Poglavlje 7

Sustavi linearnih jednadžbi

ČINJENICE 7.1.

1. Opći sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica nad poljem $\mathbb{F}$ je

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

   Skalari a_{ij} se zovu **koeficijenti sustava**, a $b_1, \ldots, b_m$ **slobodni koeficijenti**. **Rješenje sustava** je svaka uređena n–torka $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ za koju supstitucija $x_1 = \gamma_1, \ldots, x_n = \gamma_n$ zadovoljava sve jednakosti.

2. Matrični zapis sustava dan je s $AX = B$, gdje je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

   Prirodna identifikacija $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ je bijekcija skupa svih rješenja sustava na skup rješenja matrične jednadžbe.

3. Kod sustava nas zanimaju tri stvari:

   (1) Kada je sustav rješiv?

   (2) Opisati rješenje!

   (3) Naći metodu rješavanja!

   U nastavku ćemo odgovoriti na svaku od prethodnih točaka:

   (1)

Teorem 7.2 (Kronecker–Capelli). *Sustav je rješiv ako i samo ako je $r(A) = r(A_p)$, gdje je*

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Korolar 7.3. *Svaki homogen sustav $AX = 0$ je rješiv.*

(2) Skup svih rješenja homogenog sustava $AX = 0$ je vektorski prostor. Skup svih rješenja nehomogenog sustava $AX = B$ je linearna mnogostrukost

$$C_0 + \Omega = \{C_0 + C : C \in \Omega\},$$

gdje je C_0 bilo koje rješenje sustava $AX = B$, a Ω je prostor rješenja pridruženog homogenog sustava $AX = 0$.

Ako je $\{C_1, \dots, C_d\}$ baza za Ω (tzv. **fundamentalni skup rješenja**), tada je svako rješenje sustava $AX = B$ oblika

$$C_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i C_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{F}.$$

Pritom vrijedi $d = n - r$, gdje je $r = r(A)$.

(3) Metoda: Gaussova metoda eliminacije. Elementarnim transformacijama nad retcima matricu A_p svodimo na

$$A_p \sim \left(\begin{array}{cccccccc:c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{r,n} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Naime **nekih** r stupaca se može elementarnim transformacijama redaka dovesti do oblika kakav ima prvih r stupaca u gornjoj matrici. Naša pretpostavka kako je to slučaj upravo s prvih r stupaca ne predstavlja smanjenje općenitosti.

Ako je sustav rješiv, u zadnjem stupcu na mjestima $r + 1, \dots, m$ su nule. Vidimo da je jedno partikularno rješenje dano s

$$C_0 = (b'_1, \dots, b'_r, 0, \dots, 0).$$

Treba još naći bazu prostora rješenja pripadnog homogenog sustava. Iščitavamo je iz gornje matrice (uz $b'_1 = \dots = b'_r = 0$).

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(-a'_{1,r+1}, -a'_{2,r+1}, \dots, -a'_{r,r+1}, 1, 0, \dots, 0\right) \\ C_2 &= \left(-a'_{1,r+2}, -a'_{2,r+2}, \dots, -a'_{r,r+2}, 0, 1, \dots, 0\right) \\ &\vdots \\ C_{n-r} &= \left(-a'_{1,n}, -a'_{2,n}, \dots, -a'_{r,n}, 0, 0, \dots, 1\right). \end{aligned}$$

ZADATAK 7.1. Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ matrica ranga r. Ako za matricu $B \in M_{np}(\mathbb{R})$ vrijedi $AB = 0$, dokažite da je $r(B) \leq n - r$.
(Uputa: Promatrajte stupce matrice B.)

RJEŠENJE Neka su $S_1, \ldots, S_p$ stupci matrice B. Iz $AB = 0$ slijedi $AS_1 = \ldots = AS_n = 0$, pa su stupci matrice B rješenja homogenog sustava $AX = 0$, dakle, pripadaju prostoru $\Omega = \{X \in M_{n1} : AX = 0\}$. Odavde slijedi $r(B) = \dim[\{S_1, \ldots, S_n\}] \leq \dim \Omega = n - r$. □

7.1 Cramerov sustav

Sustav je **Cramerov** ako je $m = n$ i matrica sustava A je regularna ($\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$). Cramerov sustav je uvijek rješiv i rješenje mu je $C = A^{-1}B$. Rješenje Cramerovog sustava možemo dobiti i kao

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

gdje je $D = \det A$, a D_i je determinanta matrice u kojoj je i–ti stupac B, a ostali su isti kao u matrici A.

