Poglavlje 3

Matrice

DEFINICIJA 3.1. Preslikavanje $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$ zove se **matrica** tipa (m, n) (ili $m \times n$), odnosno realna (kompleksna) matrica s m redaka i n stupaca. Oznaka za skup svih takvih matrica je $M_{mn}(\mathbb{F})$.

Uvodimo sljedeće pojmove i oznake:

1. Tablični zapis $A = (a_{ij}) = [a_{ij}]$.

2. Za skalare $a_{ij} \in \mathbb{F}$ kažemo da su **elementi** matrice A.

3. Uređena n–torka $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ je i–ti **redak** od A.

4. Uređena m–torka $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ je j–ti **stupac** od A.

5. **Nulmatrica** $0 \in M_{mn}(\mathbb{F})$ zadana je s $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$.

6. Matricu tipa $1 \times n$ nazivamo **(jedno)retčanom**.

7. Matricu tipa $m \times 1$ nazivamo **(jedno)stupčanom**.

8. Matricu tipa $n \times n$ nazivamo **kvadratnom**.

9. Uređena n–torka $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ je **glavna dijagonala** od A.

10. Uređena n–torka $(a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1})$ je **sporedna dijagonala** od A.

11. Operacije: zbrajanje matrica iz $M_{mn}(\mathbb{F})$ i množenje matrica iz $M_{mn}(\mathbb{F})$ skalarom iz $\mathbb{F}$. Tada je $M_{mn}(\mathbb{F})$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ dimenzije $m \cdot n$.

12. Ulančane matrice možemo množiti: Ako su $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B = (b_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{F})$, tada je $C = A \cdot B = (c_{ij}) \in M_{mp}(\mathbb{F})$, gdje je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, p.$$

13. Svojstva množenja:

    (1) $A(B + C) = AB + AC$ (desna distributivnost)

    (2) $(A + B)C = AC + BC$ (lijeva distributivnost)

(3) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ (kvaziasocijativnost)

(4) $(AB)C = A(BC)$ (asocijativnost)

14. Množenje nije komutativno, čak ni ako su oba produkta definirana

15. **Jedinična matrica** $I \in M_n(\mathbb{F})$ dana je s $I = (\delta_{ij})$, gdje je $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

16. Za množenje kvadratnih matrica vrijedi

(5) $AI = IA = A$, $\forall A \in M_n(\mathbb{F})$

pa je $M_n(\mathbb{F})$ **asocijativna algebra s jedinicom**.

Zadatak 3.1. Pomnožite matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Rješenje Produkt AB je definiran i iznosi

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{pmatrix},$$

a produkt BA nije definiran.

Zadatak 3.2 (množenje nije komutativno čak ni kad oba produkta postoje). Izračunajte AB i BA, gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Rješenje

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}.$$

17. U $M_n(\mathbb{F})$ postoje **djelitelji nule**, npr. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18. U $M_n(\mathbb{F})$ definiramo **potenciranje** kao

$$A^0 = I, A^1 = A, \ldots, A^n = A^{n-1}A, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 3.3. Vrijedi da je

(a) $A^m A^n = A^{m+n}$,

(b) $(A^m)^n = A^{mn}$,

za sve $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Rješenje Dokazujemo indukcijom po n, uz m fiksan.

$\boxed{n = 1}$ $A^m \cdot A^1 \stackrel{\text{def}}{=} A^{m+1}$,

$\boxed{\text{korak}}$ $A^m \cdot A^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} A^m (A^n \cdot A) \stackrel{\text{asoc}}{=} (A^m \cdot A^n) \cdot A \stackrel{\text{p.i.}}{=} A^{m+n} \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} A^{m+n+1}$.

DZ 3.1. Izračunajte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Rješenje Indukcijom dokazati $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

DZ 3.2. Dokažite da je:

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$.

Zadatak 3.4. Dokažite da je $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ako i samo ako je $AB = BA$.

19. Za $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ definiramo **transponiranu matricu** $A^T = (b_{ij}) \in M_{nm}(\mathbb{F})$ s $b_{ij} = a_{ji}$. Dokažite

(a) $\left(A^T\right)^T = A$, $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$,

(b) $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$, $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$,

(c) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, za A, B ulančane,

(d) $(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdot A_{k-1}^T \cdots A_1^T$, za $A_1, \ldots, A_k$ ulančane.

