Poglavlje 4

Determinante

Definicija 4.1. Definiramo **determinantu** matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ kao

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}.$$

Posebno za $n = 2$ je

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

a za $n = 3$ je

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

što možemo pamtiti pomoću *Sarrusovog pravila*:

$$\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

Napomenimo da Sarrusovo pravilo vrijedi samo za matrice reda 3, za matrice višeg reda nemamo čak ni dobar broj sumanada u formuli za determinantu!

Primjer 4.2. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje Pomoću Sarrusovog pravila: $\det = 18 + 2 + 60 - 9 - 15 - 16 = 40.$ □

Zbog kompliciranosti računanja determinante po definiciji, koristimo sljedeća svojstva:

Činjenice 4.3.

1. $\det A = \det A^T$, $\det \overline{A} = \overline{\det A}$.
2. Ako je matrica B dobivena iz matrice A zamjenom bilo koja dva retka ili stupca, onda je $\det B = -\det A$.
3. Ako je matrica B dobivena iz matrice A množenjem jednog retka ili stupca skalarom $\lambda \in \mathbb{F}$, onda je $\det B = \lambda \det A$.

4. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

5. Ako matrica A ima bilo koja dva retka (stupca) proporcionalna, onda je $\det A = 0$.

6. Neka su $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ matrice sa svojstvom da je za neki redak $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$
$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + b_{ij}, & i = k \\ a_{ij} = b_{ij}, & i \neq k \end{cases}, \quad j = 1, \ldots, n,$$
onda je $\det C = \det A + \det B$.

7. (analogno za stupce)
$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + b_{ij}, & j = k \\ a_{ij} = b_{ij}, & j \neq k \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Tada je $\det C = \det A + \det B$.

8. Ako A ima nulredak ili nulstupac, onda je $\det A = 0$.

9. Općenito $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

10. Ako je matrica B dobivena iz matrice A dodavanjem nekom retku (stupcu) matrice A linearne kombinacije ostalih redaka (stupaca) matrice A, onda je $\det B = \det A$.

11. Ako je neki redak (stupac) matrice A jednak linearnoj kombinaciji preostalih redaka (stupaca) matrice A, onda je $\det A = 0$.

12. $\det I = 1$.

13.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Ukratko: pri računanju determinante koristimo **elementarne transformacije** nad matricom A:

1. Zamjena dva retka (stupca) u A,

2. Množenje nekog retka (stupca) u A skalarom $\lambda \neq 0$,

3. Pribrajanje s–tom retku (stupcu) u A r–tog retka (stupca) od A pomnoženog s $\lambda \in \mathbb{F}$.

Zadatak 4.1. Ponovo izračunajte:
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{I \leftrightarrow III}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{I\cdot(-5)+II \\ I\cdot(-2)+III}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -17 & -13 \\ 0 & -7 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{II\cdot(-1) \\ III\cdot(-1) \\ II \leftrightarrow III}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 17 & 13 \end{vmatrix} \overset{\substack{III\cdot 7 \\ II\cdot(-17)+III}}{=} \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 40 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \cdot (1 \cdot 7 \cdot 40) = 40$$

□

Napomena 4.4. Površina paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}, \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} \in V^2(O)$ je dana sa

$$P = |\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}| = |a_1b_2 - a_2b_1|.$$

Zadatak 4.2. Odredite površinu paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}, \vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \in V^2(O)$.

Rješenje

$$P = |\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}| = |1 \cdot 4 - 2 \cdot 3| = 2$$

□

Napomena 4.5. Volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}, \vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} \in V^3(O)$ je dan sa

$$V = |\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}|.$$

Zadatak 4.3. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da je volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + \lambda\vec{k}, \vec{c} = \vec{j} + \vec{k} \in V^3(O)$ jednak 2.

Rješenje Imamo

$$2 = |\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}| = |0 + 0 + 0 - 0 - \lambda - 1| = |\lambda + 1|.$$

Dakle $\lambda + 1 = \pm 2$, pa je $\lambda = 1$ ili $\lambda = -3$. □

4.1 Laplaceov razvoj determinante

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geq 2$. Tada je

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad \forall j = 1, \ldots, n, \tag{4.2}$$

gdje je $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, a Δ_{ij} je determinanta matrice $(n-1)$–og reda koja nastaje uklanjanjem i–tog retka i j–tog stupca iz originalne matrice A.

