}^3$, te u njoj prikažite proizvoljni $v \in \mathbb{R}^3$.

Rješenje

$$v = (x_1, x_2, x_3) = x_3(1, 1, 1) + \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)(1, 1, 0) + \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)(1, -1, 0).$$

Zadatak 2.21. Neka je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ jedna baza vektorskog prostora $V^3(O)$.

(a) Za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ će i skup

$$\{\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}, \lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, (\lambda^2 - \lambda)\vec{a} + (\lambda - 1)\vec{b} + (\lambda^2 - 1)\vec{c}\}$$

biti baza za $V^3(O)$?

(b) Postoji li $\eta \in \mathbb{R}$ takav da su vektori $\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}$, $\lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ i $\vec{a} + \eta\vec{c}$ komplanarni za sve vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$? Ako postoji, dovoljno je pronaći jedan takav η.

Sve tvrdnje detaljno obrazložite.

Rješenje

Zadatak 2.22. Nadopunite skup $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ do baze od M_2. Je li to nadopunjenje jedinstveno?

Rješenje □

Zadatak 2.23. Neka je $n \in \mathbb{N}$. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ svih polinoma stupnja najviše n definiramo polinome

$$p_k(t) = (2t+5)^k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Provjerite je li skup $\{p_0, \dots, p_n\}$ baza za $\mathcal{P}_n$.

Rješenje Dokazujemo linearnu nezavisnost. To je dovoljno jer se radi o skupu koji ima $n+1 = \dim \mathcal{P}_n$ elemenata. Uočimo da je p_k polinom stupnja k za sve $k = 0, \dots, n$. Promatramo uređeni skup $\{p_0, \dots, p_n\}$. Kada bi on bio linearno nezavisan, tada bi se neki p_k mogao napisati pomoću svojih prethodnika.... □

Zadatak 2.24. Neka je $n \in \mathbb{N}$. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ svih polinoma stupnja najviše $2n$ definiramo polinome

$$p_k(t) = (t^2+t+5)^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dokažite da je skup $\{p_1, \dots, p_n\}$ linearno nezavisan, te ga nadopunite do baze za $\mathcal{P}_{2n}$.

Rješenje □

Zadatak 2.25. Zašto je kanonska baza kanonska?

Zadatak 2.26. Skup $\{(1,2),(2,1)\}$ nadopunite do baze za $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.

Rješenje □

Zadatak 2.27. Može li se skup

$$S = \{1, t, t^2, t^3, 2+3t+4t^2+5t^3\}$$

reducirati do baze za $\mathcal{P}_3$? Ako da, nađite sve mogućnosti.

Rješenje □

Domaća zadaća

DZ 2.14. Provjerite da je $\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ baza za $\mathbb{R}^4$ i prikažite u njoj proizvoljan vektor $v \in \mathbb{R}^4$.

DZ 2.15. Nađite jednu bazu i dimenziju za $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$.

DZ 2.16. Nađite bazu i dimenziju za A, prostor aritmetičkih nizova.

DZ 2.17. Neka je $\{a,b\}$ baza za V (dakle, $\dim V = 2$). Uz koji uvjet na $c \in V$ će i skup $\{a,c\}$ biti baza za V?

DZ 2.18. Isto pitanje kao prethodno za bazu $\{b_1, \dots, b_n\}$ i skup $\{b_1, \dots, b_{n-1}, c\}$.

DZ 2.19. Neka je $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ baza za V i definirajmo $b_{n+1} = -b_1 - b_2 - \dots - b_n$. Dokažite da se svaki vektor $v \in V$ može, i to na jedinstven način, prikazati u obliku $v = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i b_i$, pri čemu je $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$.

DZ 2.20. Skup $\{(1,1,0)\}$ nadopuniti do baze prostora $\mathbb{R}^3$.

