Zadatak 1. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$f(x) = 2^{\cos x}(2^{\cos x} - 2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nađite najveći interval $I \subseteq \mathbb{R}$ koji sadrži točku $\frac{3\pi}{4}$ takav da je $f|_I$ injekcija.

Rješenje. Ako definiramo funkcije

$$\begin{aligned} g_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_1(x) = \cos x, \\ g_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_2(x) = 2^x, \\ g_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_3(x) = x(x-2), \end{aligned}$$

tada se lako vidi da vrijedi $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$.

Pokušajmo neformalno naslutiti što bi trebao biti interval I. Najveći interval oko točke $\frac{3\pi}{4}$ na kojem je funkcija g_1 injekcija je $[0, \pi]$. Tada su restrikcije

$$\begin{aligned} g_1|_{[0,\pi]} &: [0, \pi] \to [-1, 1], \\ g_2|_{[-1,1]} &: [-1, 1] \to \left[\frac{1}{2}, 2\right] \end{aligned}$$

bijekcije te vrijedi

$$f|_{[0,\pi]} = g_3|_{\left[\frac{1}{2},2\right]} \circ g_2|_{[-1,1]} \circ g_1|_{[0,\pi]}.$$

Međutim, funkcija $g_3|_{\left[\frac{1}{2},2\right]}$ nije injekcija jer se tjeme parabole $x \mapsto x(x-2)$ nalazi u točki $(1, -1)$ i vrijedi $1 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Najveći podinterval od $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ koji sadrži točku

$$g_2|_{[-1,1]}\left(g_1|_{[0,\pi]}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2^{\cos\frac{3\pi}{4}} = 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

na kojem je funkcija g_3 injektivna je interval $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Stoga bi traženi interval I trebao biti

$$\left(g_2|_{[-1,1]}\right)^{-1}\left(\left(g_1|_{[0,\pi]}\right)^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)\right) = \left(g_2|_{[-1,1]}\right)^{-1}([-1, 0]) = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Dokažimo sada formalnije da je $I := \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ zaista traženi interval. Evidentno je $\frac{3\pi}{4} \in I$. Pokažimo da je $f|_I$ injekcija. Lako se vidi da su restrikcije

$$\begin{aligned} g_1|_{\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]} &: \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to [-1, 0], \\ g_2|_{[-1,0]} &: [-1, 0] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ g_3|_{\left[\frac{1}{2},1\right]} &: \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \left[-1, -\frac{3}{4}\right] \end{aligned}$$

bijekcije te je stoga i

$$f|_{\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]} = g_3|_{\left[\frac{1}{2},1\right]} \circ g_2|_{[-1,0]} \circ g_1|_{\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]} : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \left[-1, -\frac{3}{4}\right]$$

bijekcija (specijalno je injekcija, što smo i tvrdili).

Pokažimo sada da je I najveći interval koji sadrži $\frac{3\pi}{4}$ na kojem je f injekcija. Zaista, neka je $J \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan interval takav da $\frac{3\pi}{4} \in J$ i $f|_J$ je injekcija. Tvrdimo da je $J \subseteq I$. Pretpostavimo suprotno, da je $J \nsubseteq I$. Tada možemo odabrati neki element $a \in J \setminus I$. Budući da $a \notin I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, mora vrijediti ili $a < \frac{\pi}{2}$ ili $a > \pi$. Analizirajmo svaki od slučajeva posebno.

(1°) Pretpostavimo da je $a > \pi$. Tada možemo odabrati $\varepsilon > 0$ takav da $\pi - \varepsilon \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right\rangle$ te $\pi + \varepsilon \in \langle \pi, a]$. Primjerice, možemo uzeti

