

# Matematika 1

## Zadaci za vježbu - 2. dio

### 1 L'Hôpitalovo pravilo

**Zadatak 1.1.** Izračunajte

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x)}{4 \sin(x)}$ . Rješenje =  $\frac{1}{4}$ .

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x)$ . Rješenje = 0.

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ . Rješenje = 1.

iv)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x^2 - x}$ . Rješenje =  $\ln(2) - \ln(3)$ .

v)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg}(x)}{\sin(3x)}$ . Rješenje = 0.

vi)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(4x)}{\operatorname{arctg}(5x)}$ . Rješenje =  $\frac{4}{5}$ .

vii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\operatorname{tg}^2(x)}$ . Rješenje = 1.

viii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \ln(x)}{x^2 + 7}$ . Rješenje = 0.

### 2 Lokalni i globalni ekstremi

**Zadatak 2.1.** Odredite (ako postoje) lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

i)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ , Lok. min. (3,-20), lok. maks. (-1,12).

ii)  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ , Lok. min. (2,2), lok. maks. (-2,-2).

iii)  $f(x) = x\sqrt{9-x}$ , Nema lok. min., lok. maks. (6,6 $\sqrt{3}$ ).

iv)  $f(x) = e^x + e^{-x}$ , Lok. min. (0,2), nema lok. maks.

- v)  $f(x) = \ln(4x - x^2)$ , Nema lok. min., lok. maks.  $(2, \ln 4)$ .  
vi)  $f(x) = x \ln(x)$ , Lok. min.  $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$ , nema lok. maks.  
vii)  $f(x) = x + e^{-x}$ . Lok. min.  $(0, 1)$ , nema lok. maks.

**Zadatak 2.2.** Odredite (ako postoje) globalne ekstreme funkcija na zadanim domenama:

- i)  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x + 12$  na  $[-2, 1]$ , Glob. min.  $(-2, -50)$ , glob. maks.  $(1, 22)$ .  
ii)  $f(x) = -2x^5 + 5x^4 + 80x^3 + 1$  na  $[0, 7]$ , Glob. min.  $(0, 1)$ , glob. maks.  $(6, 8209)$ .  
iii)  $f(x) = e^{x^3 - 2x^2 - 7x}$  na  $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ . Glob. min.  $(\frac{7}{3}, e^{-\frac{392}{27}})$ , glob. maks.  $(-\frac{1}{2}, e^{\frac{23}{8}})$ .

### 3 Ispitivanje toka i skiciranje grafa funkcije

**Napomena 3.1.** Za provjeru rješenja ove skupine zadataka studentima se preporuča korištenje sučelja poput Desmos Graphing Calculator-a ili Wolfram Alpha-e.

**Zadatak 3.2.** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x.$$

**Zadatak 3.3.** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}.$$

**Zadatak 3.4.** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

**Zadatak 3.5.** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2 - 1}}.$$

**Zadatak 3.6.** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

**Zadatak 3.7.** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = e^{-2x^2+x+1}.$$

**Zadatak 3.8.** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$$

## 4 Integrali

**Zadatak 4.1.** Izračunajte integrale sljedećih funkcija:

i)  $\int \frac{e^x+1}{e^x+x} dx,$  Rješenje =  $\ln |e^x + x| + C.$

ii)  $\int x^3 e^{x^4} dx,$  Rješenje =  $\frac{1}{4} e^{x^4} + C.$

iii)  $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx,$  Rješenje =  $\ln |\cos x| + x \operatorname{tg} x + C.$

iv)  $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx,$  Rješenje =  $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C.$

v)  $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx,$  Rješenje =  $2 \sin(\sqrt{x}) + C.$

vi)  $\int \operatorname{arctg} x dx,$  Rješenje =  $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$

vii)  $\int \frac{x dx}{x^2+1},$  Rješenje =  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$

viii)  $\int \frac{dx}{x^4-1},$  Rješenje =  $\frac{1}{4}(-\ln |x + 1| - 2 \operatorname{arctg} x + \ln |x - 1|) + C.$

ix)  $\int \frac{x^4}{(x+1)^3} dx,$  Rješenje =  $-3 \ln |x + 1| - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + x + C.$

x)  $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$  Rješenje =  $\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{x^2+1}} + C.$

**Zadatak 4.2.** Izračunajte određene integrale sljedećih funkcija:

i)  $\int_0^4 x\sqrt{x^2 + 9} dx,$  Rješenje =  $\frac{98}{3}.$

ii)  $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx,$  Rješenje =  $2\sqrt{3} - 2^{3/2}.$

iii)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x dx,$  Rješenje =  $\frac{2}{35}.$

iv)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sqrt{1 + \sin^2 x} dx,$  Rješenje =  $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$

v)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx,$  Rješenje =  $\frac{e^{\pi/2}+1}{2}.$

vi)  $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx,$  Rješenje =  $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$

vii)  $\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2} dx,$  Rješenje =  $\pi.$

viii)  $\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+2x^3+1} dx,$  Rješenje =  $\frac{1}{6}.$

ix)  $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx,$  Rješenje =  $1 - \cos 1.$

x)  $\int_1^e \ln^2 x dx.$  Rješenje =  $e - 2.$