

Matematika 1

Zadaci za vježbu - 2. dio

1 L'Hôpitalovo pravilo

Zadatak 1.1. Izračunajte

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x)}{4 \sin(x)}$. Rješenje = $\frac{1}{4}$.

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x)$. Rješenje = 0.

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Rješenje = 1.

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x^2 - x}$. Rješenje = $\ln(2) - \ln(3)$.

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg}(x)}{\sin(3x)}$. Rješenje = 0.

vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(4x)}{\operatorname{arctg}(5x)}$. Rješenje = $\frac{4}{5}$.

vii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\operatorname{tg}^2(x)}$. Rješenje = 1.

viii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \ln(x)}{x^2 + 7}$. Rješenje = 0.

2 Lokalni i globalni ekstremi

Zadatak 2.1. Odredite (ako postoje) lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

i) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$, Lok. min. (3,-20), lok. maks. (-1,12).

ii) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$, Lok. min. (2,2), lok. maks. (-2,-2).

iii) $f(x) = x\sqrt{9-x}$, Nema lok. min., lok. maks. (6,6 $\sqrt{3}$).

iv) $f(x) = e^x + e^{-x}$, Lok. min. (0,2), nema lok. maks.

- v) $f(x) = \ln(4x - x^2)$, Nema lok. min., lok. maks. $(2, \ln 4)$.
vi) $f(x) = x \ln(x)$, Lok. min. $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$, nema lok. maks.
vii) $f(x) = x + e^{-x}$. Lok. min. $(0, 1)$, nema lok. maks.

Zadatak 2.2. Odredite (ako postoje) globalne ekstreme funkcija na zadanima domenama:

- i) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x + 12$ na $[-2, 1]$, Glob. min. $(-2, -50)$, glob. maks. $(1, 22)$.
ii) $f(x) = -2x^5 + 5x^4 + 80x^3 + 1$ na $[0, 7]$, Glob. min. $(0, 1)$, glob. maks. $(6, 8209)$.
iii) $f(x) = e^{x^3 - 2x^2 - 7x}$ na $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$. Glob. min. $(\frac{7}{3}, e^{-\frac{392}{27}})$, glob. maks. $(-\frac{1}{2}, e^{\frac{23}{8}})$.

3 Ispitivanje toka i skiciranje grafa funkcije

Napomena 3.1. Za provjeru rješenja ove skupine zadataka studentima se preporuča korištenje sučelja poput Desmos Graphing Calculator-a ili Wolfram Alpha-e.

Zadatak 3.2. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x.$$

Zadatak 3.3. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}.$$

Zadatak 3.4. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Zadatak 3.5. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2 - 1}}.$$

Zadatak 3.6. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

Zadatak 3.7. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = e^{-2x^2+x+1}.$$

Zadatak 3.8. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$$

4 Integrali

Zadatak 4.1. Izračunajte integrale sljedećih funkcija:

i) $\int \frac{e^x+1}{e^x+x} dx,$ Rješenje = $\ln |e^x + x| + C.$

ii) $\int x^3 e^{x^4} dx,$ Rješenje = $\frac{1}{4} e^{x^4} + C.$

iii) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx,$ Rješenje = $\ln |\cos x| + x \operatorname{tg} x + C.$

iv) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx,$ Rješenje = $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C.$

v) $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx,$ Rješenje = $2 \sin(\sqrt{x}) + C.$

vi) $\int \operatorname{arctg} x dx,$ Rješenje = $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$

vii) $\int \frac{x dx}{x^2+1},$ Rješenje = $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$

viii) $\int \frac{dx}{x^4-1},$ Rješenje = $\frac{1}{4}(-\ln |x + 1| - 2 \operatorname{arctg} x + \ln |x - 1|) + C.$

ix) $\int \frac{x^4}{(x+1)^3} dx,$ Rješenje = $-3 \ln |x + 1| - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + x + C.$

x) $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$ Rješenje = $\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{x^2+1}} + C.$

Zadatak 4.2. Izračunajte određene integrale sljedećih funkcija:

i) $\int_0^4 x\sqrt{x^2 + 9} dx,$ Rješenje = $\frac{98}{3}.$

ii) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx,$ Rješenje = $2\sqrt{3} - 2^{3/2}.$

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x dx,$ Rješenje = $\frac{2}{35}.$

iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sqrt{1 + \sin^2 x} dx,$ Rješenje = $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$

v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx,$ Rješenje = $\frac{e^{\pi/2}+1}{2}.$

vi) $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx,$ Rješenje = $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$

vii) $\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2} dx,$ Rješenje = $\pi.$

viii) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+2x^3+1} dx,$ Rješenje = $\frac{1}{6}.$

ix) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx,$ Rješenje = $1 - \cos 1.$

x) $\int_1^e \ln^2 x dx.$ Rješenje = $e - 2.$