ZADATAK 7.2. Riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \end{cases}$$

RJEŠENJE

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Sustav ima jedinstveno rješenje $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tj. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. □

ZADATAK 7.3. Neka je $n \geq 2$ i $A \in M_n$ regularna matrica. Za koji $B \in M_{n1}$ će rješenje sustava $AX = B$ biti jednako drugom stupcu matrice A^{-1}? Na ovaj način (bez računanja čitave matrice A^{-1}) odredite drugi stupac od A^{-1}, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje ...

Zadatak 7.4. Riješite sustav

$$\begin{cases} 105x_1 - 175x_2 - 315x_3 + 245x_4 = 84 \\ 90x_1 - 150x_2 - 270x_3 + 210x_4 = 72 \\ 75x_1 - 125x_2 - 225x_3 + 175x_4 = 59 \end{cases}$$

Rješenje

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc:c} 105 & -175 & -315 & 245 & 84 \\ 90 & -150 & -270 & 210 & 72 \\ 75 & -125 & -225 & 175 & 59 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 3 & -5 & -9 & 7 & \frac{12}{5} \\ 3 & -5 & -9 & 7 & \frac{12}{5} \\ 3 & -5 & -9 & 7 & \frac{59}{25} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 3 & -5 & -9 & 7 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{25} \end{array}\right).$$

Primijetimo da je $r(A) \neq r(A_p)$ pa sustav nema rješenja.

Zadatak 7.5. Riješite sustav

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Rješenje

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -7 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -13 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -7 & -2 & -1 \\ 1 & -13 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & -58 & -14 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & -13 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 29 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustav ima jedinstveno rješenje $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zadatak 7.6. Riješite sustav

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Rješenje

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 7 & 4 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 2 & -25 & -27 \\ 0 & 4 & -50 & -54 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 2 & -25 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posljednji sustav možemo zapisati kao

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - x_4 = 0 \\ \qquad x_2 \qquad - x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

odakle slijedi $x_1 = x_4$, $x_2 = x_4$, $x_3 = -x_4$. Stavimo $x_4 = t$, $t \in \mathbb{R}$, pa je rješenje

$$x = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 7.7. Riješite sustav

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Rješenje

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -5 & -2 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Zadnji sustav možemo zapisati kao

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad\qquad = 2 \\ \qquad - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

što daje $x_1 = 2 + x_2$, $x_3 = 3 + x_2 - 2x_4$. Ako stavimo $x_2 = t$, $x_4 = s$, za $t, s \in \mathbb{R}$, rješenje možemo zapisati kao

$$x = \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 3+t-2s \\ s \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{partikularno rješenje} \\ \text{sustava}}} + \underbrace{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{opće rješenje} \\ \text{pripadnog homogenog sustava}}}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

DZ 7.1. Riješite sustave

(a)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

7.2 Sustavi u ovisnosti o parametru

ZADATAK 7.8. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + \lambda x_4 = 3 \\ x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

RJEŠENJE

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & \lambda & 3 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -\lambda-4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Jedini preostali pivotni element je $-\lambda^2 - \lambda$ pa razlikujemo slučajeve:

1.) $-\lambda^2 - \lambda = 0$, tj. $\lambda \in \{0, -1\}$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -\lambda-4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

tj. $x_1 - (\lambda+4)x_3 = 2$, $x_2 - 3x_3 = 1$, $(\lambda+3)x_3 + x_4 = 0$. Stavimo $x_3 = t$ pa dobivamo

$$x = \begin{pmatrix} 2 + (\lambda+4)t \\ 1 + 3t \\ t \\ -(\lambda+3)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \lambda+4 \\ 3 \\ 1 \\ -(\lambda+3) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.) $-\lambda^2 - \lambda \neq 0$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -\lambda-4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

pa imamo Cramerov sustav koji ima jedinstveno rješenje $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

