

III. ANALITICKI MATERIALI

- meteorološki elementi su funkcije 4 varijable :
 - kartezijev sustav : $E(x, y, z, t)$
 - sferni sustav s vertikalnom koordinatom tloča : $E(\lambda, \rho, \mu, t)$
 - taj se najčešće koristi u APV-u
- prikaz polja meteoroloških elemenata se radi u 2 dimenzije
 - (1) $E(\lambda_0, \rho_0, \mu, t_0)$ ⇒ termalni dijagrami, npr. emagrami
 - (2) $E(\lambda, \rho, \rho_0, t_0)$ ⇒ geografske meteorološke karte kojima prikazujemo raspodjelu E-a na određenoj visini u nekom trenutku
 - (3) $E(\lambda_0, \rho, \mu, t_0)$ ili $E(\lambda, \rho_0, \mu, t_0)$ ⇒ meridionalni ili paralelni vertikalni presjek atmosfere

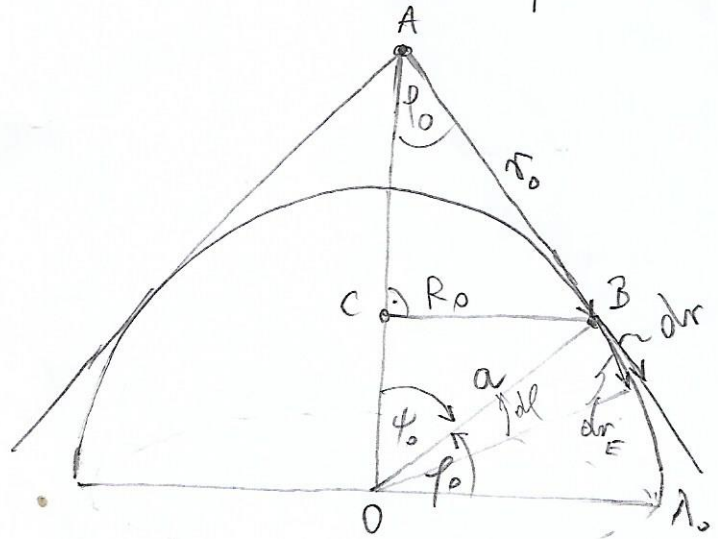
METEOROLOŠKE KARTE

- konstrukcija meteoroloških karata je ista kao i konstrukcija geografskih karata
- radi se projekcija plohe sfernog oblika (dijela Zemlje) na ravninu zbog praktičkog razla
- pri tome želimo sačuvati (održati) oblik atmosferskih sustava
- na čuvanje oblika u praksi su se najbolje pokazale
 - (1) LAMBERTOVA STOŽASTA ⇒ dobra za umjerene širine
 - (2) POLARNA STEREOGRAFSKA ⇒ polarne širine
 - (3) MERCATOROVA VALJKASTA ⇒ ekvator i subtrapske širine

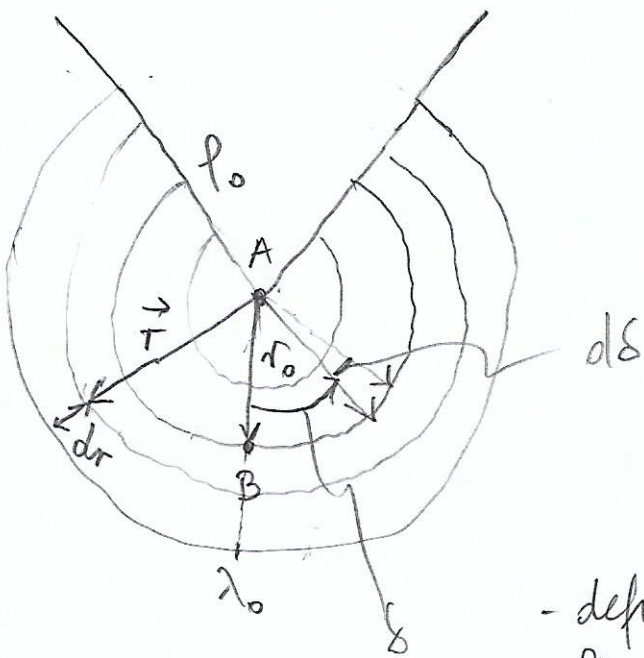
→ tu sam stak!