Jednakost (4.1) se zove **Laplaceov razvoj po i–tom retku**, a (4.2) se zove **Laplaceov razvoj po j–tom stupcu**. Determinanta Δ_{ij} se naziva **subdeterminanta** ili **minora** matrice A određena elementom a_{ij}. Broj A_{ij} se naziva **algebarski komplement** ili **kofaktor** elementa a_{ij} matrice A.

ZADATAK 4.4. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

razvojem po prvom retku.

RJEŠENJE

$$\begin{vmatrix} 4^+ & -3^- & 5^+ \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 66 + 3 \cdot (-23) + 5 \cdot (-19) = 100.$$

ZADATAK 4.5. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

razvojem po drugom stupcu.

RJEŠENJE

$$\begin{vmatrix} a & b^- & c \\ c & a^+ & b \\ b & c^- & a \end{vmatrix} = -b\begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = -b(ca-b^2)+a(a^2-bc)-c(ab-c^2) = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

DZ 4.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1$$

DZ 4.2.

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = abc + x(ab+ac+bc)$$

DZ 4.3.

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd$$

DZ 4.4.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & c & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix} = xyzuv$$

DZ 4.5.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

DZ 4.6. Neka su $x, y, z \neq 0$. Dokažite bez računanja determinanti

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Kao poseban slučaj se može raspisati kad je bilo koji od x, y, z jednak 0. Slijedi rješenje za slučaj $x, y, z \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{II\cdot(yz) \\ III\cdot(xz) \\ IV\cdot(xy)}}{=} \frac{1}{x^2y^2z^2}\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ xyz & 0 & yz^2 & y^2z \\ xyz & xz^2 & 0 & x^2z \\ xyz & xy^2 & x^2y & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{I:(xyz) \\ II:x \\ III:y \\ IV:z}}{=} \frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

DZ 4.7. Neka je S skup svih matrica reda n koje sadrže samo 0 ili 1. Dokažite da je prosječna vrijednost determinante matrice za taj skup jednaka 0, odnosno

$$\frac{1}{|S|}\sum_{A\in S}\det A = 0.$$

DZ 4.8. Neka je $A \in M_n$ matrica koja sadrži samo -1 ili 1. Dokažite da 2^{n-1} dijeli $\det A$.

DZ 4.9. Sami si zadavati determinante i provjeravati na www.wolframalpha.com.

4.2 Metode računanja determinanti n–tog reda

4.2.1 Svođenje na trokutasti oblik

Zadatak 4.6. Izračunajte:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Rješenje Prvi redak pomnožen s -1 ćemo dodati svim ostalima.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = \text{gornjetrokutasti oblik} = (-1)^{n-1}.$$

□

Zadatak 4.7. Izračunajte:

$$D(a_1,\dots,a_n;x) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Rješenje Ako su neka dva od $a_1,\dots,a_n$ jednaka x, onda matrica ima dva jednaka retka pa je njena determinanta 0. Ako je $a_k = x$, za samo jedan k, pretpostavimo da je to a_1 pa imamo

$$D(x,a_2,\dots,a_n;x) = \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} \underset{\text{dodajemo svim ostalima}}{\overset{\text{prvi redak pomnožen s -1}}{=}} \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ 0 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}$$

$$= x(a_2-x)(a_3-x)\cdots(a_n-x).$$

Analogno

$$D(a_1,\dots,a_{k-1},x,a_{k+1},\dots,a_n;x)=(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_{k-1}-x)x(a_{k+1}-x)\cdots(a_n-x).$$

Ako je $a_i \neq x$, za sve $i=1,\dots,n$, onda imamo

$$\begin{aligned}
D(a_1,\dots,a_n;x) &= \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} \underset{\text{dodajemo svim ostalima}}{\overset{\text{prvi redak pomnožen s -1}}{=}} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix} \underset{\text{iz } k\text{–tog stupca}}{\overset{\text{izlučimo } a_k-x}{=}} \\
&= \prod_{k=1}^{n}(a_k-x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{prvom stupcu}}{\overset{\text{sve stupce dodamo}}{=}} \\
&= \prod_{k=1}^{n}(a_k-x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x}+x\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \prod_{k=1}^{n}(a_k-x)\left(\frac{a_1}{a_1-x}+x\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k-x}\right).
\end{aligned}$$

ZADATAK 4.8. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{svakom drugom}}{\overset{\text{prvi redak dodamo}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = n!.$$