□

ZADATAK 7.9. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustav

$$\begin{cases} (\lambda+4)x + y + z = 1 \\ x + (\lambda+4)y + z = \lambda+3 \\ x + y + (\lambda+4)z = (\lambda+3)^2 \end{cases}$$

RJEŠENJE

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+4 & 1 & \lambda+3 \\ 1 & 1 & \lambda+4 & (\lambda+3)^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda+4 & (\lambda+3)^2 \\ \lambda+4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+4 & 1 & \lambda+3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda+4 & (\lambda+3)^2 \\ 0 & -(\lambda+3) & -(\lambda+3)(\lambda+5) & 1-(\lambda+4)(\lambda+3)^2 \\ 0 & \lambda+3 & -(\lambda+3) & -(\lambda+3)(\lambda+2) \end{array}\right)$$

Razlikujemo slučajeve

1.) $\lambda+3=0$, tj. $\lambda=-3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

odakle slijedi da sustav nema rješenja.

2.) $\lambda \neq -3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda+4 & (\lambda+3)^2 \\ 0 & -1 & -(\lambda+5) & \frac{1}{\lambda+3}-(\lambda+4)(\lambda+3) \\ 0 & 1 & -1 & -(\lambda+2) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{\lambda+3}-(\lambda+3) \\ 0 & 1 & \lambda+5 & (\lambda+4)(\lambda+3)-\frac{1}{\lambda+3} \\ 0 & 0 & -(\lambda+6) & \frac{1}{\lambda+3}-(\lambda^2+8\lambda+14) \end{array}\right)$$

Diskutiramo slučajeve po $\lambda+6$

a) $\lambda+6=0$, tj. $\lambda=-6$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{array}\right)$$

pa sustav nema rješenja.

b) $\lambda \neq -6$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{\lambda+3}-(\lambda+3) \\ 0 & 1 & \lambda+5 & (\lambda+4)(\lambda+3)-\frac{1}{\lambda+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda^2+8\lambda+14}{\lambda+6}-\frac{1}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2+6\lambda+7}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\lambda+5}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda^3+11\lambda^2+38\lambda+41}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \end{array}\right).$$

Sustav je Cramerov i njegovo (jedinstveno) rješenje je

$$x = \frac{1}{(\lambda+3)(\lambda+6)} \begin{pmatrix} -(\lambda^2+6\lambda+7) \\ 2\lambda+5 \\ \lambda^3+11\lambda^2+38\lambda+41 \end{pmatrix}.$$

□

ZADATAK 7.10. Odredite polinom 3. stupnja koji prolazi točkama $(1, -2)$, $(2, -4)$, $(3, -2)$ i $(4, 10)$.

RJEŠENJE Tražimo polinom oblika $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Uvrštavanjem danih točaka, dobivamo sustav

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = -2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -4 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = -2 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 10 \end{cases}$$

Determinanta ovog sustava je transponirana Vandermondeova determinanta, a znamo da je ona $\neq 0$ ako i samo ako su brojevi koji je definiraju međusobno različiti, što je ovdje slučaj. Dakle, naš sustav je Cramerov i ima jedinstveno rješenje. Možemo ga riješiti ili pomoću determinanti ili putem Gaussove metode eliminacije. Rješenje je $a_0 = -2$, $a_1 = 3$, $a_2 = -4$, $a_3 = 1$, tj. traženi polinom je $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$.

DZ 7.2. U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustave

(a)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases},$$

(b)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2 \end{cases},$$

(c)
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases},$$

(d)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9 \end{cases},$$

RJEŠENJE

(a) Za $\lambda = 8$ imamo rješenje

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Za $\lambda \neq 8$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Za $\lambda = 0$ nema rješenja. Za $\lambda \neq 0$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix} \frac{4-\lambda}{5\lambda} \\ \frac{9\lambda-16}{5\lambda} \\ 0 \\ \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Za $\lambda \neq 1, -3$ sustav ima jedinstveno rješenje $x = \frac{1}{\lambda+3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Za $\lambda = 1$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Za $\lambda = -3$ nema rješenja.

(d) Za $\lambda = 8$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Za $\lambda \neq 8$ rješenje je

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$