# MATEMATIČKA ANALIZA 2

`1. natjecanje`, 13. 4. 2007.

Ime i prezime: ______________________

Šifra: ______________________

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**Napomene:** - Od pet ponuđenih zadataka odaberite **četiri** koja ćete rješavati.
- Obavezno **prekrižite** kuću kod zadatka kojeg ne želite rješavati.
- U svakom rješavanom zadatku **detaljno** obrazložite vaše tvrdnje.

(25) 1. Dokažite da postoji jedinstvena funkcija $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takva da je

$$xf(x) - \ln x + \ln f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Nadalje, odredite lokalne ekstreme funkcije $f$.

(25) 2. Odredite vrijednost parametra $a > 0$ tako da krivulja

$$x^3 + y^2 - 2axy = 0$$

siječe samu sebe pod kutem od $60°$.

(25) 3. Neka je $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, gdje je $a < b$. Dokažite da postoji jedinstvena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sa svojstvom da je $f(a) = f(b) = 0$ te koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + p(x)y' - 2007y = 0$$

na intervalu $\langle a, b\rangle$. Odredite tu funkciju.

(25) 4. (a) Dokažite *Darbouxov teorem*:
Ako je funkcija $f$ derivabilna na otvorenom intervalu koji sadrži točke $a$ i $b$, onda za svaki broj $d$ između $f'(a)$ i $f'(b)$ postoji točka $c$ između $a$ i $b$ takva da je $f'(c) = d$.

(b) Postoji li derivabilna funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $g'(x) = \lfloor x \rfloor$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(25) 5. Funkciju $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiranu formulom

$$f(x) := x^2 - 6x + 8$$

aproksimiramo familijom polinoma $\{p_t\}_{t\in\langle 0,1]}$ stupnja manjeg ili jednakog 1, pri čemu $p_t$ prolazi točkama $(1, f(1))$ i $(t, f(t))$, za svako $t \in \langle 0, 1]$. Definiramo *maksimalnu pogrešku aproksimacije* (kraće MPA), s oznakom $\|f - p_t\|_\infty$, kao broj

$$\|f - p_t\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |f(x) - p_t(x)|.$$

Odredite $t \in \langle 0, 1]$ takav da je MPA polinomom $p_t$ minimalna.

Zavod za analizu