$$\varepsilon := \min\left\{\frac{\pi}{4}, a - \pi\right\}.$$

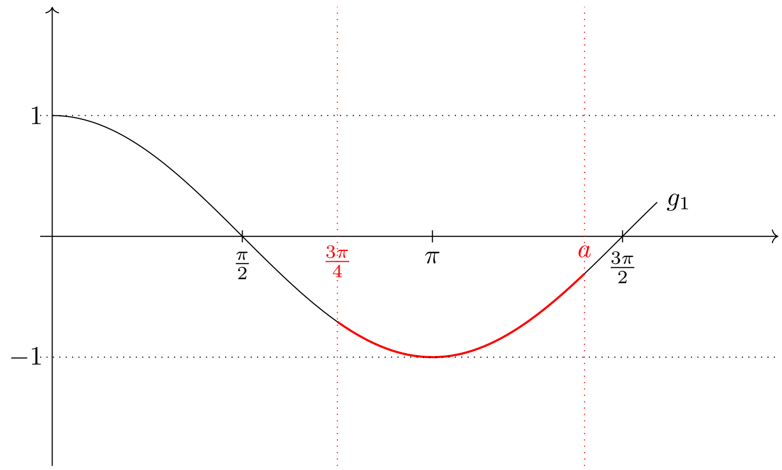
Tada zbog $a \in J$ i $\frac{3\pi}{4} \in J$ vrijedi i $\left[\frac{3\pi}{4}, a\right] \subseteq J$ te specijalno $\pi \pm \varepsilon \in J$ te zbog $\varepsilon > 0$ vrijedi $\pi - \varepsilon \neq \pi + \varepsilon$. Nadalje, imamo

$$g_1|_J(\pi - \varepsilon) = \cos(\pi - \varepsilon) = -\cos\varepsilon = \cos(\pi + \varepsilon) = g_1|_J(\pi + \varepsilon)$$

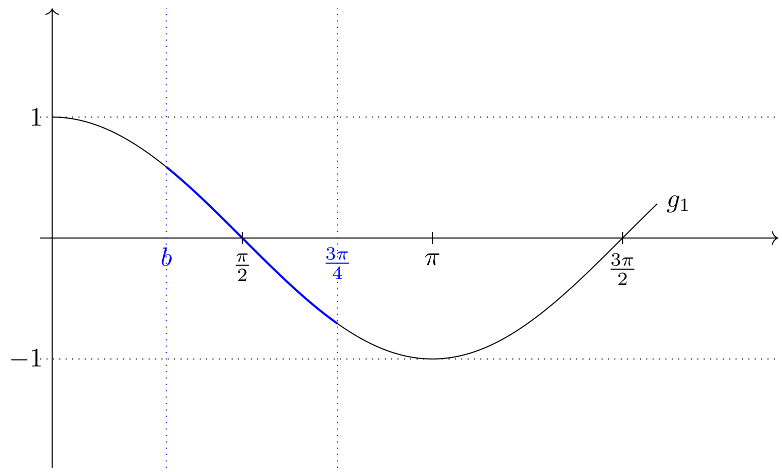
te stoga i

$$f|_J(\pi - \varepsilon) = g_3(g_2(g_1|_J(\pi - \varepsilon))) = g_3(g_2(g_1|_J(\pi + \varepsilon))) = f|_J(\pi + \varepsilon)$$

što je kontradikcija s pretpostavkom da je $f|_J$ injekcija.



(2°) Pretpostavimo da je $a < \frac{\pi}{2}$. Zbog $a \in J$ i $\frac{3\pi}{4} \in J$ imamo $\left[a, \frac{3\pi}{4}\right] \subseteq J$. Tada možemo odabrati $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ takav da $b \in J$. Zaista, ako je $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ naprosto uzmemo $b := a$, a ako je $a < 0$, tada uzmemo $b := 0$; u svakom slučaju je $b \in \left[a, \frac{3\pi}{4}\right] \subseteq J$.



Tada specijalno zbog $b \in J$ i $\frac{3\pi}{4} \in J$ imamo $\left[b, \frac{3\pi}{4}\right] \subseteq J$. Prema pretpostavci je $f|_J$ injekcija pa je specijalno i daljnja restrikcija $f|_{\left[b, \frac{3\pi}{4}\right]}$ injekcija. Lako se vidi da su restrikcije

$$g_1|_{\left[b, \frac{3\pi}{4}\right]} : \left[b, \frac{3\pi}{4}\right] \to \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos b\right],$$

$$g_2|_{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos b\right]} : \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos b\right] \to \left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, 2^{\cos b}\right]$$