① LAMBERTOVA STOŽASTA PROJEKCIJA

⇒ radi se projekcija dijela Zemlje na stošac kojim je ona upisana i onda se ploha toga stošca razvija u ravninu



- visina stošca može varirati, ovime o potrebi
- točka B ≡ dnošće ploha stošca i Zemlje ⇒ standardna paralela
- R_0 ... radijus standardne paralele na Zemlji
- r_0 ... radijus st. par. na projekciji (ploha stošca)



$$R_0 = a \cos \phi_0$$

$$r_0 = \frac{R_0}{\sin \phi_0}$$

- želimo koordinate na projekciji poveriti na zemljinih koordinatama, tj. želimo:

$$r(a, \lambda, \phi) \text{ i } s(a, \lambda, \phi)$$

- definiramo faktor stošice n kao omjer inf. promjene geografske duljine

na projekciji (ds) i na zemlji ($d\lambda$):

$$n = \frac{ds}{d\lambda} ; n \in [0, 1] \Rightarrow \text{što je } n \text{ veći, više stošice je manja}$$

$$\Rightarrow ds = n d\lambda \quad \int_{\lambda_0}^{\lambda} ds = n \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \Rightarrow \boxed{s = n \lambda}$$

~~infinitesimalna promjena duž meridijana na projekciji:~~
 ~~$\frac{ds}{d\lambda} = \frac{a d\phi}{a d\lambda} = \frac{a \cos \phi}{a \sin \phi} = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} = \cot \phi$~~
 ~~$\Rightarrow ds = \cot \phi d\lambda$~~

- opseg meke paralele na zemlji je $L_E = 2\pi R$

- opseg paralele na projekciji je $L = 2\pi n R$

- omjer paralele dvije paralele: $G_\phi = \frac{L}{L_E} = \frac{2\pi n R}{2\pi R} = \frac{n R}{R}$

$$R = a \cos \phi = a \sin \psi$$

$$\Rightarrow G_\phi = \frac{n R}{a \sin \psi}$$

- na standardnoj paraleli ($\phi = \phi_0$) umjesto $L = L_E$ pa je $G_{\phi_0} = 1$

$$\Rightarrow G_{\phi_0} = 1 = \frac{n R_0}{a \sin \psi_0} = \frac{n \frac{R_0}{\sin \phi_0}}{a \sin \psi_0} = \frac{n \frac{a \sin \psi_0}{\cos \phi_0}}{a \sin \psi_0} = \frac{n}{\cos \phi_0} \Rightarrow \boxed{n = \cos \phi_0}$$

- inf. promjena duž meridijana na zemlji: $ds_E = -a d\phi = -a d(90^\circ - \psi)$

$$\Rightarrow ds_E = a d\psi$$

- rel. def. inf. promjena duž meridijana na projekciji: ds

- moment: $\sin \psi = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\sin \psi} = \frac{R}{\cos \psi} = \frac{a \sin \psi}{\cos \psi} = a \tan \psi / d$

$\Rightarrow dr = \frac{a}{\cos^2 \psi} d\psi$

- def. mjerni projektije dvi menidjoma: $G_\lambda = \frac{dr}{dr_E} = \frac{\frac{a}{\cos^2 \psi} d\psi}{a d\psi}$

$\Rightarrow G_\lambda = \frac{1}{\cos^2 \psi}$

- zbog očitavanja dlaka rještavamo $\Rightarrow \boxed{G_r = G_\rho}$!