ZADATAK 4.9. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Primijetimo da je ovaj zadatak specijalni slučaj Zadatka 4.7 pa uvrštavanjem u formulu koju smo tamo izveli dobivamo:

$$D_n = \prod_{k=1}^{n} (3-2) \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3-2}\right) = 2n+1.$$

No, riješit ćemo zadatak i direktno:

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix}\text{prvi redak oduzmemo} \\ \text{od ostalih}\end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix}\text{prvom stupcu dodamo} \\ \text{preostale stupce}\end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3+(n-1)2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2(n-1) = 2n+1.$$

□

ZADATAK 4.10. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE Računamo po definiciji:

$$D_n = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$$

Od cijele sume ostaje jedino sumand pridružen permutaciji $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ koja ima $I(p) = n-1+n-2+\ldots+2+1 = \frac{(n-1)n}{2}$ inverzija:

$$D_n = (-1)^{I(p)} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n. \tag{4.3}$$

Determinantu smo mogli izračunati i tako da je svedemo na dijagonalni oblik pomoću zamjena stupaca (prvog i zadnjeg, drugog i predzadnjeg, itd...). Takvih zamjena treba napraviti $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pa je

$$D_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

Uvjerite se da je to jednako kao i (4.3). □

ZADATAK 4.11. Izračunajte determinantu matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ako je $a_{ij} = \min\{i, j\}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

RJEŠENJE

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{prvi redak pomnožen s (-k)} \\ \text{dodajemo } k\text{-tom retku}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 2-n & 3-n & 4-n & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{razvijemo po} \\ \text{zadnjem stupcu}}}{=} (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -3 & -2 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 2-n & 3-n & \ldots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = 1.$$

ZADATAK 4.12. Izračunajte determinantu matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ ako je $a_{ij} = |i - j|$, $i, j = 1, \ldots, n$.

RJEŠENJE Uočimo da je

$$|i - j| = \begin{cases} i - j, & i > j \text{ (donji trokut matrice } A) \\ 0, & i = j \text{ (dijagonala matrice } A) \\ j - i, & i < j \text{ (gornji trokut matrice } A) \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & n-5 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{dodajemo preostalima}}{\overset{\text{zadnji stupac}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-3 & n-1 \\ n-1 & n-2 & n-1 & n & \dots & 2n-5 & n-2 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-2 & \dots & 2n-7 & n-3 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 2n-9 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{izlučimo } n-1}{\overset{\text{iz prvog stupca}}{=}}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-3 & n-1 \\ 1 & n-2 & n-1 & n & \dots & 2n-5 & n-2 \\ 1 & n-2 & n-3 & n-2 & \dots & 2n-7 & n-3 \\ 1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 2n-9 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{dodajemo } k\text{–tom stupcu}}{\overset{\text{prvi stupac pomnožen s } n-k}{=}}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n-4 & n-1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & \dots & 2n-6 & n-2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2n-8 & n-3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-10 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{zadnjem retku}}{\overset{\text{razvijemo po}}{=}}$$

$$= (-1)^{n+1}(n-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & \dots & 2n-4 & n-1 \\ 0 & 2 & 4 & \dots & 2n-6 & n-2 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2n-8 & n-3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-10 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(n-1)\cdot 2^{n-2}.$$

□

Zadatak 4.13. Neka su $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ proizvoljni brojevi. Izračunajte tzv. **Vandermondeovu**[1]

[1] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796)

determinantu:

$$D(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$D(a_1,\dots,a_n) \underset{\substack{\text{poništimo prvi stupac}\\ \text{ispod dijagonale}\\ \text{najprije množimo } (n-1) \text{ redak}\\ \text{s } -a_1 \text{ i dodajemo zadnjem}}}{=}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{množimo } (n-2) \text{ redak s } -a_1\\ \text{i dodajemo predzadnjem}}}{=}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \dots & a_{n-3}^{n-2} & a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2-a_1) & a_3^{n-3}(a_2-a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-3}(a_2-a_1) & a_n^{n-3}(a_2-a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{postupak ponavljamo dok ne}\\ \text{poništimo 1. stupac ispod dijagonale}}}{=}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_{n-1}-a_1 & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \dots & a_{n-1}(a_{n-1}-a_1) & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-4}(a_2-a_1) & a_3^{n-4}(a_3-a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-4}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-4}(a_n-a_1) \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2-a_1) & a_3^{n-3}(a_3-a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-3}(a_n-a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_1) & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{razvijemo determinantu po prvom stupcu}\\ \text{i iz } k\text{–tog stupca izlučimo faktor } a_k-a_1,\ \forall k\geq 2}}{=}$$

$$=\prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \dots & a_{n-1}^{n-3} & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \end{vmatrix}=\prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)D(a_2,\dots,a_n).$$

