MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 18. studenog 2019.

Zadatak 1.

(a) (4 boda) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sin x} - 2\cos x\right).$$

(b) (2 boda) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sin x} - 8\cos x\cos(2x)\cos(4x)\right).$$

Rješenje.

(a) Koristeći formulu za sinus dvostrukog kuta primijetimo da je funkcija jednaka:

$$\ln\left(\frac{1-\sin(2x)}{\sin x}\right)$$

Da bi izraz bio definiran, izraz unutar logaritma mora biti pozitivan. Kako je brojnik uvijek nenegativan, to je slučaj točno kad je brojnik različit od 0, a nazivnik pozitivan. Dakle,

$$\mathcal{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(b) Kao i u prvom dijelu, svedimo izraz unutar logaritma na zajednički nazivnik. Primijetimo da vrijedi:

$$8\sin x\cos x\cos(2x)\cos(4x)\cos(8x) = 4\sin(2x)\cos(2x)\cos(4x) = 2\sin(4x)\cos(4x) = \sin(8x)$$

Zbog toga vrijedi:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-\sin(8x)}{\sin x}\right)$$

pa kao i u prvom dijelu zadatka zaključujemo da je

$$\mathcal{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle \setminus \left\{\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 18. studenog 2019.

Zadatak 2. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$f(x) = \left\lfloor \tfrac{8}{\pi} \operatorname{arctg} x^2 + 1 \right\rfloor .$$

(a) (5 bodova) Nađite $f^{-1}([1,2])$ i $f(f^{-1}([1,2]))$.

(b) (1 bod) Postoji li prirodan broj n takav da je $f^{-1}([n,n+1]) = \emptyset$?

Napomena. $\lfloor a \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od a. Npr. $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$.

Rješenje.

(a) Prikažimo funkciju f kao kompoziciju $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$, gdje su $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \lfloor x \rfloor, \\ f_2(x) &= \tfrac{8}{\pi} \operatorname{arctg} x + 1, \\ f_3(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} f^{-1}([1,2]) &= f_3^{-1}(f_2^{-1}(f_1^{-1}([1,2]))) \\ &= f_3^{-1}(f_2^{-1}([1,3\rangle)) \\ &= f_3^{-1}([0,1\rangle) \\ &= \langle -1, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Iz ovoga sada dobivamo da je

$$\begin{aligned} f(f^{-1}([1,2])) &= f(\langle -1,1 \rangle) \\ &= f_1(f_2(f_3(\langle -1,1 \rangle))) \\ &= f_1(f_2([0,1\rangle)) \\ &= f_1([1,3\rangle) \\ &= \{1,2\}. \end{aligned}$$

(b) Budući da je funkcija arctg odozgo omeđena s $\frac{\pi}{2}$, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) \leq \left\lfloor \tfrac{8}{\pi} \cdot \tfrac{\pi}{2} + 1 \right\rfloor = 5.$$

Iz ovoga je očito da za svaki $n \geq 6$ imamo $f^{-1}([n,n+1]) = \emptyset$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 18. studenog 2019.

Zadatak 3. Neka su $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realne funkcije realne varijable.

(a) (1 bod) Ako je g periodična, je li nužno i $f \circ g$ periodična?

(b) (1 bod) Ako je f periodična, je li nužno i $f \circ g$ periodična?

(c) (2 boda) Ako je f periodična s periodom 7, a g s periodom 9, je li nužno i funkcija $f + g$ periodična? Ako je, pronađite joj neki period.

(d) (2 boda) Ako je $g(x) = |f(x)|$, te ako je g periodična, je li nužno i f periodična?

Napomena. Funkciju $f + g$ definiramo kao funkciju $(f + g)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Rješenje.

(a) Neka je $\tau > 0$ neki period funkcije g. Tada za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(f \circ g)(x + \tau) = f(g(x + \tau)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x),$$

pri čemu druga jednakost vrijedi jer je τ period funkcije g. Zaključujemo da je i $f \circ g$ periodična s periodom τ.

(b) Ne nužno. Naime, neka je

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{za } x \in \mathcal{D}_{\mathrm{tg}} \\ 0, & \text{za } x \notin \mathcal{D}_{\mathrm{tg}} \end{cases} \quad \text{i} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Tada je f periodična s periodom π. Međutim, $(f \circ g)(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{R}$, pa funkcija $f \circ g$ nije periodična.

(c) Uočimo da za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$, koristeći pretpostavku o periodima funkcija f i g, imamo

$$\begin{aligned}(f + g)(x + 63) &= f(x + 63) + g(x + 63) = f(x + 63 - 7) + g(x + 63 - 9) = f(x + 56) + g(x + 54) \\ &= f(x + 56 - 7) + g(x + 54 - 9) = f(x + 49) + g(x + 45) = \dots \\ &= f(x + 7) + g(x + 9) = f(x) + g(x) = (f + g)(x),\end{aligned}$$

pa je $f + g$ periodična s periodom 63.

(d) Ne nužno. Naime, neka je

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{za } x \neq 0 \\ 1, & \text{za } x = 0. \end{cases}$$

Kada bi f bila periodična, postojao bi neki $\tau > 0$ takav da je $f(x+\tau) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Posebno, za $x = 0$ imali bi da je $-1 = f(\tau) = f(0) = 1$, što daje kontradikciju. Dakle, f nije periodična.

S druge strane, očito je $g(x) = 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$, pa je g periodična.