Rješenje Gledamo $\{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ (dodali smo kanonsku bazu početnom skupu). Jedna nadopuna je $\{a, e_1, e_3\}$. Uočimo nejedinstvenost: drugo moguće rješenje je $\{a, e_2, e_3\}$. $\square$

DZ 2.21. Nadopunite $\{(1,1,1,1),(1,-1,-1,-1)\}$ do baze za $\mathbb{R}^4$.

2.4 Potprostori

Definicija 2.10. Neka je $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. M je **potprostor** od V, oznaka $M \leq V$, ako je M i sam vektorski prostor s naslijeđenim operacijama.

Činjenice 2.11. (a) Trivijalni potprostori su $\{0\}$ i V. Uvijek je za $M \leq V$, $\dim M \leq \dim V$.

(b) $M \leq V$, $\dim M = \dim V \Leftrightarrow M = V$.

(c) Za $M \subseteq V$ vrijedi $M \leq V$ ako i samo ako je $\alpha x + \beta y \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall x, y \in M$, ako i samo ako $x + y \in M$, $\forall x, y \in M$ i $\alpha x \in M$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$.

Uvijek je $0 \in M$.

(d) $M_1, M_2 \leq V \Rightarrow M_1 \cap M_2 \leq V$.

(e) Presjek bilo koje množine potprostora od V je opet potprostor od V.

(f) Za $S \subseteq V$ vrijedi $[S] = \bigcap_{S \subseteq M \leq V} M$. Specijalno, uvijek je $[S] \leq V$.

Zadatak 2.28. Provjerite da je $M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^3$, te mu nađite bazu i dimenziju.

Rješenje Prvo provjera da je potprostor... Za bazu i dimenziju:

$$x \in M \quad \Rightarrow \quad x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_3, x_3) = (x_1, x_1, 0) + (0, x_3, x_3) = x_1(1, 1, 0) + x_3(0, 1, 1).$$

Vektori $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$ očito pripadaju M, razapinju ga i nezavisni su. Dakle, $\dim M = 2$. □

Zadatak 2.29. Koji od navedenih skupova su potprostori od $\mathbb{R}^n$? Za one koji jesu nađite po jednu bazu i dimenziju.

$$\begin{aligned}
A &= \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}, \forall i\} \\
B &= \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = 2x_2\} \\
C &= \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\} \\
D &= \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0\right\} \\
E &= \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\} \\
F &= \{(x_1, \ldots, x_n) : x_{2i} = 0, \forall i\} \\
G &= \{(x_1, \ldots, x_n) : x_2 = x_4 = \ldots = x_{2i} = \ldots\}
\end{aligned}$$

Rješenje □

Zadatak 2.30. Je li $M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 - 2\overline{z_2} = 0\}$ potprostor od $\mathbb{C}^2$? A od $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$?

Rješenje Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M$. Sada je $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) \in M$ ako i samo ako je

$$\alpha x_1 + \beta y_1 - 2\overline{\alpha x_2 + \beta y_2} = \alpha x_1 - 2\overline{\alpha}\overline{x_2} + \beta y_1 - 2\overline{\beta}\overline{y_2} = 0,$$

a to općenito ne vrijedi. Konkretno, nije problem u zbrajanju, već u množenju skalarom. Na primjer, $x = (2 + 2i, 1 - i) \in M$, ali $i \cdot x = (-2 + 2i, 1 + i) \notin M$.

Sada primijetimo da gornji račun pokazuje da sve štima ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dakle, $M \leq \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$. Još vrijedi

$$v = (z_1, z_2) \in M \quad \Leftrightarrow \quad v = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2),\ 2(x_2 - iy_2) = x_1 + iy_1,$$

tj. $2x_2 = x_1$, $-2y_2 = y_1$, a to vrijedi ako i samo ako je

$$v = \left(x_1 + iy_1, \frac{1}{2}x_1 - i\frac{1}{2}y_1\right) = x_1\left(1, \frac{1}{2}\right) + y_1\left(i, -\frac{i}{2}\right).$$

Zadatak 2.31. Dokažite da je $M = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(1) = p(-1)\}$ potprostor od $\mathcal{P}_4$, te mu odredite (neku) bazu i dimenziju?