Dobili smo determinantu istog tipa kao i početnu pa i kod nje radimo isti postupak. Dobivamo

$$\begin{aligned} D(a_1,\dots,a_n) &= \prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\prod_{k=3}^{n}(a_k-a_2)D(a_3,\dots,a_n) \\ &= \dots = \prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\prod_{k=3}^{n}(a_k-a_2)\cdots\prod_{k=n-1}^{n}(a_k-a_{n-2})\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \\ &= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n}(a_j-a_i). \end{aligned}$$

Očito je $D=0$ ako i samo ako je $a_i=a_j$, za neke $i\neq j$. □

DZ 4.10. Izračunajte determinantu matrice $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ ako je $a_{ij}=\max\{i,j\}$, $i,j=1,\dots,n$.

DZ 4.11. Izračunajte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}n.$$

4.2.2 Metoda rekurzivnih relacija

Ideja ove metoda je da se determinanta n–tog reda, razvojem po nekom retku ili stupcu, zapiše kao linearna kombinacija determinanti reda $n-1$ i $n-2$ istog oblika.

Neka je $D_n\in\mathbb{F}$ determinanta n–tog reda, $n>2$, i neka su $D_{n-1},D_{n-2}\in\mathbb{F}$ determinante $(n-1)$ i $(n-2)$ reda, ali istog oblika kao D_n. Pretpostavimo da je

$$D_n = pD_{n-1}+qD_{n-2}, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{4.4}$$

gdje su p,q konstante neovisne o n. Razlikujemo dva slučaja.

1. $q=0$

   Tada je $D_n=pD_{n-1}$ pa je
   $$D_n = pD_{n-1} = p^2D_{n-2} = \dots = p^{n-2}D_2.$$
   U ovom slučaju je niz determinanti (D_n) zapravo geometrijski niz s kvocijentom p.

2. $q\neq 0$

   Za ovaj slučaj pogledajmo karakterističnu jednadžbu rekurzivne relacije
   $$D_n - pD_{n-1} - qD_{n-2} = 0.$$
   To je kvadratna jednadžba $x^2-px-q=0$. Neka su α,β njeni korijeni. Prema Vièteovim formulama je
   $$\alpha+\beta=p, \quad \alpha\beta=-q.$$
   Sada relaciju (4.4) možemo pisati na dva načina
   $$D_n-\beta D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1}-\beta D_{n-2}\right), \tag{4.5}$$
   $$D_n-\alpha D_{n-1} = \beta\left(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}\right). \tag{4.6}$$
   Razlikujemo dva slučaja:

(a) $\alpha \neq \beta$
Iteriranjem jednadžbi (4.5) i (4.6) dobivamo

$$\begin{aligned} D_n - \beta D_{n-1} &= \alpha\left(D_{n-1} - \beta D_{n-2}\right) = \alpha^2\left(D_{n-2} - \beta D_{n-3}\right) = \ldots = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \beta D_1\right), \\ D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right) = \beta^2\left(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}\right) = \ldots = \beta^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right). \end{aligned}$$

Dobili smo jednadžbe

$$\begin{aligned} D_n - \beta D_{n-1} &= \alpha^{n-2}\left(D_2 - \beta D_1\right), \\ D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right). \end{aligned}$$

Prvu jednadžbu pomnožimo s α, drugu s $-\beta$ pa ih zbrojimo:

$$(\alpha - \beta)D_n = \alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1).$$

Jer je $\alpha \neq \beta$, možemo pisati

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)}{\alpha - \beta},$$

odnosno

$$D_n = \underbrace{\frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)}}_{=C_1}\alpha^n + \underbrace{\frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\beta - \alpha)}}_{=C_2}\beta^n, \quad n \geq 2. \tag{4.7}$$

(b) $\alpha = \beta$
Sada su (4.5) i (4.6) jedna te ista relacija

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right), \quad n \geq 2, \tag{4.8}$$

pa je

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right) = \alpha^2\left(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}\right) = \ldots = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right).$$

Dakle,

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right). \tag{4.9}$$

Ta relacija vrijedi i za D_{n-1} pa je

$$D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = \alpha^{n-3}\left(D_2 - \alpha D_1\right),$$

tj. $D_{n-1} = \alpha^{n-3}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha D_{n-2}$. Uvrstimo u (4.9) i dobivamo:

$$D_n = \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^2 D_{n-2} + \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) = 2\alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^2 D_{n-2}. \tag{4.10}$$