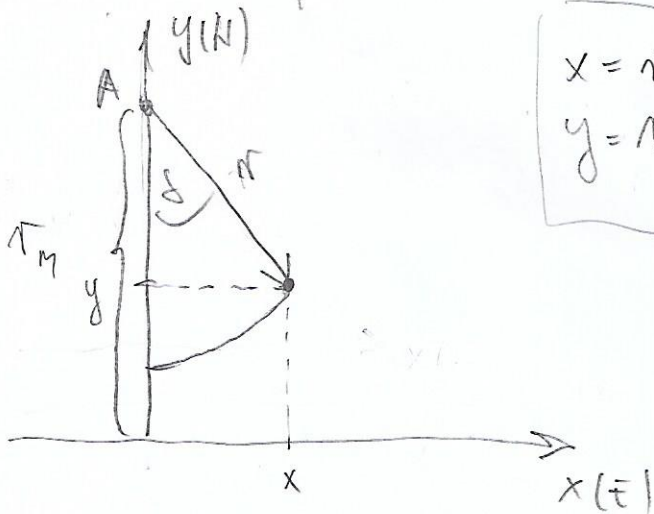
$\Rightarrow dr = G_\lambda dr_E = G_\rho dr_E = \frac{nr}{a \sin \psi} a d\psi \Rightarrow \frac{dr}{r} = n \frac{d\psi}{\sin \psi}$

$\Rightarrow \frac{dr}{r} = \cos \psi_0 \frac{d\psi}{\sin \psi} \Big|_{r_0, \psi_0}^r \Rightarrow \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \cos \psi_0 \int_{\psi_0}^\psi \frac{d\psi}{\sin \psi}$

$\Rightarrow \ln \frac{r}{r_0} = \cos \psi_0 \ln \frac{\tan \frac{\psi}{2}}{\tan \frac{\psi_0}{2}} = \ln \left(\frac{\tan \frac{\psi}{2}}{\tan \frac{\psi_0}{2}} \right)^{\cos \psi_0}$

$\Rightarrow r = a \tan \psi_0 \left[\frac{\tan \frac{\psi}{2}}{\tan \frac{\psi_0}{2}} \right]^{\cos \psi_0} \Big| \Rightarrow r = \frac{a}{\tan \psi_0} \left[\frac{\tan \frac{\psi}{2}}{\tan \frac{\psi_0}{2}} \right]^{\sin \psi_0}$

- sada kada smo dobili polarne koordinate (r, δ) , na karti mjerimo konstante i parcijalne (konjugirane) koordinate (x, y)
 \Rightarrow treba transformirati

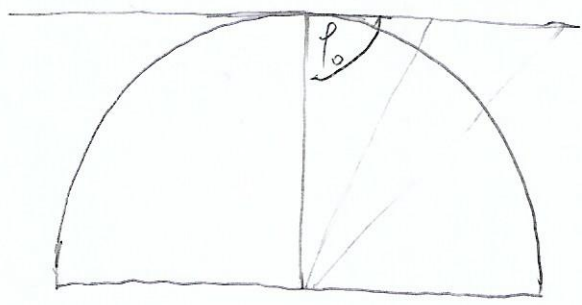


$x = r \sin \delta$
 $y = r_M - r \cos \delta$

② POLARNA STEREOGRAFSKA PROJEKCIJA

- specijalan slučaj Lambertove stereografe $\Rightarrow \varphi_0 = 90^\circ \Rightarrow \psi_0 = 0^\circ$
 - faktor stošca: $n = \cos \psi_0 = 1$

$\Rightarrow \boxed{\delta = \lambda}$



$$r = \lim_{\psi_0 \rightarrow 0} a \operatorname{tg} \psi_0 \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2}} \right]^{\cos \psi_0} =$$

$$= \lim_{\psi_0 \rightarrow 0} a \frac{\operatorname{tg} \psi_0}{\operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = a \frac{\psi_0}{\frac{\psi_0}{2}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$$