Rješenje

Zadatak 2.32. Neka je V vektorski prostor dimenzije 3. Dokažite da V sadrži beskonačno mnogo potprostora dimenzije 2.

Rješenje

Zadatak 2.33. $M = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \ldots = x_{n-1} - x_n = x_n - x_1\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dokažite da je $M \leq \mathbb{R}^n$, nađite mu neku bazu i nadopunite je do baze za $\mathbb{R}^n$.

Rješenje

Za matricu $A \in M_n$, $A = (a_{ij})$ definiramo **transponiranu matricu** $A^T = (b_{ij})$ formulom $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.

Zadatak 2.34. Neka je $S = \{A \in M_n : A^T = A\}$ i $L = \{A \in M_n : A^T = -A\}$. Provjerite da su to potprostori od M_n i nađite im po jednu bazu i dimenziju.

Rješenje Najprije općenito pokazati da vrijedi $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $A, B \in M_n$. Sada je jasno da je $S, L \leq M_n$.

...

Zadatak 2.35. Neka je $M \leq V$, $M \neq \{0\}, V$. Pokažite da postoji baza za V čiji niti jedan član ne leži u M. Uputa: pokušajte zamisliti/konstruirati bazu za $V^3(O)$ čiji niti jedan član ne leži u xy–ravnini.

Rješenje Neka je $\{a_1, \ldots, a_k\}$ jedna baza za M, pri čemu je $1 \leq k < n = \dim V$. Nadopunimo je do baze $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ za V i gledamo skup $\{a_1 + a_n, \ldots a_k + a_n, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$. Lako se vidi da je nezavisan i kako sadrži točno n elemenata, on je baza za V.

Uočimo da nijedan od vektora $a_{k+1}, \ldots, a_n$ ne leži u M (jer bi tada skup $\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ bio zavisan). Također, nijedan od vektora $a_1 + a_n, \ldots, a_k + a_n$ ne leži u M.

Pouka zadatka je da ne možemo *a priori* računati na to da će baza za V u sebi sadržavati bazu za M. No, to možemo postići ako krenemo od baze za M pa je nadopunimo do baze za V.

Domaća zadaća

DZ 2.22. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 - 2x_4 = 0\}$.

DZ 2.23. U $\mathbb{R}^4$ su dani vektori $a_1 = (1, 1, 2, 2)$, $b_1 = (1, 0, 0, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$, $b_2 = (0, 1, 2, 1)$. Neka je $M_1 = [\{a_1, b_1\}]$, $M_2 = [\{a_2, b_2\}]$. Dokažite da je $M_1 = M_2$.

Rješenje Jasno je da zapravo imamo baze za M_1, M_2. Zato je $\dim M_1 = \dim M_2 = 2$ pa je dovoljno vidjeti da je $M_1 \subseteq M_2$ (ili $M_2 \subseteq M_1$). Dovoljno je, dalje, vidjeti $a_2, b_2 \in M_1$ jer M_1 kao vektorski prostor tada mora sadržavati i sve njihove linearne kombinacije. Sada se računa $a_2 = a_1 + b_1$, $b_2 = a_1 - b_1$.

DZ 2.24. Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$. Koje uvjete moraju zadovoljavati ovi brojevi da bi skup $M = \{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \beta\}$ bio potprostor?

DZ 2.25. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - 2x_2 - x_4 = 0\} \leq \mathbb{R}^4$. Baza i dimenzija?

DZ 2.26. Neka su L, U, D redom skupovi svih donjetrokutastih/gornjetrokutastih/dijagonalnih matrica u M_n. Dokažite da su to potprostori od M_n, te im nađite po jednu bazu i odredite dimenzije. (Predavanja, knjiga!)

DZ 2.27. Dokažite da su $X = \{A \in M_n : A^T = A\}$ i $Y = \{A \in M_n : A^T = -A\}$ potprostori od M_n, nađite im po jednu bazu i dimenziju.

DZ 2.28. $M = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(5) = 0\} \leq \mathcal{P}_3$. Baza i dimenzija?