Ako u (4.9) umjesto n stavimo $n-2$, dobivamo

$$D_{n-2} - \alpha D_{n-3} = \alpha^{n-4}\left(D_2 - \alpha D_1\right)$$

pa je $D_{n-2} = \alpha^{n-4}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha D_{n-3}$. Ovo uvrstimo u (4.10):

$$D_n = 2\alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^3 D_{n-3}.$$

Postupak ponavljamo i na kraju dobivamo

$$D_n = (n-1)\alpha^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) + \alpha^{n-1} D_1. \tag{4.11}$$

NAPOMENA 4.6. Primijetimo da ako su $p, q, D_1, D_2 \in S$, gdje je $S \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, tada je i $D_n \in S$.

ZADATAK 4.14. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE

$$\begin{aligned} D_n &= \substack{\text{razvijemo determinantu} \\ \text{po prvom stupcu}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \substack{\text{razvijemo drugu determinantu} \\ \text{po prvom retku}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= D_{n-1} + D_{n-2}. \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba ove rekurzivne relacije je $x^2 - x - 1 = 0$. Njeni korijeni su

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Kako je $D_1 = |1| = 1$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ i $\alpha \neq \beta$, iz (4.7) dobivamo

$$\begin{aligned} D_n &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot 1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot 1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}(-\sqrt{5})} \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Uočimo da je, iako se možda ne bi reklo iz ovog izraza, $D_n \in \mathbb{N}$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

NAPOMENA 4.7. Ne moramo znati točnu formulu da bismo odredili D_n, već je dovoljno samo znati da je ona oblika $D_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ (ili $D_n = A \cdot \alpha^n + Bn \cdot \alpha^{n-1}$ ako je $\alpha = \beta$) pa onda uvrštavanjem konkretnih vrijednosti determinanti D_1 i D_2 za $n = 1, 2$ (ako to ima smisla) dobijemo 2×2 sustav iz kojeg kao nepoznanice dobijemo konstante A i B. Ako iz nekog razloga ne možemo uvrstiti D_1 ili D_2, onda krenemo od najmanjeg n za kojeg vrijednosti D_n i D_{n+1} imaju smisla. Također primijetite da formulu $D_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ možemo zapisati i u nekom drugom obliku koji vodi na jednostavniji sustav. Na primjer, ako je $D_n = A \cdot \alpha^{n-1} + B \cdot \beta^{n-1}$, uvrštavanjem D_n za $n = 1, 2$ dobivamo sustav

$$\begin{cases} A + B = D_1 \\ \alpha A + \beta B = D_2 \end{cases}.$$

DZ 4.12. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$D_n \underset{\text{po prvom retku}}{\overset{\text{razvijemo determinantu}}{=}} 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix} - \frac{7}{2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{po prvom stupcu}}{\overset{\text{razvijemo drugu determinantu}}{=}} 5\tilde{D}_{n-1} - \frac{7}{2} \cdot 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\tilde{D}_{n-1} - 14\tilde{D}_{n-2}.$$

Sad ćemo izračunati $\tilde{D}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\tilde{D}_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{po prvom stupcu}}{\overset{\text{razvijemo determinantu}}{=}} 3\tilde{D}_{n-1} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{po prvom retku}}{\overset{\text{razvijemo drugu determinantu}}{=}} 3\tilde{D}_{n-1} - 2\tilde{D}_{n-2}.$$

Karakteristična jednadžba ove rekurzivne relacije je $x^2 - 3x + 2 = 0$. Njeni korijeni su $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

Kako je $\tilde{D}_1 = |3| = 3$, $\tilde{D}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$ i $\alpha \neq \beta$, iz (4.7) dobivamo

$$D_n = \frac{1^n(7 - 2 \cdot 3)}{1(1-2)} + \frac{2^n(7 - 1 \cdot 3)}{2(2-1)} = 2^{n+1} - 1.$$

Konačno,

$$D_n = 5\left(2^n - 1\right) - 14\left(2^{n-1} - 1\right) = 9 - 2^{n+1}.$$

$\square$

Zadatak 4.15. Izračunajte:

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$D_{2n} = \substack{\text{razvijemo po} \\ \text{prvom stupcu}} = a\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} b \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \substack{\text{obje determinate razvijemo} \\ \text{po zadnjem stupcu}} = a^2 D_{2(n-1)} - (-1)^{2n} b^2 D_{2(n-1)} = (a^2 - b^2) D_{2(n-1)}$$
$$= \left(a^2 - b^2\right)^2 D_{2(n-2)} = \dots = \left(a^2 - b^2\right)^{n-1} D_2 = \left(a^2 - b^2\right)^n.$$

$\square$

Zadatak 4.16. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$D_n = \substack{\text{razvoj po} \\ \text{prvom retku}} = n\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$
$$= nx^{n-1} + D_{n-1} = \substack{\text{rekurzivno} \\ \text{dalje}} = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + D_{n-2}$$
$$= \dots = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 3x^2 + D_2$$
$$= \sum_{k=3}^{n} kx^{k-1} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \sum_{k=3}^{n} kx^{k-1} + 2x + 1 = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

Posljednji izraz možemo zapisati i bez sumacije ako se poslužimo derivacijama:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)' = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Naravno, prethodni izraz nema smisla za $x = 1$ pa za tu vrijednost determinantu računamo kao $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 1^{k-1} = \frac{n(n+1)}{2}$.

DZ 4.13. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

Rješenje Razvoj po prvom retku pa po prvom stupcu pa je

$$D_n = -D_{n-2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ paran} \\ 0, & n \text{ neparan} \end{cases}.$$

DZ 4.14. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

Rješenje Ako je n paran, onda 2., 4., …, n. redak pomnožen s -1 dodajemo prvom i dobijemo nulredak pa je $\det D_{2k} = 0$.

Ako je n neparan, onda istim postupkom dobijemo gornjetrokutasti oblik i $\det D_{2k+1} = 1$.

DZ 4.15. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

Rješenje Determinantu razvijemo po prvom stupcu i dobijemo

$$D_n = D_{n-1} - 2D_{n-1} = -D_{n-1}$$

pa je $D_n = (-1)^{n-1}$.

Zadatak 4.17. Izračunajte:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a \end{vmatrix},$$

ako je $x \neq y$.

RJEŠENJE Koristimo se trikom pomoću kojeg ćemo D_n izraziti na dva načina.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a-y+y \end{vmatrix} = {\scriptsize\begin{matrix}\text{rastavimo determinantu}\\ \text{po zadnjem retku}\end{matrix}} = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ y & y & y & \dots & y & y \end{vmatrix}$$

$$= {\scriptsize\begin{matrix}\text{prvu determinantu razvijemo po zadnjem retku,}\\ \text{a u drugoj izlučimo } y \text{ iz zadnjeg retka}\end{matrix}} = (a-y)D_{n-1} + y \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= {\scriptsize\begin{matrix}\text{poništimo gornji trokut množeći}\\ \text{zadnji redak s } -x\end{matrix}} = (a-y)D_{n-1} + y \begin{vmatrix} a-x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y-x & a-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y-x & y-x & a-x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y-x & y-x & y-x & \dots & a-x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-y)D_{n-1} + y(a-x)^{n-1}.$$

Sad drugi način.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a-x+x \end{vmatrix} = {\scriptsize\begin{matrix}\text{rastavimo determinantu}\\ \text{po zadnjem retku}\end{matrix}} = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ y & a & x & \dots & x & x \\ y & y & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & x \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}$$

$$= {\scriptsize\begin{matrix}\text{prvu determinantu razvijemo po zadnjem retku,}\\ \text{a u drugoj izlučimo } x \text{ iz zadnjeg stupca}\end{matrix}} = (a-x)D_{n-1} + x \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x & 1 \\ y & a & x & \dots & x & 1 \\ y & y & a & \dots & x & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & a & 1 \\ y & y & y & \dots & y & 1 \end{vmatrix}$$

$$= {\scriptsize\begin{matrix}\text{poništimo donji trokut množeći}\\ \text{zadnji stupac s } -y\end{matrix}} = (a-x)D_{n-1} + x \begin{vmatrix} a-y & x-y & x-y & \dots & x-y & 1 \\ 0 & a-y & x-y & \dots & x-y & 1 \\ 0 & 0 & a-y & \dots & x-y & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)D_{n-1} + x(a-y)^{n-1}.$$

Dobili smo

$$\begin{aligned} D_n &= (a-y)D_{n-1} + y(a-x)^{n-1}, \\ D_n &= (a-x)D_{n-1} + x(a-y)^{n-1}. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu relaciju s $a-x$, drugu s $-(a-y)$ pa zbrojimo i dobivamo

$$[(a-x)-(a-y)]\, D_n = (a-x)^n y - (a-y)^n x,$$

tj.

$$D_n = \frac{y(a-x)^n - x(a-y)^n}{y-x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ako je $x = y$, onda je ovo Zadatak 4.7.