(a) očito

(b) imali smo već prije

(c) Neka su $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B = (b_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{F})$. Tada je $(A \cdot B)^T \in M_{pm}(\mathbb{F})$. Kako je $A^T \in M_{nm}(\mathbb{F})$, $B^T \in M_{pn}(\mathbb{F})$, onda je $B^T \cdot A^T \in M_{pm}(\mathbb{F})$ pa se dimenzije danih matrica slažu. Pogledajmo (i,j)–ti element od jedne i druge matrice:

$$\left((A \cdot B)^T\right)_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$

$$\left(B^T \cdot A^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(B^T\right)_{ik} \left(A^T\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$$

(d) indukcijom iz (c)

Zadatak 3.5. Neka je $D \in M_3$ dijagonalna matrica na čijoj su dijagonali α, β, γ. U ovisnosti o α, β, γ odredite dimenziju prostora $M = \{A \in M_3 : AD = DA\}$.

Rješenje ... $\square$

20. Za $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ definiramo **trag** kao $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Zadatak 3.6. (a) Dokažite da je $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$,

(b) Dokažite da je $\mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \,\mathrm{Tr}\, A + \beta \,\mathrm{Tr}\, B$, $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}, A, B \in M_n(\mathbb{F})$.

Rješenje

(a) Neka je $AB = C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $BA = D = (d_{ij})$, $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$. Tada je

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \mathrm{Tr}(BA).$$

(b) Imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\alpha A+\beta B)&=\sum_{i=1}^{n}[\alpha A+\beta B]_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\alpha[A]_{ii}+\beta[B]_{ii}\\&=\alpha\sum_{i=1}^{n}[A]_{ii}+\beta\sum_{i=1}^{n}[B]_{ii}=\alpha\operatorname{Tr}A+\beta\operatorname{Tr}B.\end{aligned}$$

Zadatak 3.7. Dokažite da ne postoje matrice $A, B \in M_n$ takve da vrijedi $AB - BA = I$.

Rješenje

Zadatak 3.8. Neka je $T \in M_n$. Dokažite da je $M = \{A \in M_n : AT = TA\}$ potprostor od M_n. Može li se dogoditi da je M nul-potprostor? Može li se dogoditi da je M jednak M_n? Odgovore obrazložite.

Rješenje ...

21. Za $A = (A_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$ definiramo njoj **konjugiranu** matricu $\overline{A} = (b_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$ s $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$.
DZ 3.3. Dokažite da za $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vrijedi

(a) $\overline{A} = A$ ako i samo ako je A realna matrica

(b) $\overline{\overline{A}} = A$

(c) $\overline{\alpha A + \beta B} = \overline{\alpha}\overline{A} + \overline{\beta B}$

(d) $\overline{A^T} = \overline{A}^T$

(e) $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, za ulančana matrice A, B.

22. Za $A = (A_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$ definiramo njoj **adjungiranu** (ili **hermitski konjugiranu**) matricu $A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T}$.
DZ 3.4. Pokažite da vrijedi

(a) $A^* = A^T$ ako i samo ako je A realna

(b) $(A^*)^* = A$

(c) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$

(d) $(AB)^* = B^*A^*$, za A, B ulančane

(e) $(A_1A_2\cdots A_k)^* = A_k^*A_{k-1}^*\cdots A_1^*$, za A_1, A_2, ..., A_k ulančane.

Definicija 3.2. Kažemo da je $A \in M_n(\mathbb{F})$

simetrična ako je $A^T = A$,

antisimetrična ako je $A^T = -A$.

Za $A \in M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je

hermitska ako je $A^* = A$,

antihermitska ako je $A^* = -A$.

Zadatak 3.9. (a) Simetrične matrice reda n čine potprostor od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzije $\frac{n(n+1)}{2}$.

(b) Antisimetrične matrice reda n čine potprostor od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzije $\frac{n(n-1)}{2}$.

(c) $M_n(\mathbb{F})$ je direktna suma simetričnih i antisimetričnih matrica.

(d) Svaka se kvadratna matrica može na jedinstven način prikazati kao suma simetrične i antisimetrične matrice. Konkretno, vrijedi

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

(e) Produkt dvije simetrične (antisimetrične) matrice ne mora biti simetrična (antisimetrična) matrica.

Produkt dvije simetrične matrice A, B je simetrična matrica ako i samo ako je $AB = BA$.

Produkt dvije antisimetrične matrice A, B je antisimetrična matrica ako i samo ako je $AB = -BA$.