2.5 Suma i presjek potprostora

Definicija 2.12. Za $L, M \leq V$ definira se **suma potprostora** L i M kao $L + M = [L \cup M]$. Kažemo da je suma **direktna** ako je $L \cap M = \{0\}$ i tada pišemo $L \dot{+} M$.

Činjenice 2.13.

(a) $L + M = \{a + b : a \in L, b \in M\}$. Rastav $x = a + b$ svih vektora $x \in L + M$ je jedinstven ako i samo ako je suma direktna.

(b) $\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim L \cap M$.

(c) Ako je $L \cap M = \{0\}$, te ako imamo baze $\{a_1, \ldots, a_m\}$ i $\{b_1, \ldots, b_l\}$ za M i L, onda je $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_l\}$ baza za V. (Objasniti kratko!)

Zadatak 2.36. Neka su U i L redom prostor svih gornjotrokutastih i prostor svih donjotrokutastih matrica u M_n. Dokazati da je $U + L = M_n$, te da suma nije direktna.

Rješenje Svaka matrica iz M_n se može zapisati kao zbroj jedne ..... pa prema (a) slijedi ....
Rastav nije jedinstven, na primjer..... □

Zadatak 2.37. Neka su X i Y redom prostor svih simetričnih i prostor svih antisimetričnih matrica u M_n. Dokazati da je $X \dot{+} Y = M_n$.

Rješenje Presjek je .... Zato je $\dim(X \dot{+} Y) = ... = n^2 = \dim M_n$... □

Posljedica prethodnog zadatka: svaka kvadratna matrica se na jedinstven način može prikazati kao zbroj jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice. Kako?

....

Zadatak 2.38. Neka je $\mathcal{P}_3$ prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3, te neka su

$$M = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 0\}, \quad L = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(2) = 0\}$$

njegovi potprostori. Odredite po jednu bazu za M, L, $M \cap L$ i $M + L$.

Rješenje $p \in M$ akko $p(t) = (t-1)(at^2 + bt + c)$ za neke a, b, c. .... Baza za $M : \{t^2(t-1), t(t-1), (t-1)$. (ocito skup izvodnica, lin nez....)

$p \in L$ akko $p(t) = (t-2)(at^2 + bt + c)$ za neke a, b, c. .... Baza za $M : \{t^2(t-2), t(t-2), (t-2)$.

$M \cap L = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = p(2) = 0\}$. $p \in M \cap L$ akko $p(t) = (t-1)(t-2)(at + b)$ za neke a, b. .... Baza za $M \cap L : \{t(t-1)(t-2), (t-1)(t-2)\}$.

Iz $\dim M = \dim L = 3, \dim(L \cap M) = 2$ slijedi $\dim(M + L) = 3 + 3 - 2 = 4 = \dim \mathcal{P}_3$, pa zbog $M \leq \mathcal{P}_3$ slijedi $\square$

Pretpostavimo da su nam poznate baze potprostora i da trebamo odrediti bazu za njihovu sumu i njihov presjek.

Bazu za sumu potprostora određujemo tako da uniju baza potprostora (što je skup izvodnica za sumu) reduciramo do linearno nezavisnog skupa.....

Kako nalazimo bazu presjeka potprostora? (Ovaj postupak će ujedno dati i bazu za sumu potprostora.)

Neka su dani potprostori M i L od V, neka su dane baze $\{a_1, \ldots, a_m\}$ i $\{b_1, \ldots, b_l\}$ za M i L, dakle $\dim M = m$, $\dim L = l$. Skup $\{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_l\}$ je očito skup izvodnica za $M + L$.

- Ako je linearno nezavisan, onda je i baza za $M+L$ pa je $\dim(M+L) = m+l = \dim M + \dim L$ pa slijedi da je $\dim M \cap L = 0$, tj. $M \cap L = \{0\}$.