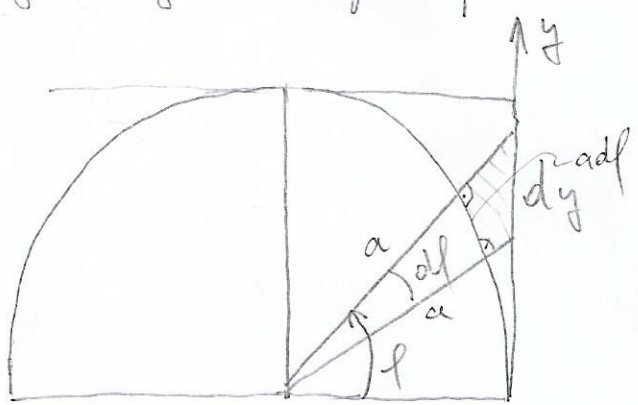
$\Rightarrow r = 2a \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = 2a \frac{\sin \frac{\psi}{2}}{\cos \frac{\psi}{2}} = \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \varphi) \right]}{\cos \left[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \varphi) \right]} = \dots$

$\Rightarrow \boxed{r = 2a \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi}}$

③ MERCATOROVA VALJKASTA PROJEKCIJA

- kadé bismo uveli spec. slučaj $\psi_0 = 90^\circ \Rightarrow \varphi_0 = 0^\circ$ na Lambertovu projekciju, bilo bi $\Rightarrow n = \cos \psi_0 = \cos 90^\circ \Rightarrow n = 0 \Rightarrow \boxed{\delta = 0}$ i $r = \infty \Rightarrow$ nije prihvatljivo!

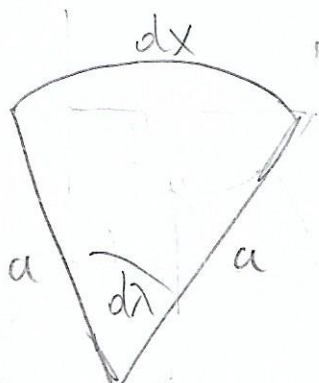
- zbog toga se ovdje koristi pravolinijski koord. sustav sa ishodištem na ekvatoru koji se dobije t.d. se projekcija vrši na valjok kojemu je Zemlja upisana



$\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{a d \varphi}{dy}$
 $dy = \frac{a d \varphi}{\cos \varphi} \int_0^{\varphi, \varphi} dy, \varphi$

$\Rightarrow y = a \int_0^{\varphi} \frac{d \varphi}{\cos \varphi} = \dots$

$\boxed{y = -a \ln \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi}}$



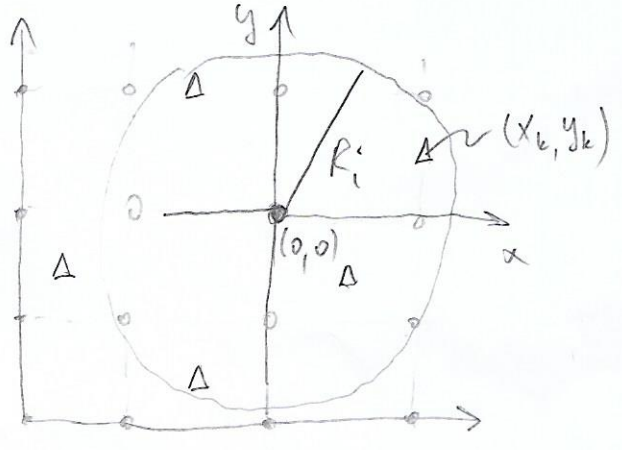
$dx = a d \lambda \Rightarrow \boxed{x = a \lambda}$

IV. OBJEKTIVNA ANALIZA METEOROLOŠKIH POLJA

- nakon što se podaci prikupie, potrebna ih je interpolirati na točke mreže meteoroloških karata
- ⇒ radi se o procjeni vrijednosti na mjestima gdje one nisu poznate na temelju vrijednosti sa mjesta gdje su poznate
- 1 prva metoda, a da dobijemo vid u principu OA, pokušati ćemo djeliti jednim od njih, ona koja nam je nekako "najbliža" jer smo toj princip u biti već vidjeli

LOKALNA POLINOMNA PRILAGODBA

- ovom metodom prave vrijednosti na točkama mreže koristeći polinome
- neka imamo nepravilnu motriteljsku mrežu podataka u sustavu karte