DZ 4.16. Izračunajte:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ b & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ b^2 & b & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \substack{\text{drugi redak pomnožen s } -a \\ \text{dodamo prvom retku}} = \begin{vmatrix} 1-ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ b^2 & b & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ &= \substack{\text{treći redak pomnožen s } -a \\ \text{dodamo drugom retku}} = \begin{vmatrix} 1-ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b-b^2a & 1-ab & 0 & \dots & 0 \\ b^2 & b & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ &= \substack{\text{postupak} \\ \text{ponavljamo}} = \begin{vmatrix} 1-ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b-b^2a & 1-ab & 0 & \dots & 0 \\ b^2-b^3a & b-b^2a & 1-ab & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = (1-ab)^n. \end{aligned}$$

DZ 4.17.

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} = (2n-1)(n-1)^{n-1}.$$

DZ 4.18.
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!.$$

DZ 4.19.
$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}}(n-2)!.$$

DZ 4.20.
$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n+1.$$

DZ 4.21.
$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(5^{n+1} - 2^{n+1}\right).$$

4.2.3 Binet–Cauchyjev teorem

ČINJENICE 4.8.

1. Prisjetimo se Laplaceovog razvoja
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$
gdje je $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ algebarski komplement elementa a_{ij}.

2. Vrijedi
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{il} = 0, \quad j \neq l \tag{4.12}$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0, \quad i \neq k \tag{4.13}$$

3. Za $A \in M_n(\mathbb{F})$, $n \geq 2$, definiramo **adjunktu**
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

gdje je A_{ij} algebarski komplement elementa a_{ij}.

4. Vrijedi
$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = (\det A)\, I. \tag{4.14}$$

5. Binet–Cauchyjev teorem: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, $A, B \in M_n(\mathbb{F})$.

6. Posljedice:
$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$$
$$A \text{ je regularna } \Leftrightarrow \det A \neq 0, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$

7. U dokazu Binet–Cauchyjevog teorema koristimo
$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B,$$
$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$
Na lijevoj strani su determinant blok–matrica, pri čemu su A i B kvadratne matrice, ne nužno istih redova.

Zadatak 4.18. Neka je A matrica reda 2.

1. Dokažite da vrijedi $A^2 - (\operatorname{Tr} A) \cdot A + (\det A) \cdot I = 0$.
2. Dokažite da je $A^2 = 0$ ako i samo ako je $\operatorname{Tr} A = \det A = 0$.
3. Provjerite je li skup $N = \{A \in \mathrm{M}_2 : A^2 = 0\}$ vektorski prostor.
4. Odredite bazu i dimenziju za linearnu ljusku $[N]$.

Rješenje

(b) Ako je $A^2 = 0$, tada prema Binet-Cauchyjevom teoremu slijedi $\det A = 0$. Sada iz $A^2 - (\operatorname{Tr} A) \cdot A + (\det A) \cdot I = 0$ slijedi $(\operatorname{Tr} A) \cdot A = 0$, pa je $\operatorname{Tr} A = 0$ ili $A = 0$, u oba slučaja je $\operatorname{Tr} A = 0$. Obrat slijedi direktno iz $A^2 - (\operatorname{Tr} A) \cdot A + (\det A) \cdot I = 0$.

(c) Ne, na primjer $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pripadaju skupu N, ali ne i njihov zbroj.

(d) Pokazuje se da je $[N]$ prostor svih matrica traga 0, pa je trodimenzionalan, a jednu bazu čine $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Zadatak 4.19. Nađite $\det \tilde{A}$ i $\widetilde{\left(\tilde{A}\right)}$, za regularnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Rješenje Iz (4.14) dobivamo

$$\det A \cdot \det \tilde{A} \overset{BC}{=} \det \left(A \cdot \tilde{A} \right) = \det \left((\det A)\, I \right) = (\det A)^n \det I = (\det A)^n$$

pa je $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$. Posebno je $\tilde{A}$ regularna ako je A regularna.

Nadalje,

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cdot \widetilde{\left(\tilde{A}\right)} &= \left(\det \tilde{A}\right) I = (\det A)^{n-1} I \quad / \cdot A \text{ (s lijeva)} \\ A \cdot \tilde{A} \cdot \widetilde{\left(\tilde{A}\right)} &= (\det A)^{n-1} A \\ \widetilde{\left(\tilde{A}\right)} &= (\det A)^{n-2} A. \end{aligned}$$

□

Zadatak 4.20. Dokažite da je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ regularna i odredite A^{-1}.