- Ako je zavisan (uočimo $a_1 \neq 0$), nađimo vektor koji je linearna kombinacija prethodnika; to nije nijedan od a–ova, dakle to je neki b_i. Izbacimo ga van i ono što je ostalo još uvijek je skup izvodnica za $L + M$. Postupak nastavimo.

  Recimo da smo proveli takvih k koraka dok na kraju nismo dobili nezavisan skup, time i bazu za $L + M$. Očito je $k \leq l$. Ako je $k = l$, svi b–ovi su izbačeni i slijedi da je $M + L = M$, tj. $L \leq M$ i zato $L \cap M = L$.

  Ostaje razmotriti slučaj $k < l$. Nije smanjenje općenitosti ako pretpostavimo da su izbačeni $b_1, \ldots, b_k$. Dakle, $\{a_1, \ldots, a_m, b_{k+1}, \ldots, b_l\}$ je baza za $M+L$. Sad svaki od $b_1, \ldots, b_k$ kao element od $L \subseteq M + L$ dopušta rastav u toj bazi u obliku

$$b_r = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,r} a_i + \sum_{j=k+1}^{l} \beta_{j,r} b_j =: e_r + f_r, \quad r = 1, \ldots, k.$$

  Pogledajmo vektore $e_1, \ldots, e_k$. Očito su u $M \cap L$, tvrdimo da zapravo čine bazu za $M \cap L$. To vrijedi jer je $\dim M \cap L = \dim M + \dim L - \dim(M + L) = m + l - (m + l - k) = k$ pa vidimo da samo treba dokazati njihovu nezavisnost.

$$\sum_{r=1}^{k} \gamma_r e_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{r=1}^{k} \gamma_r (b_r - f_r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_k b_k + \bullet \cdot b_{k+1} + \bullet \cdot b_{k+2} + \ldots + \bullet \cdot b_l = 0.$$

  Slijedi da su svi koeficijenti 0, posebno $\gamma_1 = \ldots = \gamma_k = 0$.

Zadatak 2.39. Neka su $M = [B_1]$ i $N = [B_2]$ potprostori od $\mathbb{R}^4$ zadani svojim bazama

$$B_1 = \{(1, -1, 0, 2), (3, -1, -3, 1), (2, -1, -1, 2)\}, \quad B_2 = \{(1, 2, -1, -2), (1, -2, -3, 4), (-1, -1, 3, -1)\}.$$

Odredite po jednu bazu za $M + N$ i $M \cap N$.

Zadatak 2.40 (ilustracija algoritma). Neka su M i L zadani svojim bazama $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$ i $b_1 = (1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1)$. Odrediti baze za $M + L$ i $M \cap L$.

Rješenje Skup $\{(1, 0, 1), (1, 2, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ je zavisan jer sadrži 4 vektora u trodimenzionalnom prostoru. Uočimo da je $\{a_1, a_2, b_1\}$ lin nez, zato baza za $M + L$. Sad preostaje b_2 prikazati u toj bazi i uzeti mu M–komponentu.

$$(0, 0, 1) = \alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(1, 2, 1) + \beta(1, 0, 0)$$

Dobije se $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = -1$ pa je $1 \cdot (1,0,1) + 0 \cdot (1,2,1) = (1,0,1)$ baza za $M \cap L$.

Domaća zadaća

DZ 2.29. Zadani su $M, L \leq \mathbb{R}^4$ svojim bazama $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,1,-1,-1)$, $a_3 = (1,-1,1,-1)$, te $b_1 = (1,-1,-1,1)$, $b_2 = (2,-2,0,0)$, $b_3 = (3,-1,1,1)$. Nađite baze za $M + L$ i $M \cap L$.

DZ 2.30. Neka su $M, L, K \leq V$. Pokažite da je $(M \cap L) + (M \cap K) \subseteq M \cap (L + K)$. Vrijedi li jednakost?

Rješenje Ako je $x \in (M \cap L) + (M \cap K)$, onda ima oblik $x = a + b$, gdje su $a \in M \cap L$, $b \in M \cap K$. Očito je $a + b \in M$ (jer su oba iz M, a M je potprostor), također je $a + b \in L + K$ (jer je $a \in L$, $b \in K$). Dakle je $a + b \in M \cap (L + K)$.