(f) Za bilo koji $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ matrice $AA^T \in M_m(\mathbb{F})$ i $A^T A \in M_n(\mathbb{F})$ su simetrične.

(g) Ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$ simetrična (antisimetrična) matrica, tada je to i produkt $T^T AT$, za svaki $T \in M_n(\mathbb{F})$.

Rješenje

(a) znamo

(b) znamo

(c) znamo

(d) znamo

(e) Produkt dvije simetrične matrice ne mora biti simetrična matrica:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$.
Produkt dvije simetrične matrice A, B je simetrična matrica ako i samo ako vrijedi $BA = AB$: Vidi se iz računa:

$$(AB)^T = B^T A^T = BA.$$

Produkt dvije antisimetrične matrice ne mora biti antisimetrična matrica:
$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.
Produkt dvije antisimetrične matrice A, B je antisimetrična matrica ako i samo ako vrijedi $BA = -AB$: Vidi se iz računa:

$$(AB)^T = B^T A^T = (-B)(-A) = BA.$$

(f) DZ

(g) DZ

$\square$

Zadatak 3.10. (a) Hermitske matrice reda n <u>ne</u> čine *kompleksan* potprostor od $M_n(\mathbb{C})$, ali čine realan.

(b) Antihermitske matrice reda n ne čine *kompleksan* potprostor od $M_n(\mathbb{C})$, ali čine realan.

(c) $M_n(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ je direktna suma hermitskih i antihermitskih matrica.

(d) Svaka se kvadratna matrica može na jedinstven način prikazati kao suma hermitske i antihermitske matrice.

(e) Produkt dvije hermitske (antihermitske) matrice ne mora biti hermitska (antihermitska) matrica.

Produkt dvije hermitske matrice A, B je hermitska matrica ako i samo ako je $AB = BA$.

Produkt dvije antihermitske matrice A, B je antihermitska matrica ako i samo ako je $AB = -BA$.

(f) Za bilo koji $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$ matrice $AA^* \in M_m(\mathbb{C})$ i $A^*A \in M_n(\mathbb{C})$ su simetrične.

(g) Ako je $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitska (antihermitska) matrica, tada je to i produkt T^*AT, za svaki $T \in M_n(\mathbb{C})$.

Rješenje

(a) Primijetimo da je $A = A^* \Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Posebno je $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ pa je dijagonala realna. Dakle, hermitske matrice ne čine kompleksan potprostor.

Čine realan potprostor jer za A, B hermitske i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^* = \alpha A + \beta B.$$

Dimenzija tog potprostora je $n + 2(n-1+n-2+\ldots+1) = n^2$.

(b) Primijetimo da je $-A = A^* \Leftrightarrow -a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Posebno je $-a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ pa je dijagonala čisto imaginarna. Dakle, antihermitske matrice ne čine kompleksan potprostor.

Čine realan potprostor jer za A, B antihermitske i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^* = \alpha(-A) + \beta(-B) = -(\alpha A + \beta B).$$

Dimenzija tog potprostora je $n + 2(n-1+n-2+\ldots+1) = n^2$ (isto kao za hermitske).

(c) Svaka se kvadratna matrica može prikazati kao suma hermitske i antihermitske matrice:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*)$$

a jedina matrica koja je i hermitska i antihermitska je nul-matrica. Moglo se i drukčije, npr. uspoređivanjem dimenzija.

(d) iz prethodnog

(e) npr. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

npr. $C = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 2i & i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} i & 3i \\ 3i & i \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$.

ostatak za DZ

(f) DZ

(g) DZ

Zadatak 3.11. Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ **dijagonalna** ako je $a_{ij} = 0$, $i \neq j$. Skup svih dijagonalnih matrica je potprostor od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzije n. Dapače, on je i algebra, i to komutativna, asocijativna algebra s jedinicom.

Rješenje Neka je $A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $B = \operatorname{diag}(b_{11}, \ldots, b_{nn})$. Tada je

$$\alpha A + \beta B = \operatorname{diag}(\alpha a_{11} + \beta b_{11}, \ldots, \alpha a_{nn} + \beta b_{nn}).$$

Baza tog prostora je $\{E_{ii} : i = 1, \ldots, n\}$.

Također je

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ii} \delta_{ik} b_{jj} \delta_{kj} = \begin{cases} a_{ii} b_{ii}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Stoga je $AB = \operatorname{diag}(a_{11} b_{11}, \ldots, a_{nn} b_{nn})$.