Napomena. U podzadatku (d), studenti su često ispravno zaključili da je za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $f(x) = g(x)$ ili $f(x) = -g(x)$. Međutim, to nipošto ne znači da će za sve x biti ista alternativa – kao što primjer u (d) pokazuje, moguće je za neke vrijednosti x imati $f(x) = g(x)$, a da za neke druge vrijednosti x vrijedi $f(x) = -g(x)$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 18. studenog 2019.

Zadatak 4. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = e^{\sin^2 x}.$$

(a) (5 bodova) Odredite $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, dokažite da je $f|_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ bijekcija te odredite $\left(f|_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}$.

(b) (2 boda) Nađite najveći interval $I \subseteq \mathbb{R}$ koji sadrži točku $\frac{5\pi}{3}$ takav da je $f|_I$ injekcija.

Rješenje.

(a) Prikažimo funkciju f kao kompoziciju jednostavnijih funkcija. Definiramo funkcije $g_1, g_2, g_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da je

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \sin x, \\ g_2(x) &= x^2, \\ g_3(x) &= e^x, \end{aligned}$$

i uočimo da je $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$.

Funkcija $g_1|_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$ je strogo rastuća pa je injekcija. Imamo $g_1(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]) = [0, 1]$.

Funkcija $g_2|_{[0,1]}$ je strogo rastuća pa je injekcija. Imamo $g_2([0, 1]) = [0, 1]$.

Funkcija $g_3|_{[0,1]}$ je strogo rastuća (dapače, eksponencijalna funkcija je strogo rastuća na cijelom $\mathbb{R}$) pa je injekcija. Imamo $g_3([0, 1]) = [1, e]$.

Dakle, funkcije

$$\begin{aligned} g_1|_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\colon \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] &\to [0, 1] \\ g_2|_{[0,1]}\colon [0, 1] &\to [0, 1] \\ g_3|_{[0,1]}\colon [0, 1] &\to [1, e] \end{aligned}$$

su bijekcije. Imamo

$$f\left(\left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\right) = g_3\left(g_2\left(g_1\left(\left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]\right)\right)\right) = g_3(g_2([0, 1])) = g_3([0, 1]) = [1, e]$$

pa je i

$$f|_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} = g_3|_{[0,1]} \circ g_2|_{[0,1]} \circ g_1|_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$$

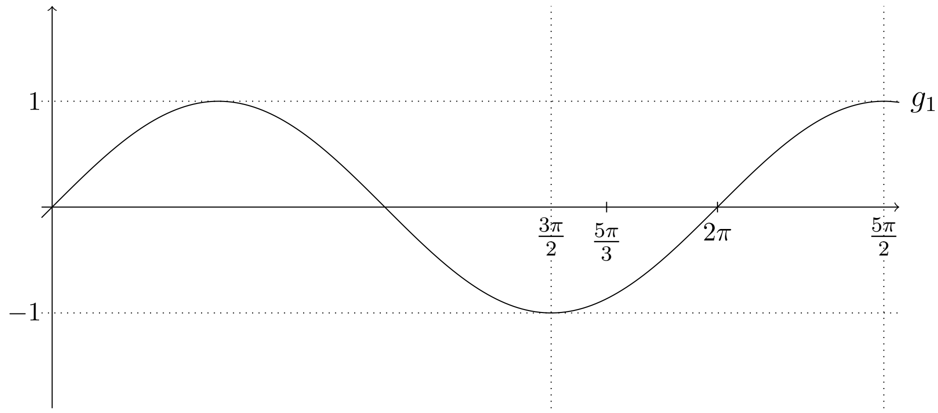
bijekcija kao kompozicija bijekcija. Lako vidimo da su inverzi restrikcija komponentnih funkcija dani s

$$\begin{aligned} \left(g_1|_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}(y) &= \arcsin y \\ \left(g_2|_{[0,1]}\right)^{-1}(y) &= \sqrt{y} \\ \left(g_3|_{[0,1]}\right)^{-1}(y) &= \ln y \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} \left(f|_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}(y) &= \left(\left(g_1|_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1} \circ \left(g_2|_{[0,1]}\right)^{-1} \circ \left(g_3|_{[0,1]}\right)^{-1}\right)(y) \\ &= \arcsin\sqrt{\ln y} \end{aligned}$$

(b)



Iz grafa funkcije g_1 očitavamo da je najveći interval na $\mathbb{R}$ koji sadrži $\frac{5\pi}{3}$ takav da je g_1 na njemu injekcija interval $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$. Imamo

$$g_1\left(\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1].$$

Međutim, funkcija g_2 nije injekcija na $[-1, 1]$ pa niti $f|_{\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]}$ neće biti injekcija. Stoga moramo smanjiti interval $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$. Vidimo da ako uzmemo $I = \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ dobivamo $g_1(I) = [-1, 0]$ te je $g_2|_{[-1,0]}$ injekcija. Funkcija g_3 je injekcija na cijelom $\mathbb{R}$ pa je i $g_3|_{[-1,0]}$ injekcija. Zaključujemo da je

$$f|_I = g_3|_{\left[\frac{1}{e},1\right]} \circ g_2|_{[-1,0]} \circ g_1|_I$$

injekcija kao kompozicija injekcija. Nadalje, za svaki interval $J \supsetneq I = \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ vrijedi da $f|_J$ nije injekcija. Zaista, ako je $a \in J \setminus \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, tada postoji točka $b \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ sa svojstvom da je $\sin a = \pm \sin b$ pa je $\sin^2 a = \sin^2 b$ odakle slijedi $f(a) = f(b)$. Međutim očito je $a \neq b$.

Slijedi da je $I = \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ najveći interval koji sadrži $\frac{5\pi}{3}$ takav da je $f|_I$ injekcija.