Jednakost općenito ne vrijedi. Uzmimo u $\mathbb{R}^2$ $M = [(1,1)]$, $L = [(1,0)]$, $K = [(0,1)]$. Sad je $M \cap L = M \cap K = \{0\}$, dok je $M \cap (L + K) = M \cap \mathbb{R}^2 = M$. □

DZ 2.31. Za svaki $a \in \mathbb{R}$ definiran je potprostor vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$ (polinoma stupnja ≤ 3) kao

$$M_a = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(a) = 0\}.$$

Odredite neku bazu potprostora $(M_1 \cap M_2) + M_3$.

DZ 2.32. Neka je V vektorski prostor dimenzije n i neka su L i M njegovi potprostori dimenzije $n-1$ takvi da L nije podskup od M i M nije podskup od L. Odredite dimenziju potprostora $L \cap M$.

DZ 2.33. Zadani su potprostori X, Y, Z realnog vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$ svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog tri s realnim koeficijentima s

$$X = \left[\left\{x^3 + x^2 + 3x + 2,\ 2x^3 - x^2 + 1,\ x^3 - x^2 - x\right\}\right],$$

$$Y = \left[\left\{(x+1)^3,\ (x+1)^2\right\}\right] \qquad \text{i} \qquad Z = \{p \in \mathcal{P}_3 \,:\, p(x) = -p(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Pronađite neku bazu prostora $(X + Y) \cap Z$. Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

2.6 Direktni komplement

Definicija 2.14. Neka je $L \leq V$. Ako je $M \leq V$ takav da je $L \dotplus M = V$, kaže se da je M direktni komplement za L (i obratno).

Kako nalazimo direktni komplement netrivijalnog potprostora L od V? Uzmemo bazu $\{b_1, \ldots, b_k\}$ za L, proširimo je do baze $\{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ za cijeli prostor V i tada je $[\{b_{k+1}, \ldots, b_n\}]$ jedan direktni komplement od L.

Direktni komplement nije jedinstven. Na primjer, u $\mathbb{R}^3$ uzmimo za M xy-ravninu i tada je svaki pravac kroz ishodište koji ne leži u toj ravnini njezin direktni komplement. Zbog nejedinstvenosti direktnog komplementa nije korektna oznaka $V \dot{-} M$.

Zadatak 2.41. Za $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_3 - x_4 = 0, x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$ provjeriti da je potprostor i naći mu neki direktan komplement.

Rješenje Vrijedi da je $x \in M$ ako i samo ako je

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 + x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) = x_3(1,1,1,0) + x_4(1,-2,0,1).$$

Dakle je $\{(1,1,1,0),(1,-2,0,1)\}$ jedna baza za M, sad je treba dopuniti do baze za $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{\underbrace{(1,1,1,0)}_{=:a},\underbrace{(1,-2,0,1)}_{=:b},e_1,e_2,\cancel{e_3},\cancel{e_4}\right\}.$$

Očito su $\{a,b,e_1\}$ i $\{a,b,e_1,e_2\}$ nezavisni i zato možemo uzeti $L=[\{e_1,e_2\}]$ kao direktni komplement.

Zadatak 2.42. Neka je M prostor svih dijagonalnih matrica reda 3. Odredite po jedan direktni komplement potprostora M u V, ako je

(a) $V=M_3$.

(b) V prostor svih simetričnih matrica reda 3.

(c) V prostor svih gornjotrokutastih matrica reda 3 .

Rješenje (a)
(b)
(c)

Zadatak 2.43. Neka je $M=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i=0\}\leq\mathbb{R}^n$.

(a) Dokažite da je $L=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i=x_j,\forall i,j\}$ direktni komplement od M u $\mathbb{R}^n$.

(b) Nađite jedinstveni rastav elementa $(1,2,3,\dots,n)$ s obzirom na rastav $\mathbb{R}^n=L\dotplus M$.