bijekcije. Ako označimo $g_3|_{\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, 2^{\cos b}\right]} : \left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, 2^{\cos b}\right] \to \mathbb{R}$, tada imamo

$$f|_{\left[b, \frac{3\pi}{4}\right]} = g_3|_{\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, 2^{\cos b}\right]} \circ g_2|_{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos b\right]} \circ g_1|_{\left[b, \frac{3\pi}{4}\right]}$$

te stoga

$$f|_{\left[b,\frac{3\pi}{4}\right]} \circ \left(g_1|_{\left[b,\frac{3\pi}{4}\right]}\right)^{-1} \circ \left(g_2|_{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos b\right]}\right)^{-1} = g_3|_{\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}},2^{\cos b}\right]}.$$

Funkcija na lijevoj strani je injekcija kao kompozicija tri injekcije pa slijedi da je i funkcija $g_3|_{\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}},2^{\cos b}\right]}$ injekcija.

S druge strane, primijetimo da je $2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \in \left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$ i

$$b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \implies \cos b \in \langle 0, 1] \implies 2^{\cos b} \in \langle 1, 2]$$

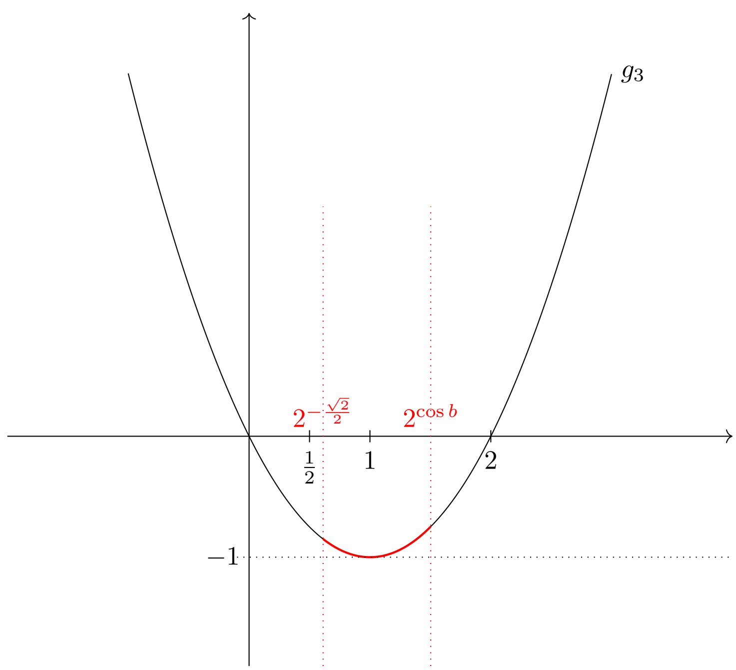
pa slijedi da je $1 \in \left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, 2^{\cos b}\right]$. Iz grafa je sada jasno da funkcija $g_3|_{\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}},2^{\cos b}\right]}$ neće biti injekcija. Formalno, možemo odabrati $\varepsilon > 0$ takav da $1 - \varepsilon \in \left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, 1\right\rangle$ i $1 + \varepsilon \in \langle 1, 2^{\cos b}]$. Primjerice, možemo uzeti

$$\varepsilon := \min\left\{1 - 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, 2^{\cos b} - 1\right\}.$$

Tada su $1 \pm \varepsilon \in \left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, 2^{\cos b}\right]$, zbog $\varepsilon > 0$ imamo $1 - \varepsilon \neq 1 + \varepsilon$ te vrijedi

$$g_3|_{\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}},2^{\cos b}\right]}(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)((1-\varepsilon)-2) = \varepsilon^2 - 1 = (1+\varepsilon)((1+\varepsilon)-2) = g_3|_{\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}},2^{\cos b}\right]}(1+\varepsilon)$$

odakle zaključujemo da $g_3|_{\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}},2^{\cos b}\right]}$ nije injekcija. Ovo je kontradikcija s prethodnim zaključkom da $g_3|_{\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}},2^{\cos b}\right]}$ jest injekcija.



Oba slučaja su dali kontradikciju pa zaključujemo da je zaista $J \subseteq I$. $\square$