Rješenje Sjetimo se da je A regularna akko je $\det A \neq 0$. Ako $\det A$ razvijemo po trećem stupcu, odmah vidimo da je $\det A = 1 \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 4.21 (Posljedice Binet–Cauchyjevog teorema).

a) Za $A_1, A_2, \ldots, A_r \in M_n(\mathbb{F})$, $r \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\det (A_1 A_2 \cdots A_r) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdots \det A_r.$$

b) Za $A \in M_n(\mathbb{F})$ je $\det A^r = (\det A)^r$, $r \in \mathbb{N}$.

c) Za $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ je $\det AB = \det BA$.

d) Ako je $A \in O(n, \mathbb{F})$, onda je $\det A = \pm 1$.

e) Ako je $A \in U(n)$, onda je $|\det A| = 1$.

Rješenje

a) indukcijom po r

d) A je ortogonalna ako i samo ako je $AA^T = A^T A = I$ pa je

$$1 = \det I = \det \left(AA^T \right) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2.$$

e) A je unitarna ako i samo ako je $AA^* = A^* A = I$ pa je

$$1 = \det I = \det (AA^*) = \det A \cdot \det \overline{A^T} = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2.$$

□

Napomena 4.9. Tvrdnja za determinantu blok–trokutaste matrice indukcijom se proširuje i na proizvoljan broj blokova pa vrijedi:

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \det A_{11}\cdot\det A_{22}\cdots\det A_{nn} = \det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

pri čemu su A_{11}, A_{22}, $\dots$, A_{nn} kvadratni blokovi.

Zadatak 4.22. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ proizvoljna matrica. Nađite $\det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}$.

Rješenje Iskoristimo tvrdnju o determinanti blok–trokutastih matrica i način na koji se množe blok–matrice. Vrijedi

$$\det\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det I\cdot\det I = 1.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}\cdot 1 = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \overset{BC}{=} \det\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ A^2 & 0 \end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

jer matrica $\begin{pmatrix} A & 0 \\ A^2 & 0 \end{pmatrix}$ ima nulstupac.

Zadatak 4.23. Izračunajte $\det\begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix}$, gdje je D kvadratna matrica.

Rješenje Koristimo $\det\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det I\cdot\det I = 1$ pa je

$$\det\begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} \overset{BC}{=} \det\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & D-CB \end{pmatrix} = \det I\cdot\det(D-CB) = \det(D-CB).$$

DZ 4.22. Izračunajte $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix}$, gdje je A kvadratna matrica.

Rješenje Opet koristimo $\det\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix} = 1$ pa je

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix} \overset{BC}{=} \det\begin{pmatrix} A-BC & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = \det(A-BC)\cdot\det I = \det(A-BC).$$

Zadatak 4.24. Neka za matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $AB = BA$ te neka je A regularna. Odredite $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

RJEŠENJE Sjetimo se da je A regularna akko je $\det A \neq 0$ i primijetimo da je $\det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det A$. Stoga je

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det A} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \\
&\overset{BC}{=} \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & DA - CB \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det A} \cdot \det A \cdot \det(DA - CB) = \det(DA - CB).
\end{aligned}$$

□

DZ 4.23. Neka za matrice $A, C \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $AC = CA$ te neka je A regularna. Dokažite da je tada

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

Uputa: $\det A = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & A \end{pmatrix} \neq 0$. Matricu $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ s lijeva množimo s $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & A \end{pmatrix}$.

DZ 4.24. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B \in M_{nm}(\mathbb{F})$. Tada je

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

RJEŠENJE Krenimo od blok matrice

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}.$$

Ovu ćemo matricu transformirati na dva načina: dodavanjem drugog stupca blokova pomnoženog s B prvom, te dodavanjem prvog stupca blokova pomnoženog s $-A$ drugom. Dakle, imamo

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m + AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n + BA \end{pmatrix}.$$

Kako je

$$\det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = 1,$$

primjenom determinante na prethodne dvije jednakosti te Binet-Cauchyjevog teorema slijedi

$$\begin{aligned}
\det(I_m + AB) &= \det \begin{pmatrix} I_m + AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n + BA \end{pmatrix} \\
&= \det(I_n + BA).
\end{aligned}$$

□