(c) Nađite jedinstveni rastav elementa $(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ s obzirom na rastav $\mathbb{R}^n=L\dotplus M$.

(d) Nađite još neki direktni komplement od M u $\mathbb{R}^n$.

Rješenje (a) Vrijedi da je $x\in M$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned} x &= (x_1,\dots,x_{n-1},x_n)=(x_1,\dots,x_{n-1},-x_1-\dots-x_{n-1}) \\ & x_1(1,0,\dots,0,-1)+x_2(0,1,0,\dots,0,-1)+\dots+x_{n-1}(0,0,\dots,1,-1). \end{aligned}$$

Baza za M je $\{(1,0,\dots,0,-1),(0,1,0,\dots,0,-1),\dots,(0,0,\dots,1,-1)\}$, $\dim M=n-1$.

Vrijedi da je $x\in L$ ako i samo ako je

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1,x_1,\dots,x_1)=x_1(1,1,\dots,1)$$

pa je $\{(1,1,\dots,1)\}$ baza za L, a $\dim L=1$.

Vrijedi da je L direktan komplement od M ako i samo ako je $L\dotplus M=\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je $L+M=\mathbb{R}^n$, $L\cap M=\{0\}$.

Gledamo $L\cap M$. Vrijedi da je $x\in L\cap M$ ako i samo ako je $x_1=x_2=\dots=x_n$ i $\sum x_i=0$. Dakle, $nx_1=0$ pa je $x_1=x_2=\dots=x_n=0$. Dobili smo da je $L\cap M=\{0\}$, a kako je $\dim(L+M)=\dim L+\dim M=n-1+1=n$, onda je $L+M=\mathbb{R}^n$.

Primijetimo da nije bilo potrebno dokazivati obje stvari ($L+M=\mathbb{R}^n$, $L\cap M=\{0\}$). Zahvaljujući tome što znamo dimenzije, jedno povlači drugo. Puno je lakše dokazati da je $L\cap M=\{0\}$.

(b) ....
(c) ....
(d) ....

Domaća zadaća

DZ 2.34. Za $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ naći bazu i neki direktan komplement u $\mathbb{R}^4$.

DZ 2.35. Za $M = \{(z_1, z_2, z_3) : z_1 + z_2 + z_3 = 0\} \leq \mathbb{C}^3$ naći bazu, te direktni komplement u (a) $\mathbb{C}^4$ (b) $(\mathbb{C}^4)_\mathbb{R}$.

DZ 2.36. Zadani su $M, L \leq \mathbb{R}^4$ svojim bazama $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, -1, -1)$, $a_3 = (1, -1, 1, -1)$, te $b_1 = (1, -1, -1, 1)$, $b_2 = (2, -2, 0, 0)$, $b_3 = (3, -1, 1, 1)$. Nađite baze za $M + L$ i $M \cap L$.

DZ 2.37. Neka je M prostor svih matrica reda 4 takvih da je $a_{ij} = 0$ za $i \geq j$. . Odredite po jedan direktni komplement potprostora M u V, ako je

(a) $V = M_4$.

(b) V prostor svih gornjotrokutastih matrica reda 4.

(c) V prostor svih matrica reda 4 koje na dijagonali imaju sve nule.

DZ 2.38. Neka su $M, L, K \leq V$. Pokažite da je $(M \cap L) + (M \cap K) \subseteq M \cap (L + K)$. Vrijedi li jednakost?

Rješenje Ako je $x \in (M \cap L) + (M \cap K)$, onda ima oblik $x = a + b$, gdje su $a \in M \cap L$, $b \in M \cap K$. Očito je $a + b \in M$ (jer su oba iz M, a M je potprostor), također je $a + b \in L + K$ (jer je $a \in L$, $b \in K$). Dakle je $a + b \in M \cap (L + K)$.