Asocijativnost množenja, kvaziasocijativnost i distributivnosti naslijeđene su iz $M_n(\mathbb{F})$. Također je $I = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$ i vrijedi $AI = IA = A$. Očito je

$$BA = \operatorname{diag}(b_{11} a_{11}, \ldots, b_{nn} a_{nn}) = \operatorname{diag}(a_{11} b_{11}, \ldots, a_{nn} b_{nn}) = AB.$$

$\square$

DZ 3.5. Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ **skalarna** ako je $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Skup svih skalarnih matrica je potprostor od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzije 1. Dapače, on je i algebra, i to komutativna, asocijativna s jedinicom.

Definicija 3.3. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **regularna** (**invertibilna**) ako postoji matrica $X \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $AX = XA = I$. Tada je X **inverzna matrica** ili **inverz** od A. Pišemo $X = A^{-1}$. Ako takva matrica X ne postoji, za A kažemo da je **singularna**.

Činjenice 3.4.

1. Ako A^{-1} postoji, jedinstvena je.
2. I je regularna, 0 je singularna.
3. Ako su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ regularne, tada je i AB regularna i vrijedi
$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. Regularne matrice s operacijom množenja čine grupu, oznaka $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ (opća linearna grupa reda n nad $\mathbb{F}$). Ta grupa nije komutativna.

Zadatak 3.12. Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ takva da je $\det A = ad - bc \neq 0$. Dokažite da je $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ i nađite A^{-1}.

Rješenje Neka je X takva da je $AX = I$. Tada je

$$AX = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_3 = 1 \\ cx_1 + dx_3 = 0 \\ ax_2 + bx_4 = 0 \\ cx_2 + dx_4 = 1 \end{cases}$$

Rješenje tog sustava je □

$$x_1 = \frac{d}{ad-bc}, \quad x_3 = \frac{-c}{ad-bc}, \quad x_2 = \frac{-b}{ad-bc}, \quad x_4 = \frac{a}{ad-bc}.$$

$$X = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Lako se provjeri da vrijedi i $XA = I$, pa je $X = A^{-1}$.

ZADATAK 3.13. Ako je $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, onda je i $A^T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ i $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.

RJEŠENJE Ako je A regularna, onda postoji X takva da je $AX = XA = I$. Ako transponiramo matrice u prethodnim jednakostima, dobivamo

$$X^T A^T = A^T X^T = I^T = I$$

pa je i A^T regularna. Iz gornjih jednakosti čitamo da je $\left(A^T\right)^{-1} = X^T = (A^{-1})^T$.

DZ 3.6. Dokažite da je svaka matrica oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$, regularna i nađite njen inverz.

DZ 3.7. Neka su $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$. Primjerom pokažite da $A + B$ ne mora biti regularna.

DZ 3.8. Neka je $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$. Dokažite da je $\alpha A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ i nađite $(\alpha A)^{-1}$.

DZ 3.9. Neka je $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$. Tada su $\overline{A}, A^* \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ i vrijedi

$$\overline{(A^{-1})} = \left(\overline{A}\right)^{-1}, \quad \left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}.$$

DZ 3.10. Za $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ i $p \in \mathbb{N}$ definiramo

$$A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p.$$

Dokažite da vrijedi

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q}, \quad (A^p)^q = A^{pq}, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

ZADATAK 3.14. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je **ortogonalna** ako je $A^T A = AA^T = I$. Očito je svaka ortogonalna matrica regularna i vrijedi $A^{-1} = A^T$. Dokažite da skup svih ortogonalnih matrica $O(n, \mathbb{F})$ čini multiplikativnu grupu.

RJEŠENJE Ako su $A, B \in O(n, \mathbb{F})$, onda je $AB \in O(n, \mathbb{F})$. Doista, inverz od AB je $B^T A^T = (AB)^T$. Asocijativnost je naslijeđena iz $GL(n, \mathbb{F})$. Jedinična matrica je ortogonalna. Inverz ortogonalne matrice je opet ortogonalna matrica jer $AA^T = A^T A = I$ povlači $\left(A^T\right)^{-1} A^{-1} = A^{-1}\left(A^T\right)^{-1} = I^{-1} = I$, tj.

$$\left(A^{-1}\right)^T A^{-1} = A^{-1}\left(A^{-1}\right)^T = I^{-1} = I.$$

PRIMJER 3.5. Primjer ortogonalne matrice $A \in O(2, \mathbb{R})$ je $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Provjerite!

