MATEMATIČKA ANALIZA 1

natjecanje

11. 1. 2011.

1. Odredite sve $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje niz
$$a_n := \sin(\alpha n)$$
konvergira

2. Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Izračunajte limes
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{nk}{n}}.$$

3. Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvije funkcije i neka je $a \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da postoje limesi $A := \lim\limits_{x\to a} f(x)$ i $B := \lim\limits_{y\to A} g(y)$. Da li je nužno $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = B$? U slučaju negativnog odgovora nađite kontraprimjer.

4. Pretpostavimo da je $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija takva da za sve $a > 0$ vrijedi
$$\lim_{n\to\infty} f(an) = 0.$$
Da li je nužno $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$? U slučaju negativnog odgovora nađite kontraprimjer.

5. Neka je $\mathcal{C}$ skup svih neprekidnih funkcija $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ i stavimo
$$\mathcal{C}_0 := \{f \in \mathcal{C} \ : \ f(0) = 0\}.$$
Dokažite ili opovrgnite: Postoji prirodan broj n i funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{C}_0$ takve da za svaku funkciju $f \in \mathcal{C}_0$ postoje funkcije $g_1, g_2, \ldots, g_n \in \mathcal{C}$ (koje ovise o f) takve da vrijedi
$$f(x) = g_1(x)f_1(x) + g_2(x)f_2(x) + \cdots + g_n(x)f_n(x),$$
za sve $x \in [-1, 1]$. U slučaju potvrdnog odgovora nađite najmanji takav n.

Ilja Gogić