Jednakost općenito ne vrijedi. Uzmimo u $\mathbb{R}^2$ $M = [(1, 1)]$, $L = [(1, 0)]$, $K = [(0, 1)]$. Sad je $M \cap L = M \cap K = \{0\}$, dok je $M \cap (L + K) = M \cap \mathbb{R}^2 = M$. □

DZ 2.39. Isto u M_n.

DZ 2.40. Neka je $\dim V = n$, neka su $M, L \leq V$, $1 \leq \dim M = \dim L < n$. Dokažite da M i L imaju zajednički direktan komplement.

Rješenje Postupimo kao kod dokaza teorema o dimenziji sume.

Neka je $\{a_1, \ldots, a_k\}$ baza za $M \cap L$. Nadopunimo je do baze za M i L: $B_M = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r\}$, $B_L = \{a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_r\}$. Vrijedi da je $k + r = \dim M = \dim L$.

Sad iz dokaza spomenutog teorema znamo da je $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_r\}$ baza za $M + L$. I ovu bazu nadopunimo do baze cijelog prostora V: $B = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_r, v_1, \ldots, v_s\}$. Uočimo da je $\dim M = \dim L = k + r$, $\dim V = k + r + r + s$ pa traženi komplement ima dimenziju $r + s$.

Tvrdimo da $N = [\{b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots, b_r + c_r, v_1, \ldots, v_s\}]$ ima svojstvo da je $M \dot{+} N = V$, $L \dot{+} N = V$.

Jasno je da je $M \cap N = \{0\} = L \cap N$. Naime, ako je $x \in M \cap N$, onda je

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i b_i = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i (b_i + c_i) + \sum_{i=1}^{s} \delta_i v_i.$$

Zbog nezavisnosti elemenata baze B slijedi $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, $\delta_i = 0$, $\forall i$. Dakle, $x = 0$. Analogno se dobije $L \cap N = \{0\}$.

Slično se zaključi da je $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r, b_1 + c_1, \ldots, b_r + c_r, v_1, \ldots, v_s\}$ baza za V (nezavisnost dobijemo kao gore, a kardinalitet je pravi). Dakle, dobili smo direktan komplement za M. Argument za L je isti. □

Sljedeće godine riješiti par zadataka iz linearnih mnogostrukosti - samo prepoznavanje skupa.

2.7 Linearne mnogostrukosti

Neka je V vektorski prostor, $x_0 \in V$ i $M \leq V$. Skup

$$x_0 + M = \{x_0 + m : m \in M\}$$

nazivamo linearna mnogostrukost u V u smjeru potprostora M (s predstavnikom/reprezentantom x_0).

Vrijedi $x_0 + M = y_0 + M \Leftrightarrow x_0 - y_0 \in M$. Posebno $x_0 + M = M \Leftrightarrow x_0 \in M$, odakle slijedi da je svaki element iz linearne mnogostrukosti njezin reprezentant.

Linearne mnogostrukosti u ravnini $\mathbb{R}^2$ su točke (tj. jednočlani skupovi), pravci i $\mathbb{R}^2$.

Linearne mnogostrukosti u prostoru $\mathbb{R}^3$ su točke (tj. jednočlani skupovi), pravci, ravnine i $\mathbb{R}^3$.

Zadatak 2.44. Je li skup $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ linearna mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$? Ako da, napišite ju u obliku $(x_0, y_0, z_0) + M$, gdje je M potprostor od $\mathbb{R}^3$.

Rješenje

Zadatak 2.45. Je li skup $B = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 1, p(0) = 0\}$ linearna mnogostrukost u $\mathcal{P}_3$? Ako da, napišite ju u obliku $p_0 + M$, gdje je M potprostor od $\mathcal{P}_3$.

Rješenje

Zadatak 2.46. Je li skup $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ linearna mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$?

Rješenje Ne. Napišemo $C = (1, 0, 0) + C_0$. Kako C_0 nije potprostor od $\mathbb{R}^3$ slijedi da C nije linearna mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$.

DZ 2.41. Je li skup $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F} \right\}$ linearna mnogostrukost u $M_2(\mathbb{F})$?

DZ 2.42. Je li skup $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ linearna mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$?