ZADATAK 3.15. Neka je $A = (a_{ij}) \in O(n, \mathbb{F})$. Tada vrijedi

(a) $\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$.

(b) $\sum_{j=1}^n a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$.

Rješenje Iz $AA^T = I$ slijedi

$$\delta_{ik} = I_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} {A^T}_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj}.$$

Slično iz $A^T A = I$ slijedi

$$\delta_{ik} = I_{ik} = \sum_{j=1}^{n} {A^T}_{ij} A_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_{jk}.$$

Uoči: posebno za $i = k$ iz (a) dobivamo da je $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$. Za $i \neq k$ je $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} = 0$, tj. suma kvadrata elemenata nekog retka je 1, a suma produkata odgovarajućih elemenata dvaju različitih redaka je 0. Analogno za stupce iz (b). □

Definicija 3.6. Za matricu A kažemo da je **involutorna** ako je $A^2 = I$.

Očito je svaka involutorna matrica regularna i vrijedi $A^{-1} = A$.

Zadatak 3.16. Dokažite da ako matrica A ima bilo koje od sljedeća dva svojstva:

(1) A je simetrična,

(2) A je ortogonalna,

(3) A je involutorna,

onda ima i treće.

Rješenje

$(1), (2) \Rightarrow (3)$: Ako je $A = A^T$ i $AA^T = A^T A = I$, onda je $A^2 = I$.

$(1), (3) \Rightarrow (2)$: Ako je $A = A^T$ i $A^2 = I$, onda je $I = A^2 = AA^T = A^T A$.

$(2), (3) \Rightarrow (1)$: Ako je $AA^T = A^T A = I$ i $AA = I$, iz jedinstvenosti inverza dobivamo da je $A^{-1} = A^T = A$ pa je $A = A^T$.

□

DZ 3.11. Za matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je **unitarna** ako vrijedi

$$AA^* = A^* A = I.$$

Unitarna matrica je regularna i vrijedi $A^{-1} = A^*$. Dokažite da skup svih unitarnih matrica $U(n)$ čini multiplikativnu grupu.

DZ 3.12. Neka je $A = (a_{ij}) \in U(n)$. Dokažite:

(a) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{a_{kj}} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$.

(b) $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \overline{a_{jk}} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$.

Zadatak 3.17. Dokažite da ako matrica A ima bilo koje od sljedeća dva svojstva:

(1) A je realna,

(2) A je ortogonalna,

(3) A je unitarna,

onda ima i treće.

DZ 3.13. Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ **idempotentna** ako je $A^2 = A$. Pokažite da je idempotentna matrica regularna ako i samo ako je jedinična.

DZ 3.14. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ takve da je $2A - B = I$. Dokažite da je matrica A idempotentna ako i samo ako je B involutorna.

RJEŠENJE Ako je $A^2 = A$, onda imamo

$$\begin{aligned} 2A &= I + B \,/^2 \\ 4A^2 &= I + 2B + B^2 \\ 4A - 2B &= I + B^2 \\ 2I &= I + B^2 \\ B^2 &= I. \end{aligned}$$

Ako je $B^2 = I$, onda

$$\begin{aligned} B &= 2A - I \,/^2 \\ \cancel{B^2} &= 4A^2 - 4A + \cancel{I} \\ 4A^2 &= 4A \\ A^2 &= A. \end{aligned}$$

DZ 3.15. Dokažite da je inverz simetrične matrice (ako postoji) simetrična matrica.

DZ 3.16. Ako je matrica A^2 regularna, je li i A regularna?

RJEŠENJE Neka je X takva da je $A^2X = XA^2 = I$. Ove jednakosti možemo zapisati i kao

$$A(AX) = (XA)A = I.$$

Da bi pokazali da je A regularna, dovoljno nam je provjeriti da je $AX = XA$, što slijedi iz

$$AX = I \cdot AX = (XA^2)AX = XA(A^2X) = XA \cdot I = XA.$$

DZ 3.17. Ovisno o $n \in \mathbb{N}$: ako je matrica A^n regularna, je li i A regularna?

DZ 3.18. Neka su $A, B \in M_n$ takve da vrijedi $A + B + AB = 0$. Dokažite da tada matrice A i B komutiraju.

DZ 3.19.