- u i-tu točku mreže sa koji vrijedi procjena stavimo ishodište lokalnog koordinatnog sustava xy
- neka vrijedi $f_0(x_k, y_k)$ okružuju i-tu točku mreže t.d. je $x_k^2 + y_k^2 \leq R_i^2$ uz pretpostavku da $\exists K_i$ vrijedi unutar kruga radijusa $R_i \Rightarrow k \in [1, K_i]$

R_i ... radijus područja utjecaja na i-tu točku

- def. analitičnu funkciju koja predstavlja vrijednost met. elementa u bilo kojoj točki unutar R_i ; u ovom slučaju 2D polinom

$$f_A(x, y) = \sum_m \sum_n c_{mn} x^m y^n ; m, n \geq 0 ; m+n \leq M_K$$

M_K ... max stupanj 2D polinoma

- npr., neka je $M_K = 2$

$$\Rightarrow f_A(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{20}x^2 + c_{01}y + c_{02}y^2 + c_{11}xy$$

- ako na neki način predstavimo koeficijente c_{mn} , onda ćemo imati analitičnu fju $f_A(x, y)$ i moći ćemo procijeniti vrijednost met. elementa u i-toj točki mreže s lokalnim koord $x=0; y=0$

$$\Rightarrow f_A(0, 0) = c_{00}$$

- koeficijente ćemo pronaći pomoću K_i mjerenja
- u našem konkretnom slučaju imamo 6 neparnih koeficijenta pa umotom našeg K_i treba biti minimumsko $K_i = 6$ točaka mjerenja

- definira funkcional:

$$I = \frac{1}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} [f_A(x_k, y_k) - f_0(x_k, y_k)]^2 \Rightarrow \text{srednje kvadratno}$$

odstupanje procjenjenih vrijednosti met. elementa od mjerenih vrijednosti \Rightarrow varijanca!

$$\Rightarrow I = \frac{1}{K_i} \sum_{k=1}^{K_i} \left[\sum_m \sum_n C_{mn} x_k^m y_k^n - f_0(x_k, y_k) \right]^2 \rightarrow \min / \frac{\partial}{\partial C_{mn}}$$

- rezultat \Rightarrow želimo da varijanca bude min!

- za slučaj $M_C = 2$

$$I = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 [C_{00} + C_{10}x_k + C_{20}x_k^2 + C_{01}y_k + C_{02}y_k^2 + C_{11}x_k y_k - f_0(x_k, y_k)]^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial C_{00}} = \frac{2}{6} \sum_{k=1}^6 [C_{00} + \dots + C_{11}x_k y_k - f_0(x_k, y_k)] = 0$$

$$\Rightarrow C_{00} + C_{10}\bar{x} + C_{20}\bar{x}^2 + C_{01}\bar{y} + C_{02}\bar{y}^2 + C_{11}\bar{x}\bar{y} = \overline{f_0(x, y)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial C_{10}} = \frac{2}{6} \sum_{k=1}^6 [C_{00} + \dots + C_{11}x_k y_k - f_0(x_k, y_k)] x_k = 0$$

$$\Rightarrow C_{00}\bar{x} + C_{10}\bar{x}^2 + C_{20}\bar{x}^3 + C_{01}\bar{x}\bar{y} + C_{02}\bar{x}\bar{y}^2 + C_{11}\bar{x}^2\bar{y} = \overline{x f_0(x, y)}$$

\Rightarrow 6 jedrili sa 6 neparnica, matricno

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{x}^2 & \bar{y} & \bar{y}^2 & \bar{x}\bar{y} \\ \bar{x} & \bar{x}^2 & \bar{x}^3 & \bar{x}\bar{y} & \bar{x}\bar{y}^2 & \bar{x}^2\bar{y} \\ \bar{x}^2 & \bar{x}^3 & \bar{x}^4 & \bar{x}^2\bar{y} & \bar{x}^2\bar{y}^2 & \bar{x}^3\bar{y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{00} \\ C_{10} \\ C_{20} \\ C_{01} \\ C_{02} \\ C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{f_0(x, y)} \\ \overline{x f_0(x, y)} \\ \overline{x^2 f_0(x, y)} \end{bmatrix}$$